સ્વાધ્યાય 2.4

1. **નીચે ત્રિઘાત બહુપદીની સાથે દર્શાવેલ સંખ્યાઓ તેનાં શૂન્યો છે તે ચકાસો. દરેક પ્રશ્નમાં શૂન્યો અને સહગુણકો વચ્ચેનો સંબંધ પણ ચકાસો :**

જ. જો શૂન્યેતર બહુપદી $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ નાં શૂન્યો α , β અને γ હોય તો તેમનાં શૂન્યો વચ્ચેનો સંબંધ નીચે મુજબ છે.

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha + \beta + \gamma)$

$$= \alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} = \frac{-(x^2 \text{ નો સહગુણક})}{(x^3 \text{ નો સહગુણક})}$$

શૂન્યોનો સરવાળો $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$$= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} = \frac{x \text{ નો સહગુણક}}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

શૂન્યોનો ગુણાકાર $(\alpha\beta\gamma)$

$$= \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} = \frac{-(\text{અચળ પદ નો સહગુણક})}{x^3 \text{ નો સહગુણક}}$$

(i) $\boldsymbol{p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2}$ **, શૂન્યો :** $\boldsymbol{\frac{1}{2}, 1, -2}$

જ. $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ માં $x = \frac{1}{2}$ મૂકતાં,

$$\therefore\ p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2$$

$$\therefore\ 0 = 2 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 5 \times \frac{1}{2} + 2$$

$$\therefore\ 0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2$$

$$\therefore\ 0 = \frac{2}{4} - \frac{5}{2} + 2$$

$$\therefore\ 0 = \frac{2}{4} - \frac{5 \times 2}{2 \times 2} + \frac{2 \times 4}{4}$$

$$\therefore\ 0 = \frac{2}{4} - \frac{10}{4} + \frac{8}{4}$$

$$\therefore\ 0 = \frac{2 - 10 + 8}{4}$$

$$\therefore\ 0 = 0$$

$\therefore\ x = \frac{1}{2}$ એ બહુપદીનું એક શૂન્ય છે.

$p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ માં $x = 1$ મૂકતાં,

$\therefore\ p(1) = 2\,(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2$

$\therefore\ 0 = 2 \times 1 + 1 - 5 \times 1 + 2$

$\therefore\ 0 = 2 + 1 - 5 + 2$

$\therefore\ 0 = 5 - 5$

$\therefore\ 0 = 0$

$\therefore\ x = 1$ એ બહુપદીનું એક શૂન્ય છે.

$p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ માં $x = -2$ મૂકતાં,

$\therefore\ p(-2) = 2\,(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 2$

$\therefore\ 0 = 2 \times -8 + 4 - 5 \times 2 + 2$

$\therefore\ 0 = -16 + 4 + 10 + 2$

$\therefore\ 0 = 16 - 16$

$\therefore\ 0 = 0$

$\therefore\ x = -2$ એ બહુપદીનું એક શૂન્ય છે.

$p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ માં $a = 2\,, b = 1, c = -5$ અને $d = 2$ છે.
તેમજ $\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = 1$ તેમજ $\gamma = -2$ છે.

$$
\begin{aligned}
\text{શૂન્યોનો સરવાળો} &= \alpha + \beta + \gamma \\
\therefore \frac{1}{2} + 1 - 2 &= \frac{-b}{a} \\
\therefore \frac{1}{2} - 1 &= \frac{-1}{2} \\
\therefore \frac{-1}{2} &= \frac{-1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{શૂન્યોનો સરવાળો} &= \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \\
\therefore \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times -2 + -2 \times \frac{1}{2} &= \frac{c}{a} \\
\therefore \frac{1}{2} - 2 - 1 &= \frac{-5}{2} \\
\therefore \frac{1}{2} - 3 &= \frac{-5}{2} \\
\therefore \frac{1}{2} - \frac{6}{2} &= \frac{-5}{2} \\
\therefore \frac{-5}{2} &= \frac{-5}{2}
\end{aligned}
$$

$$\text{શૂન્યોનો ગુણાકાર} = \alpha\beta\gamma$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 1 \times -2 = \frac{-d}{a}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times -2 = \frac{-2}{2}$$

$$\therefore -1 = -1$$

(ii) $\boldsymbol{p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ **, શૂન્યો : $\boldsymbol{2, 1, 1}$**

જ. $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ માં $x = 2$ મૂકતાં,

$\therefore\ p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2$

$\therefore\ 0 = 8 - 4 \times 4 + 5 \times 2 - 2$

$\therefore\ 0 = 8 - 16 + 10 - 2$

$\therefore\ 0 = 18 - 18$

$\therefore\ 0 = 0$

$\therefore\ x = 2$ એ બહુપદીનું એક શૂન્ય છે.

$p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ માં $x = 1$ મૂકતાં,

$\therefore\ p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 2$

$\therefore\ 0 = 1 - 4 \times 1 + 5 \times 1 - 2$

$\therefore\ 0 = 1 - 4 + 5 - 2$

$\therefore\ 0 = 6 - 6$

$\therefore\ 0 = 0$

$\therefore\ x = 1$ એ બહુપદીનું એક શૂન્ય છે.

$p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ માં $a = 1, b = -4, c = 5$ અને $d = -2$ છે.

