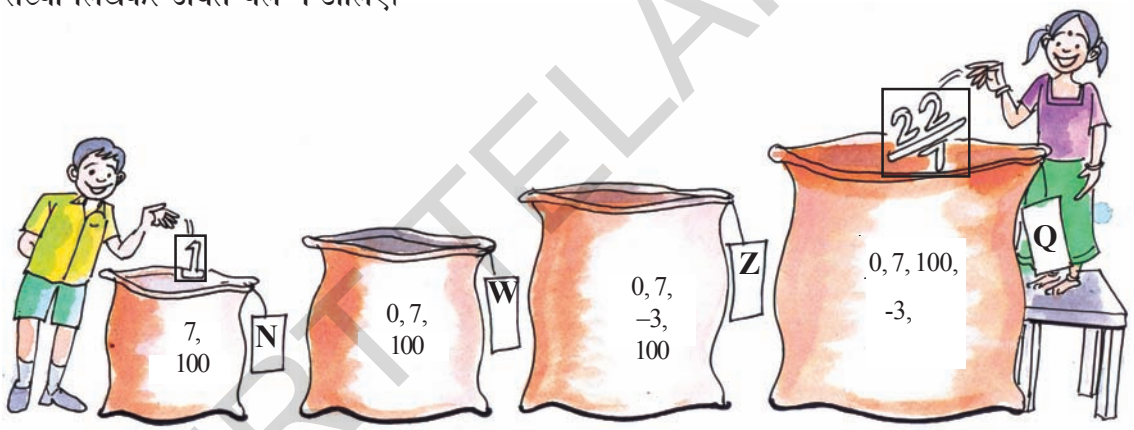
01 वास्तविक संख्याएँ (REAL NUMBERS)

1.1 प्रस्तावना

सर्वप्रथम हम सभी सँख्याओं का अवलोकन करेंगे। निम्न संख्याओं को जाँचेंगे।

$7, 100, 9, 11, -3, 0, -\frac{1}{4}, 5, 1, \frac{3}{7}, -1, 0.12, -\frac{13}{17}, 13.222\ldots, 19, \frac{-5}{3}, \frac{213}{4}, \frac{-69}{1}, \frac{22}{7}, 5.\overline{6}$

जॉन और स्नेहा संख्याओं को उचित बैग में डालना चाहते हैं। कुछ संख्याएँ उन बैगों में है.....शेष सभी संख्याओं को उनके उचित बैगों में डालिए। यदि एक संख्या एक से अधिक थैले में जाती है तो वह संख्या लिखकर उचित थैले में डालिए।



हमने देखा कि N थैले में प्राकृतिक संख्याएँ है। W थैले में पूर्ण संख्याएँ तथा Z थैले में पूर्णांक संख्याएँ और Q थैले में करणीय संख्याएँ है।

Z थैले में पूर्णांक संख्याएँ है जो ऋणात्मक एवं पूर्ण संख्याओं का समूह जिसे I या Z द्वारा दर्शाया जाता हैं।

$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

उसी प्रकार Q थैले में $\frac{p}{q}$ रूप में आने वाले जहाँ p तथा q पूर्णांक संख्याएँ है तथा $q \neq 0$.

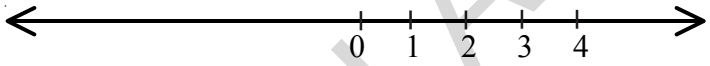
आपने देखा होगा प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक संख्याएँ, करणीय संख्याएँ जो $\frac{p}{q}$, रूप में लिखी जा सकती है जहाँ p और q पूर्णांक संख्याएँ है और $q \neq 0$.

SCERT TELANGANA

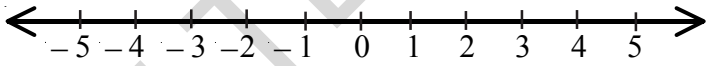
उदाहरण, -15 को $\frac{-15}{1}$; की तरह भी लिखा जा सकता है। $p = -15, q = 1$. उदा. देखिए.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{50}{100}$ ... यह आपस में समान करणीय संख्याएँ (भिन्न) है। अर्थात् सभी करणीय संख्याओं का अद्वितीय प्रदर्शन $\frac{p}{q}$ रूप में नहीं होता है। जहाँ p और q पूर्ण संख्याएँ है और $q \neq 0$. जब हम कहते हैं कि $\frac{p}{q}$ करणीय संख्याएँ है तथा को संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है तो $q \neq 0$ तथा p और q के उभयनिष्ठ खण्ड एक के अलावा दूसरे नहीं होंगे ।(p और q सापेक्ष रूढ़ संख्याएँ) के समान मुल्य वाले अनंत भिन्न होते है हम $\frac{1}{2}$ को चुनेंगे जो की, । इसे समझने के लिए संख्या रेखा उतारिए।सभी परिमेय संख्याओं के सामान्य रुप को दर्शाता है।

पूर्ण संख्या को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए एक रेखा खींचकर उस पर '0' बिन्दु दर्शाइए। समान दूरी पर दाई ओर 1, 2, 3, 4, ... संख्याएँ दर्शाइए।



पूर्णांक संख्याओं की रेखा



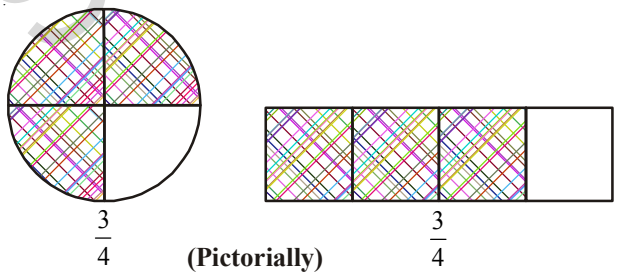
क्या आप जानते हैं करणीय संख्याओं को किस प्रकार संख्या रेखा पर दर्शाया जाता है।

सर्वप्रथम $\frac{3}{4}$ भिन्न को चित्र रूप में और संख्या रेखा पर दर्शाएँगे।

$\frac{3}{4}$ में 3 अंश और 4 हर है।

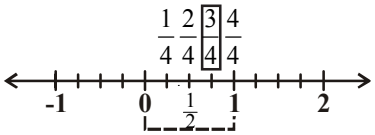
अर्थात् 4 समान भागों में से 3 भाग लिए जाएँगे।

यहाँ कुछ अंश $\frac{3}{4}$.



(Pictorially)

चित्र रूप



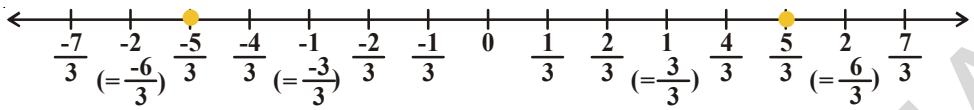
(Number line)

संख्या रेखा

SCERT TELANGANA

उदाहरण-1. $\frac{5}{3}$ तथा $-\frac{5}{3}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।

हल : $-2, -1, 0, 1, 2$ पूर्णांक संख्याओं को रेखा पर दर्शाइए।



प्रत्येक इकाई को तीन समान भागों में 0 के बाई तथा दाई ओर बाँटा गया है। इनमें से पाँच भागों को लिया गया। 0 के दाई ओर पाँचवा बिन्दु $\frac{5}{3}$ और बाई ओर का 5 वा बिन्दु $\frac{-5}{3}$ को दर्शाता है।

इसे कीजिए

1. $\frac{-3}{4}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।
2. 0, 7, 10, -4 को $\frac{p}{q}$ के रूप मे बताइए।
3. **इस संख्या का अनुमान लगाइए :** आपके मित्र ने 0 से 100 के बीच एक पूर्ण संख्या का चयन मस्तिष्क में किया हैं । उसे प्रश्न पूछकर उस संख्या को ज्ञात करना है। और आपका मित्र केवल हाँ या नहीं में उत्तर देगा । उसके लिए कौनसी युक्ति अपनाओगे।

उदाहरण-2. क्या निम्न कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए उदाहरण सहित कारण बताइए।

i. प्रत्येक करणीय संख्या पूर्णांक संख्या है।

ii. प्रत्येक पूर्णांक संख्या करणीय संख्या है।

iii. शून्य एक करणीय संख्या है।

हल : i. असत्य : उदा, $\frac{7}{8}$ करणीय संख्या है परन्तु पूर्णांक नहीं।

ii. सत्य : प्रत्येक पूर्णांक संख्या को $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ रूप में दर्शाया जा सकता है। उदा $-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2}$.

(करणीय संख्या)

(कोई पूर्णांक संख्या 'b' को $\frac{b}{1}$ के रूप में दर्शाया जा सकता है)

iii. सत्य : 0 को $\frac{0}{2}, \frac{0}{7}, \frac{0}{13}$ के रूप में दर्शाया जा सकता है। ($\frac{p}{q}$ के रूप में p, q पूर्ण संख्याएँ है जहाँ $q \neq 0$)

('0' को $\frac{0}{x}$ के रूप में भी दर्शाया जा सकता है। 'x' एक पूर्णांक संख्या है $x \neq 0$)

SCERT TELANGANA

उदाहरण-3. 3 और 4 के मध्य आने वाली करणीय संख्याओं को मध्यमान विधि से ज्ञात कीजिए।

हल :

विधि-I : दो करणीय संख्याओं के मध्य आने वाली करणीय संख्या $\frac{a+b}{2}$ (a, b).

$a = 3 \;\; b = 4, \left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\frac{(3+4)}{2} = \frac{7}{2}$. 3 और 4 के मध्य $3 < \frac{7}{2} < 4$

इस विधी से 3 के आगे और $\frac{7}{2}$ के मध्य करणीय संख्या

$$\frac{3+\frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{6+7}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{2\times 2} = \frac{13}{4}$$

$$3 < \frac{13}{4} < \frac{7}{2} < 4$$

विधि-II : दूसरी विधि द्वारा एक ही चरण में ज्ञात कर सकते हैं।
हमें दो संख्याएँ चाहिए 3, 4 को $2 + 1 = 3$ हल के रूप में

i.e., $3 = \frac{3}{1} = \frac{9}{3}$ और $4 = \frac{4}{1} = \frac{12}{3}$

$\frac{10}{3}, \frac{11}{3}$ करणीय संख्याएँ है जो 3 और 4 के मध्य आती है।

$$3 = \frac{9}{3} < \left(\frac{10}{3} < \frac{11}{3}\right) < \frac{12}{3} = 4$$

यदि आपको 3 और 4 के मध्य 5 करणीय संख्याएँ, ज्ञात करना हो तो हम 3, 4 करणीय संख्या को $5 + 1 = 6$ हर के रूप में लिखिए।

i.e. $3 = \frac{18}{6}$ और $4 = \frac{24}{6}$ $\qquad 3 = \frac{18}{6} < \left(\frac{19}{6}, \frac{20}{6}, \frac{21}{6}, \frac{22}{6}, \frac{23}{6}\right) < \frac{24}{6} = 4$

इससे हम जान सकते हैं कि 3 और 4 के मध्य कई करणीय संख्याएँ होगी। दो अलग करणीय संख्याओं के लिए भी जाँच कीजिए। अतः हम कह सकते हैं कि दो करणीय संख्याओं के मध्य अनन्त करणीय संख्याएँ होती है ।

इसे हल कीजिए

i. 2 और 3 के मध्य 5 करणीय संख्याओं को मध्यमान विधि से ज्ञात करो।

ii. $-\frac{3}{11}$ और $\frac{8}{11}$ के मध्य 10 करणीय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

SCERT TELANGANA

उदाहरण-4. $\frac{7}{16}$ और $\frac{10}{7}, \frac{2}{3}$ को दशमलव के रूप में लिखिए।

हल :

$$16\overline{)7.00000}\ (0.4375$$

0, 70, 64, 60, 48, 120, 112, 80, 80, 0

$\therefore \frac{7}{16} = 0.4375$

अनावर्त दशमलव

$$7\overline{)10}\ (1.428571$$

7, 30, 28, 20, 14, 60, 56, 40, 35, 50, 49, 10, 7, 3

$\therefore \frac{10}{7} = 1.\overline{428571}$

आवर्त दशमलव

$$3\overline{)2.0000}\ (0.666$$

18, 20, 18, 20, 18, 2

$\therefore \frac{2}{3} = 0.666 = 0.\overline{6}$

आवर्त दशमलव

इसे हल कीजिए।

(i) $\frac{1}{17}$ (ii) $\frac{1}{19}$ को दशमलव रूप में लिखिए।

उदाहरण-5. 3.28 को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए (जहाँ p तथा q पूर्णांक संख्याएँ $q \neq 0$).