તેમજ $\alpha = 2,\ \beta = 1$ તેમજ $\gamma = 1$ છે.

$$\text{શૂન્યોનો સરવાળો} = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\therefore 2 + 1 + 1 = \frac{-b}{a}$$

$$\therefore 4 = \frac{-(-4)}{1}$$

$$\therefore 4 = 4$$

$$\text{શૂન્યોનો સરવાળો} = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$
$$\therefore 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = \frac{c}{a}$$
$$\therefore 2 + 1 + 2 = \frac{5}{1}$$
$$\therefore 5 = 5$$
$$\therefore \frac{-5}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$\text{શૂન્યોનો ગુણાકાર} = \alpha\beta\gamma$$
$$\therefore 2 \times 1 \times 1 = \frac{-d}{a}$$
$$\therefore 2 = \frac{(-2)}{1}$$
$$\therefore 2 = 2$$

2. જેનાં શૂન્યોનો સરવાળો, બબ્બે શૂન્યોનો સરવાળો અને ગુણાકાર અનુક્રમે $2, -7, -14$ છે તેવી ત્રિઘાત બહુપદી શોધો.

જ. અહીં , $\alpha + \beta + \gamma = 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7$ અને $\alpha\beta\gamma = -14$ આપેલું છે.

તેથી ત્રિઘાત સમીકરણ નીચે મુજબ મળે.

$k\{x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - (\alpha\beta\gamma)\}$

$\therefore k\{x^3 - 2x^2 - 7x + 14\}$

3. જો બહુપદી $x^3 - 3x^2 + x + 1$ ના શૂન્યો $a - b,\ a,\ a + b$ હોય તો a અને b શોધો.

જ. અહીં, $a = 1, b = -3, c = 1, d = 1$ તેમજ $\alpha = a - b, \beta = a, \gamma = a + b$ છે.

હવે,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$
$$\therefore a - b + a + a + b = \frac{-(-3)}{1}$$
$$\therefore 3a = 3$$
$$\therefore a = 3$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$
$$\therefore (a - b) \times a \times (a + b) = \frac{-1}{1}$$
$$\therefore (1 - b) \times 1 \times (1 + b) = \frac{-1}{1}$$

$$\therefore 1 - b^2 = -1$$
$$\therefore b^2 = -1 - 1$$
$$\therefore b^2 = -2$$
$$\therefore b = \pm\sqrt{2}$$

તેથી, $a = 1$ તથા $b = \pm\sqrt{2}$

4. બહુપદી $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ નાં બે શૂન્યો $2 \pm \sqrt{3}$ તો બાકીનાં બે શૂન્યો શોધો.

જ. $p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ ના બે શૂન્યો $2 + \sqrt{3}$ તેમજ $2 - \sqrt{3}$ છે.

તેથી, $(x - 2 + \sqrt{3})$ અને $(x - 2 - \sqrt{3})$ બહુપદીના બે અવયવ થશે.

$(x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3})$

$= (x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2$

$= x^2 - 4x + 4 - 3$

$= x^2 - 4x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x - 35 \\
x^2 - 4x + 1 & x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35 \\
 & x^4 - 4x^3 + x^2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & -2x^3 - 27x^2 + 138x - 35 \\
 & -2x^3 + 8x^2 - 2x \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & -35x^2 + 140x - 35 \\
 & -35x^2 + 140x - 35 \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$

$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 35)$

$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 7x + 5x - 35)$

$= (x^2 - 4x + 1)(x - 7)(x + 5)$

તેથી, $x - 7 = 0$ કે $x + 5 = 0$

તેથી, $x = 7$ કે $x = -5$

તેથી, બાકીનાં બે શૂન્યો 7 અને -5 મળશે.

5. **બહુપદી $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ ને બીજી બહુપદી $x^2 - 2x + k$ વડે ભાગતાં શેષ $x + a$ મળે તો k અને a શોધો.**

જ. અહીં, ભાજ્ય $= x^4 - 6x^3 - 25x + 10$, ભાજક $= x^2 - 2x + k$, શેષ $= x + a$

ભાજ્ય = ભાજક × ભાગફળ + શેષ

$\therefore\ x^4 - 6x^3 - 25x + 10 = (x^2 - 2x + k) \times$ ભાગફળ $+ (x + a)$

$\therefore\ x^4 - 6x^3 - 25x + 10 - (x + a) = (x^2 - 2x + k) \times$ ભાગફળ

$\therefore\ x^4 - 6x^3 - 26x + 10 - a = (x^2 - 2x + k) \times$ ભાગફળ

$\therefore$ ભાગફળ $= \dfrac{x^4 - 6x^3 - 26x + 10 - a}{x^2 - 2x + k}$

Quotient: $x^2 - 4x + (8-k)$

$x^2 - 2x + k \,\big)\, x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a$

$x^4 - 2x^3 + kx^2$

$- \quad + \quad -$

$-4x^3 + (16-k)x^2 - 26x$

$-4x^3 + 8x^2 - 4kx$

$+ \quad - \quad +$

$(8-k)x^2 - (26-4k)x + 10 - a$

$(8-k)x^2 - (16-2k)x + (8k - k^2)$

$- \quad + \quad -$

$(-10+2k)x + (10 - a - 8k + k^2)$

અહીં સરખામણી કરતાં,

$-10 + 2k = 0$

$\therefore 2k = 10$

$\therefore k = 5$

$10 - a - 8k + k^2 = 0$

$\therefore 10 - a - 8 \times 5 + (5)^2 = 0$

$\therefore 10 - a - 40 + 25 = 0$

$\therefore -a - 5 = 0$

$\therefore a = -5$