हल : $3.28 = \frac{328}{100}$

$$= \frac{328 \div 2}{100 \div 2} = \frac{164}{50}$$

$$= \frac{164 \div 2}{50 \div 2} = \frac{82}{25}$$

(अंश तथा हर सापेक्ष रूढ़ संख्याएँ)

$\therefore 3.28 = \frac{82}{25}$

SCERT TELANGANA

उदाहरण-6. $1.\overline{62}$ को $\frac{p}{q}$ रूप में दर्शाइए $q \neq 0$; p, q पूर्ण संख्याएँ

हल : मानलो $x = 1.626262.....$ (1)

दोनों ओर समीकरण (1) को 100 से गुणा करने पर

$100x = 162.6262...$ (2)

(2) से (1) को घटाने पर

$100x = 162.6262...$

$x = 1.6262...$

$99x = 161.0000.....$

$x = \frac{161}{99}$

$\therefore 1.\overline{62} = \frac{161}{99}$

प्रयत्न कीजिए

I. दशमलव रूप में लिखिए :

i. $\frac{1}{2}$ ii. $\frac{1}{2^2}$ iii. $\frac{1}{5}$ iv. $\frac{1}{5\times 2}$ v. $\frac{3}{10}$ vi. $\frac{27}{25}$ vii. $\frac{1}{3}$ viii. $\frac{7}{6}$ ix. $\frac{5}{12}$ x. $\frac{1}{7}$

निम्न दशमलव की जाँच कीजिए ।

$\frac{1}{2} = 0.5$ $\frac{1}{10} = 0.1$ $\frac{32}{5} = 6.4$ $\frac{1}{3} = 0.333...$ $\frac{4}{15} = 0.2\overline{6}$

क्या आप आवर्त, अनावर्त दशमलव होने के लिए हर का विशेष गुण बता सकते है?

करणीय संख्याओं के हर के रूढ़ गुणनखण्ड लिखिए।

आपने क्या जाना?

निरिक्षण किजिए

हमने देखा है कि, परिमेय संख्यांएँ सिर्फ आवर्त दशमलव होते है जब हर के रुढी गुणनखंड 2,5 हो और जब हर का विस्तार रुप लिखा जाय तो वह $2^m, 5^n$ के रुप में हो जहाँ m तथा m अशून्य पुर्णांक हो।

SCERT TELANGANA

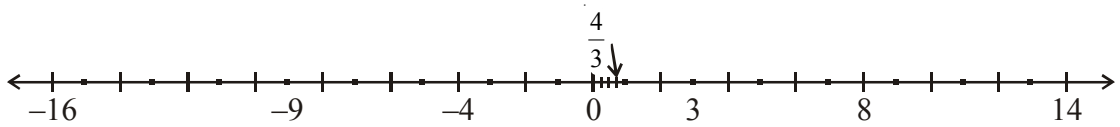
अभ्यास - 1.1

1. (a) कोई तीन करणीय संख्याएँ लिखिए।
   (b) अपने शब्दों में करणीय संख्याओं के बारे में बताइए।
2. निम्न कथनों के लिए उदाहरण दीजिए।
   i. एक संख्या जो करणीय है परन्तु पूर्णांक नही।
   ii. पूर्ण संख्या जो करणीय नही है।
   iii. एक संख्या जो पूर्णांक संख्या है परन्तु पूर्ण संख्या नहीं है।
   iv. एक संख्या जो प्राकृतिक संख्या, पूर्ण संख्या, पूर्णांक संख्या और करणीय संख्या है।
   v. एक संख्या जो पूर्णांक संख्या है परन्तु प्राकृतिक संख्या नही है।
3. 1 और 2 के मध्य 5 करणीय संख्याएँ लिखिए।
4. $\frac{3}{5}$ और $\frac{2}{3}$ के मध्य तीन करणीय संख्याओं का निवेश कीजिए ।
5. $\frac{8}{5}$ और $\frac{-8}{5}$ को संख्या रेखा पर दर्शाइए।
6. निम्न करणीय संख्याओं को दशमलव रूप में परिवर्तित कीजिए ।
   I. i) $\frac{242}{1000}$ ii) $\frac{354}{500}$ iii) $\frac{2}{5}$ iv) $\frac{115}{4}$
   II. i) $\frac{2}{3}$ ii) $-\frac{25}{36}$ iii) $\frac{22}{7}$ iv) $\frac{11}{9}$
7. निम्न दशमलव को $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखिए जहाँ $q \neq 0$
   i) 0.36 ii) 15.4 iii) 10.25 iv) 3.25
8. निम्न दशमलव को $\frac{p}{q}$ रूप में दर्शाइए।
   i) $0.\overline{5}$ ii) $3.\overline{8}$ iii) $0.\overline{36}$ iv) $3.12\overline{7}$
9. बिना भाग दिए अनावर्त दशमलव कौनसे हैं बताइए।
   (i) $\frac{3}{25}$ (ii) $\frac{11}{18}$ (iii) $\frac{13}{20}$ (iv) $\frac{41}{42}$

1.2 करणीय संख्याएँ (Rational Numbers)

पुनः संख्या रेखा को देखिए। क्या हम सभी संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं? वास्तव में अनन्त संख्याएँ है जो हम संख्या रेखा पर नहीं दर्शाय गये हैं ।

SCERT TELANGANA



इसे समझने के लिए निम्न समीकरण देखिए।

(i) $x^2 = 4$ (ii) $3x = 4$ (iii) $x^2 = 2$

(i) एक समीकरण के लिए x का मूल्य 2 और -2 है जिसे हम संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं।

(ii) समीकरण $3x = 4$ को दोनों ओर 3 से भाग देने पर $\frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ इसे हम संख्या रेखा पर दर्शा सकते है।

समीकरण (iii) $x^2 = 2$ को हल करने के लिए दोनों ओर वर्गमूल निकालने पर $\Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{2}$

क्या $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकते है?

$\sqrt{2}$ का मूल्य क्या होगा $\sqrt{2}$ किन संख्याओं से संबंधित है?

$\sqrt{2}$ का मूल्य भाग पद्धति से

	1.4142135
1	$2.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	1
24	100
	96
281	400
	281
2824	11900
	11296
28282	60400
	56564
282841	383600
	282841
2828423	10075900
	8485269
28284265	159063100
	141421325
28284270	17641775

क्रम 1 : 2 के बाद दशमलव लगाइए

क्रम 2 : दशमलव के बाद शून्य लिखिए

क्रम 3 : शून्यों को जोड़ी के रूप में लिख कर अवधि - खिंचीए

क्रम 4 : पूर्ण वर्ग ज्ञात करने की विधि अपनाइए।

$\therefore \sqrt{2} = 1.4142135 \ldots$

SCERT TELANGANA

यदि हम $\sqrt{2}$ का मूल्य ज्ञात करते हैं तो $\sqrt{2}$ =1.4142135623731..... ना ही आवर्त और नाही अनावर्त दशमलव है।

दशमलव संख्याएँ जो आवर्त या अनावर्त है उन्हें $\frac{p}{q}$ के रूप में दर्शा सकते है। उन्हीं को करणीय संख्याएँ कहते है।

$\sqrt{2}$ अनावर्त और अकरणीय दशमलव है क्या उसे अवधि की सहायता से लिखा जा सकता है? नही। ऐसी संख्याओं को अकरणीय संख्याएँ कहते है। $\sqrt{2} \neq p/q$ (p और q, $q \neq 0$).

$\sqrt{3}$ = 1.7320508075689.....

$\sqrt{5}$ = 2.2360679774998.....

आवर्त, अनावर्त दशमलव को अकरणीय संख्याएँ कहा जाता है जिसे 'S' या 'Q' से दर्शाया जाता है।

अकरणीय संख्याओं का उदाहरण -

(1) 2.1356217528..., (2) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, etc.

5वीं शताब्दि में ग्रीक के पायथागोरियन जो मशहूर गणितज्ञ दार्शनिक पायथागोरस का अनुकरण करनेवालो ने सर्वप्रथम बताया था कि जो संख्याएँ करणीय नही है उन्हे अकरणीय संख्या कहते है। पायथोगोरियन ने बताया $\sqrt{2}$ को अकरणीय संख्या कहते है। पश्चात् थियोडारस (Theodorus), साइरिन (Cyrene) ने बताया कि $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ और $\sqrt{17}$ भी अकरणीय संख्याएँ है। सुलभ सूत्र (Sulba Sutra) (800 BC) में वर्गमूल ज्ञात करने में अकरणीय संख्या का उपयोग किया गया।

इस तालिका को देखिए

$\sqrt{1}$	=	1
$\sqrt{2}$	=	1.414213.....
$\sqrt{3}$	=	1.7320508.....
$\sqrt{4}$	=	2
$\sqrt{5}$	=	2.2360679.....
$\sqrt{6}$	=	
$\sqrt{7}$	=	
$\sqrt{8}$	=	
$\sqrt{9}$	=	3

यदि 'n' प्राकृतिक संख्या जो पूर्ण वर्ग नही है तो $\sqrt{n}$ अकरणीय संख्या होगी।

SCERT TELANGANA

अब क्या आप बता सकते हो? कौन सी संख्याएँ करणीय और अकरणीय है ।

$\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}$ - करणीय संख्याएँ

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ - अकरणीय संख्याएँ

विचार-विमर्श कर लिखिए ।

कृति ने कहा $\sqrt{2}$ को $\frac{\sqrt{2}}{1}$ $\frac{p}{q}$ रूप में लिख सकते हैं $\therefore \sqrt{2}$ एक करणीय संख्या है। क्या आप इस तर्क से सहमत है?

π के बारे में जानकारी

π का अर्थ है वृत्त की परिधि (C) और व्यास (d) का अनुपात $\pi = \frac{c}{d}$

π एक अनुपात रूप में है अतः यह अकरणीय है । यह तथ्य झूठ सिद्ध होता है परिधि (C) और व्यास (d) की उभयनिष्ठ इकाई नही होगी। यदि सुक्ष्म रूप से जाँचा जाय तो (C) या (d) अकरणीय होगें। अतः π को हम अकरणीय संख्या ही कहेंगे।

ग्रीक के सर्वश्रेष्ठ आर्किमिडीज (Archimedez) ने π का मूल्य बताया। π का मूल्य 3.140845 तथा 3.142857 के मध्य होगा $3.140845 < \pi < 3.142857$) आर्यभट्ट (Aryabhatta) (476-550 AD) हिन्दुस्तान के श्रेष्ठ गणितज्ञ दार्शनिक ने π का उचित मूल्य चार दशमलव स्थानों तक 3.1416 बताया । तीव्र गति के संगणक आधुनिक अल्गोरिदम (algoritham) की सहायता π का मूल्य 1.24 से ऊपर ट्रिलीयन दशमलव स्थानों तक ज्ञात किया गया है ।

π =3.14159265358979323846264338327950 ..... π का दशमलव रूपान्तरण अकरणीय और अनावर्त होगा। अतः π को अकरणीय संख्या कहा गया है।

ध्यान दीजिए हम π का अनुमानीत मूल्य $\frac{22}{7}$ लेते है लेकिन $\pi \neq \frac{22}{7}$.

हम मार्च 14 को π दिवस मनाते है क्योंकि उस दिन तारिक 3.14 (अर्थात् $\pi = 3.14159 ....$) संयोग वश अलबर्ट आइनस्टाइन (Albert Einstein) भी मार्च 14, 1879 को जन्मे थे।

प्रयत्न कीजिए ।

$\sqrt{3}$ का मूल्य दशमलव के 6 स्थानों तक ज्ञात करो।

SCERT TELANGANA

1.3 अकरणीय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाना

हमने सीखा है दो करणीय संख्याओं के मध्य कई करणीय संख्याएँ उपस्थित होती है। अतः जब दो करणीय संख्याएँ संख्या रेखा पर बिन्दुओं की सहायता से दर्शायी जाती है तो उनके बीच का एक बिन्दु करणीय संख्या को दर्शाता है अर्थात् संख्या रेखा करणीय संख्याओं को दर्शाती है। क्या यह सही है? क्या आप $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं? तो हम $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ अकरणीय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शाएँगे।

उदाहरण-7. $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

हल : बिन्दु O से OABC एक इकाई वर्ग बनाओ जो कि संख्या रेखा पर है।

पायथागोरस प्रमेय द्वारा OB = $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

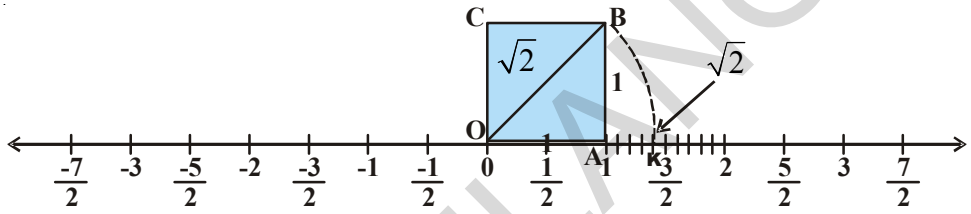


Fig. (i)

OB = $\sqrt{2}$ प्रकार की सहायता से O को केन्द्र मानकर OB अर्धव्यास से एक चाप O के दाई ओर खिचने पर वह संख्या रेखा को बिन्दु K पर काटता है। संख्या रेखा पर K = $\sqrt{2}$ को दर्शाता है।

उदाहरण-8. $\sqrt{3}$ को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

हल : चलिए पुनः चित्र (i) की ओर जायेंगे ।

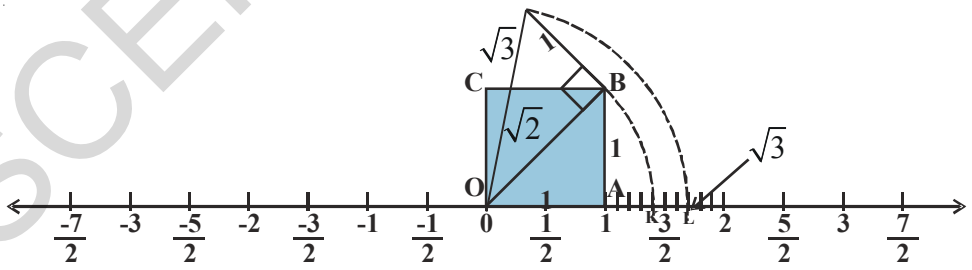


Fig. (ii)

OB पर एक इकाई लम्बाई वाला BD लम्ब डालो । (ii) OD को मिलाओ

SCERT TELANGANA

पायथागोरस प्रमेय द्वारा, OD = $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

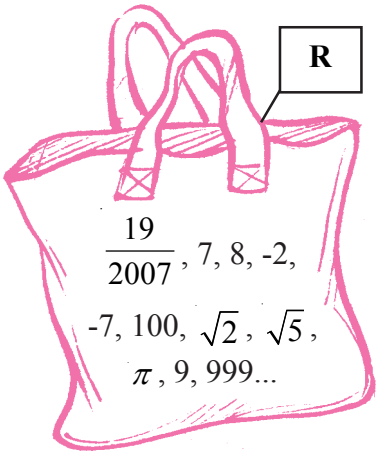
प्रकार की सहायता से O केन्द्र मानकर OD, अर्धव्यास लेकर एक चाप बनाओ जो संख्या रेखा को O के दाई ओर बिन्दु L पर फाटता L = $\sqrt{3}$. इससे पता चलता है कि संख्या रेखा पर अकरणीय संख्याओं को दर्शाया जा सकता है। $\sqrt{n-1}$ को दर्शाने के बाद किसी भी n पूर्णांक के लिए $\sqrt{n}$ को दर्शाया जा सकता है ।

प्रयत्न कीजिए

$\sqrt{5}$ और $-\sqrt{5}$ को संख्या रेखा पर दर्शाओं। [**संकेत** : $h^2 = (2)^2 + (1)^2$]

1.3 वास्तविक संख्याएँ

सभी करणीय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ रूप में लिखी जा सकती है। p, q पूर्णांक संख्याएँ $q \neq 0$. कोई दूसरी संख्या $\frac{p}{q}$ रूप में नही लिखी जा सकती उन्हे अकरणीय संख्या कहते हैं। यदि हम सभी करणीय और अकरणीय संख्याओं को संख्या रेखा पर दर्शायेंगे तो क्या कोई ऐसा भी बिन्दु है जो उनमें सम्मिलीत न होगा ।



उत्तर होगा नही! करणीय, अकरणीय संख्याएँ संख्या रेखा पर ही होगी। इनको मिलाकर जो नयी संख्या बनती है उसे वास्तविक संख्या R कहते है। प्रत्येक वास्तविक संख्या एक अद्वितीय बिन्दु है। प्रत्येक बिन्दु संख्या रेखा पर अद्वितीय वास्तविक संख्या होगी। अतः हम इसे वास्तविक संख्या रेखा कहते है।

वास्तविक संख्याओं के उदाहरण -

$-5.6, \sqrt{21}, -2, 0, 1, \frac{1}{5}, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{9}$, 12.5, 12.5123..... आदि । इनमें आपने देखा कि अकरणीय एवं करणीय संख्याएँ मिलाकर लिखी गयी हैं ।

SCERT TELANGANA

उदाहरण-9. $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{7}$ के मध्य अकरणीय संख्याएँ रखो।

हल : हम जानते हैं $\frac{1}{5} = 0.20$

$\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$

$\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{7}$ के मध्य अकरणीय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए दो संख्याओं का दशमलव रूप देखिए हमें अनन्त अकरणीय संख्याएँ प्राप्त होगी।

अकरणीय संख्याओं के उदाहरण -

0.201201120111..., 0.24114111411114…, 0.25231617181912..., 0.267812147512 …

क्या आप $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच और चार अकरणीय संख्याएँ ज्ञात कर सकोगे?

उदाहरण-10. 3 और 4 के बीच अकरणीय संख्याओं को ज्ञात कीजिए ।

हल :

यदि a और b दो धनात्मक करणीय संख्याएँ है। ab एक पूर्ण वर्ग ना हो तो $\sqrt{ab}$ अकरणीय संख्या होगी जो a और b के मध्य है।

∴ अकरणीय संख्या 3 और 4 के मध्य $\sqrt{3\times4}$ $= \sqrt{3}\times\sqrt{4}$

$= \sqrt{3}\times2 = 2\sqrt{3}$

उदाहरण-11. जाँच करो, करणीय या अकरणीय संख्याएँ :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\frac{10}{2\sqrt{5}}$ (iv) $\left(\sqrt{2}+2\right)^2$

हल :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)+\left(3-\sqrt{3}\right)$ $= 3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}$

$= 6$, करणीय संख्या

(ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$.

SCERT TELANGANA

$(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) = 3^2 - (\sqrt{3})^2 = 9 - 3 = 6$ करणीय संख्या.

(iii) $\frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{10\div 2}{2\sqrt{5}\div 2} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, अकरणीय संख्या

(iv) $(\sqrt{2}+2)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2.\sqrt{2}\ .2 + 2^2 = 2 + 4\sqrt{2} + 4$

$= 6 + 4\sqrt{2}$, अकरणीय संख्या

अभ्यास - 1.2

1. निम्न संख्याएँ करणीय है या अकरणीय है बताइए ।

   (i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{441}$ (iii) 30.232342345…

   (iv) 7.484848… (v) 11.2132435465 (vi) 0.3030030003.....

2. अकरणीय संख्याएँ और करणीय संख्याओं में अन्तर बताओ।

3. $\frac{5}{7}$ और $\frac{7}{9}$ के मध्य कितनी अकरणीय संख्याएँ है?

4. 0.7 और 0.77 के मध्य 2 अकरणीय संख्याओं को बताओ।

5. $\sqrt{5}$ का मूल्य दशमलव के तीन स्थान तक ज्ञात करो।

6. $\sqrt{7}$ का मूल्य दशमलव के 6 स्थानों तक भाग पद्धति से ज्ञात कीजिए ।

7. $\sqrt{10}$ को संख्या रेखा पर दर्शाओ।

8. 2 और 3 के मध्य 2 अकरणीय संख्याएँ बताओ।

9. सत्य या असत्य में उत्तर दीजिए जाँच भी कीजिए ।

   (i) प्रत्येक अकरणीय संख्या वास्तविक संख्या है।

   (ii) प्रत्येक करणीय संख्या वास्तविक संख्या है।

   (iii) प्रत्येक प्राकृतिक संख्या करणीय संख्या नही है।

   (iv) $\sqrt{n}$ अकरणीय नही है यदि n एक पूर्ण वर्ग है।

   (v) $\sqrt{n}$ अकरणीय है यदि n पूर्ण वर्ग ना हो।

   (vi) सभी वास्तविक संख्याएँ अकरणीय है।

SCERT TELANGANA

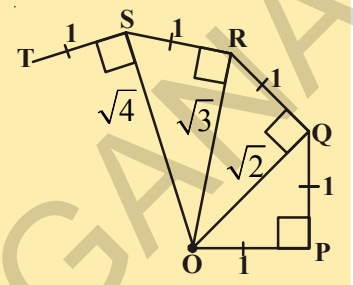
कार्य विधि

'सर्पिला वर्ग मूल' बनाना।

एक बड़ा कागज लेकर 'सर्पिला वर्ग मूल' निम्न विधि से बनाइए।

चरण 1 : 'O' बिन्दु से शुरू करो $\overline{OP}$ रेखा खण्ड 1 इकाई का बनाओ।

चरण 2 : $\overline{PQ}$ रेखा खण्ड $\overline{OP}$ पर लम्ब खींचो (OP = PQ = 1)
(चित्र देखिए)



चरण 3 : O, Q को मिलाओ ($OQ = \sqrt{2}$)

चरण 4 : $\overline{QR}$ इकाई लम्बाई लेकर $\overline{OQ}$ पर लम्बा खींचो

चरण 5 : O, R. ($OR = \sqrt{3}$) को मिलाओ

चरण 6 : एक इकाई RS का रेखा खण्ड $\overline{OR}$ पर लम्ब डालो।

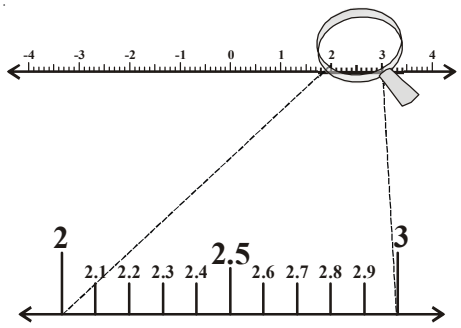
चरण 7 : इसी प्रकार क्रमागत करीए तो आपको सुन्दर सर्पिला रेखा खण्ड $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$, $\overline{TU}$ ... आदि। प्राप्त होगा रेखा खण्ड $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, $\overline{OS}$, $\overline{OT}$, $\overline{OU}$ ... आदि। $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ को दर्शाओ।

1.4 वास्तविक संख्याओं को उत्तरोत्तर संख्या रेखा पर दर्शाना

पूर्व विदित है कि वास्तविक संख्याओं को दशमलव में बताया जा सकता है।

तथा आवृत्ति दशमलव को संख्या रेखा पर कैसे दर्शाया जाता है?

यदि हमें 2.776 को संख्या रेखा पर दर्शाना हो तो आवृत्ति दशमलव 2 और 3 के बीच दर्शाओ।



चित्र (i)

SCERT TELANGANA

अब हम संख्या रेखा पर 2 और 3 के मध्य भाग को देखेंगे। यदि हम इसे 10 बराबर भागों में बाँटें तो अंकित अंक चित्र Fig.(i). 2.1, 2.2, 2.3..... स्पष्टतः देखने के लिए आवर्धन काँच (magnifying glass) लेकर 2 और 3 के मध्य भाग को देखने पर यह चित्र (i) की तरह दिखाई देगा।

अब, 2.7 और 2.8. के मध्य 2.766 रहता होगा। अब हम 2.7 और 2.8 के मध्य भाग पर अपना ध्यान केन्द्रित करेंगे और उसे 10 समान भागों में बाँटेंगे। पहला चिन्ह 2.71 और दूसरा 2.72....., फिर उसे स्पष्टतः देखने के लिए आवर्धन काँच का प्रयोग करेंगे। चित्र (ii).

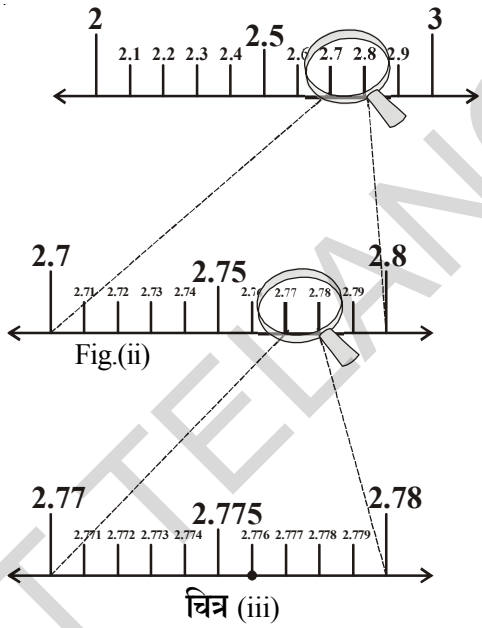


Fig.(ii)

चित्र (iii)

फिर 2.776 2.77 और 2.78 के मध्य में होगा चित्र (iii) में फिर से संख्या रेखा को 10 बराबर भागों में बाटिए।

पहला बिन्दु 2.771 दुसरा बिन्दु 2.772....., 2.776 6, छटवाँ चिन्ह होगा।

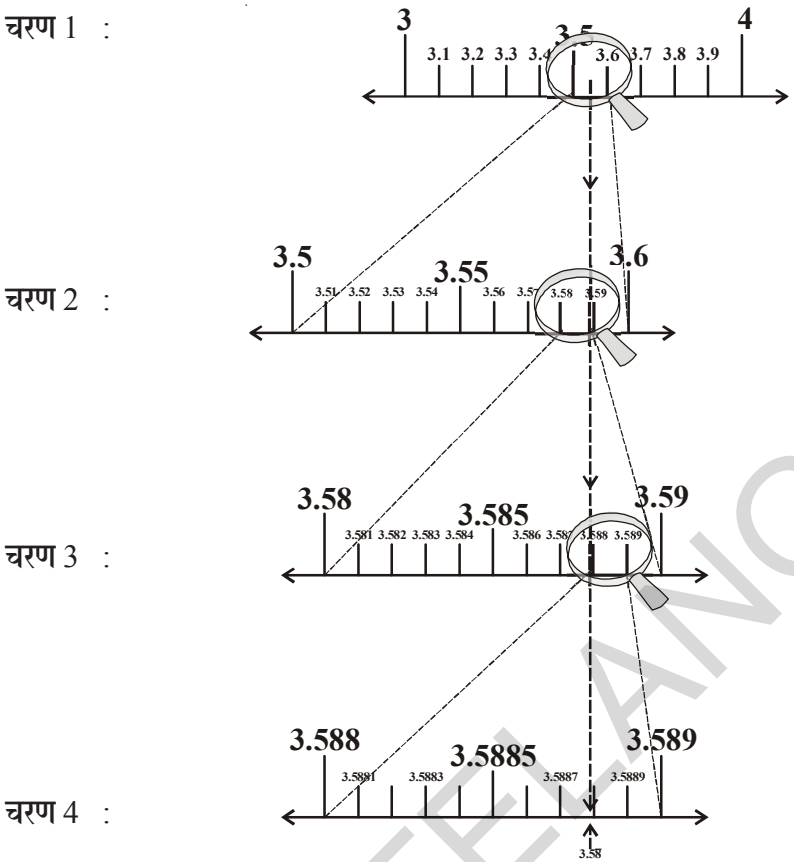
इस विधि को संख्या रेखा पर आवर्धन पद्धति की सहायता से उत्तरोत्तर (magnification) किया जायगा।

अब हम वास्तविक संख्या जो अनावर्त दशमलव को संख्या रेखा पर निम्न उदाहरण की सहायता से उत्तरोत्तर खिंचेगे ।

उदाहरण-11. $3.5\bar{8}$ को संख्या रेखा पर उत्तरोत्तर दश्मलव के 4 स्थानों तक बताओ।

हल : उत्तरोत्तर आवर्धन की सहायता से 3.5888 को संख्या रेखा पर खिंचेंगे।

SCERT TELANGANA



अभ्यास - 1.3

1. 2.874 को संख्या रेखा पर उत्तरोत्तर आवर्धन पद्धति की सहायता से बताओ।
2. $5.\overline{28}$ को संख्या रेखा पर दशमलव के 2 स्थान तक बताओ।

1.5 वास्तविक संख्याओं की क्रियाएँ

करणीय संख्याओं योग और गुणा की क्रियाओं के लिए क्रम विनिमय, साहचर्य तथा बंटन नियम लागू होते हैं। करणीय संख्याएँ योग, घटान गुणा के भीतर संवृत है। अकरणीय संख्याओं के लिए भी क्या ये नियम लागू होते है?

निम्न उदाहरण देखिए

$\left(\sqrt{3}\right)+\left(-\sqrt{3}\right)=0$. (0 एक करणीय संख्या)

$\left(\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}\right)=0$. (0 एक करणीय संख्या)

$\left(\sqrt{2}\right).\left(\sqrt{2}\right)=2$. (2 एक करणीय संख्या)

SCERT TELANGANA

$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 1$. (1 एक करणीय संख्या)

आपने क्या देखा? अकरणीय संख्याओं का योग, अन्तर, भागफल तथा गुणनफल अकरणीय संख्या नही होगी ।

अतः हम कहेंगे कि अकरणीय संख्याएँ योगफल, अन्तर, गुणा और भाग के अन्तर्गत संवृत्त नही है।

अकरणीय संख्याओं की कुछ प्रश्न हल करेंगे ।

मान लिजिए आप $3\sqrt{2}$ को $2\sqrt{2}$ से जोडना चाहते है, उसके योग को $5\sqrt{2}$ के रुप में लिखा जाता है यदि आप उसको घटाना चाहते हो तो आपको $\sqrt{2}$ प्राप्त होगा।

विचार- विमर्श किजिए

1) हसित कहता है कि, $5\sqrt{2} + 2\sqrt{7} = 7\sqrt{10}$ क्या आप इससे सहमत है?

2) $5\sqrt{2} - \sqrt{8}$ का मुल्य आप कैसे ज्ञात करोंगे?

उदाहरण-12. (i) $5\sqrt{2}$ (ii) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (iii) $21 + \sqrt{3}$ (iv) $\pi + 3$ अकरणीय संख्याएँ है या नही? जाँच कीजिए?

हल : $\sqrt{2} = 1.414...$, $\sqrt{3} = 1.732...$, $\pi = 3.1415...$

(i) $5\sqrt{2}-\sqrt{8} = 5(1.414...) = 7.070...$

(ii) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{7.070}{2} = 3.535...$ (i) से

(iii) $21 + \sqrt{3} = 21 + 1.732... = 22.732...$

(iv) $\pi + 3 = 3.1415... + 3 = 6.1415...$

> यदि q करणीय और s अकरणीय हो तो q + s, q - s, qs तथा $\frac{q}{s}$ अकरणीय संख्याएँ होंगी ।

वे सभी अकरणीय संख्याएँ है।

उदाहरण-13. $5\sqrt{3} + 7\sqrt{5}$ को $3\sqrt{5} - 7\sqrt{3}$ में से घटाओ।

हल : $(3\sqrt{5} - 7\sqrt{3}) - (5\sqrt{3} + 7\sqrt{5})$

$= 3\sqrt{5} - 7\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 7\sqrt{5}$

$= -4\sqrt{5} - 12\sqrt{3}$

$= -(4\sqrt{5} + 12\sqrt{3})$

SCERT TELANGANA

उदाहरण-14. $6\sqrt{3}$ को $13\sqrt{3}$ से गुणा करो।

हल: $6\sqrt{3} \times 13\sqrt{3} = 6 \times 13 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 78 \times 3 = 234$

वर्ग मूल के गुणों का अवलोकन करेंगे। उन्हें कई विधियों से प्रयोग किया जा सकता है।

मान लो a तथा b अ-ऋणात्मक वास्तविक संख्याएँ है।

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; if $b \neq 0$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

इन गुणों के कुछ स्थितियों का अवलोकन करेंगे ।

उदाहरण-15. निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

हल :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) = 6 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$

(ii) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 5 + 2\sqrt{10} + 2 = 7 + 2\sqrt{10}$

(iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 5 - 2 = 3$

SCERT TELANGANA

1.5.1 हर को परिमेय बनाओ

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकोगे?

क्या आप $\frac{1}{\sqrt{2}}$ का मूल्य क्या होगा?

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ का किस प्रकार मूल्य ज्ञात करोगे? $\sqrt{2} = 1.4142135.....$ आवर्त या अनावर्त नही होगा। इसे हम 1 से भाग दे सकते हैं।

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ का मूल्य ज्ञात करना आसान नही है।

हर को करणीय रूप में बदलने पर -

हर को परिमेय $\frac{1}{\sqrt{2}}$ में बदलने के लिए हर और अंश को $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर -

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{(यह } \sqrt{2} \text{ का आधा है)}$$

क्या हम $\frac{\sqrt{2}}{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शा सकते हैं? यह 0 (zero) और $\sqrt{2}$ के मध्य होगा।

नीचे दिए गए संख्याओं का अवलोकन कीजिए :

$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$. $\therefore \sqrt{2}$ ही $\sqrt{2}$ का (R.F) परिमेयकारक खण्ड है।

उसी प्रकार $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$. अतः $\sqrt{2}$ और $\sqrt{8}$ एक दूसरे के परिमेयकारक खण्ड होंगे। $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6$ आदि। $\sqrt{2}$ एक सरल परिमेयकारक खण्ड $\sqrt{18}$ है।

नोट : दो अकरणीय संख्याओं का गुणनफल करणीय संख्या होगा अतः प्रत्येक अकरणीय संख्या एक दूसरे का परिमेय कारक (R.F) खण्ड होगा।दिए गए अकरणीय संख्या के लिए वह खण्ड अद्वितीय नही होगा। दिए गए अकरणीय संख्या का परिमेयकारक खण्ड (R.F.) प्रयोग के लिए सरल होगा।

इसे हल कीजिए -

हर का परिमेय कारक खण्ड बताइए (i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

SCERT TELANGANA

उदाहरण-16. हर को परिमेय बनाइए $\frac{1}{4+\sqrt{5}}$

हल : $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$

$\frac{1}{4+\sqrt{5}}$ हर और अंश को $4-\sqrt{5}$ से गुणा करने पर

$$\frac{1}{4+\sqrt{5}} \times \frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} = \frac{4-\sqrt{5}}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{4-\sqrt{5}}{16-5} = \frac{4-\sqrt{5}}{11}$$

उदाहरण-17. हर को परिमेय बनाइए $\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$

हल : $\frac{1}{7+4\sqrt{3}} \times \frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}} = \frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2} = \frac{7-4\sqrt{3}}{49-16\times 3}$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{49-48} = 7-4\sqrt{3}$$

उदाहरण-18. सरल करो $\frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{5}}$

हल : $7+4\sqrt{3}$ का परिमेय कारक खण्ड $7-4\sqrt{3}$ तथा $2+\sqrt{5}$ का $2-\sqrt{5}$ होगा।

$$= \frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{7+4\sqrt{3}} \times \frac{7-4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{7^2-(4\sqrt{3})^2} + \frac{2-\sqrt{5}}{2^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{49-48} + \frac{2-\sqrt{5}}{(4-5)}$$

$$= \frac{7-4\sqrt{3}}{1} + \frac{2-\sqrt{5}}{(-1)}$$

$$= 7-4\sqrt{3} - 2+\sqrt{5} = 5-4\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

SCERT TELANGANA

1.5.2 वास्तविक संख्याओं में घातांक नियम

घातांक नियमों का अवलोकन

i) $a^m . a^n = a^{m+n}$ ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ iii) $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{if } m > n \\ 1 & \text{if } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{if } m < n \end{cases}$

iv) $a^m b^m = (ab)^m$ v) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ vi) $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

a^0=1 'a', 'b' और 'n' पूर्णांक संख्याएँ है $a \neq 0. b \neq 0$ आधार, a, b है।

उदाहरण के लिए

i) $7^3 . 7^{-3} = 7^{3+(-3)} = 7^0 = 1$ ii) $(2^3)^{-7} = 2^{-21} = \frac{1}{2^{21}}$

iii) $\frac{23^{-7}}{23^4} = 23^{-7-4} = 23^{-11}$ iv) $(7)^{-13} . (3)^{-13} = (7 \times 3)^{-13} = (21)^{-13}$

निम्न की संगणना कीजिए

i) $2^{\frac{2}{3}} . 2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}} . 11^{\frac{1}{17}}$

पूर्व के उदाहरण में आधार और घातांक करणीय संख्याएँ है। घातांक के नियमों का उपयोग धनात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए किया जायगा। पहले हम n^{th} का वर्ग वास्तविक संख्याओं के लिए जानेंगे।

$3^2 = 9$ तो $\sqrt{9} = 3$ (9 का वर्ग मूल 3)

$\therefore \sqrt[2]{9} = 3$

यदि $5^2 = 25$ तो $\sqrt{25} = 5 \quad \therefore \sqrt[2]{25} = 5$

$\sqrt[2]{25} = (25)^{\frac{1}{2}} = \left(5^2\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{2 \times \frac{1}{2}} = 5$

निम्न पर ध्यान दीजिए।

यदि $2^3 = 8$ तो $\sqrt[3]{8} = 2$ (8 का घन मूल 2); $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2$

$2^4 = 16$ तो $\sqrt[4]{16} = 2$ (16 का चौथा मूल 2); $\sqrt[4]{16} = (16)^{\frac{1}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 2$

SCERT TELANGANA

$2^5 = 32$ तो $\sqrt[5]{32} = 2$ (32 का पाँचवा मूल = 2); $\sqrt[5]{32} = (32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2$

$2^6 = 64$ तो $\sqrt[6]{64} = 2$ (64 का छटवाँ मूल = 2); $\sqrt[6]{64} = (64)^{\frac{1}{6}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{6}} = 2$

.....

उसी प्रकार $\mathbf{a^n = b}$ हो तो $\sqrt[n]{\mathbf{b}} = \mathbf{a}$ (b का n वा मूल $= a$); $\sqrt[n]{b} = (b)^{\frac{1}{n}} = \left(a^n\right)^{\frac{1}{n}} = a$

मान लो $\mathbf{a} > 0$ वास्तविक संख्या '**n**' एक धनात्मक पूर्णांक है।

यदि $\mathbf{b^n = a}$, कोई धनात्मक वास्तविक संख्या '**b**', के लिए, **b - a** का n वा वर्ग होगा। $\sqrt[n]{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$.

मान लो a > 0 वास्तविक संख्या p, q करणीय संख्या

i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ iv) $a^p.b^p = (ab)^p$ v) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

इन नियमों का प्रयोग पहले पूछे गए प्रश्नों को हल करने में करेंगे।

उदाहरण-19. सरल करो

i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4$ iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}}$

हल : i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

ii) $\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^4 = 5^{\frac{4}{7}}$

iii) $\frac{3^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 3^{\frac{3-5}{15}} = 3^{\frac{-2}{15}} = \frac{1}{3^{2/15}}$

iv) $7^{\frac{1}{17}}.11^{\frac{1}{17}} = (7\times11)^{\frac{1}{17}} = 77^{\frac{1}{17}}$

इसे हल कीजिए -

सरल करो :

i. $(16)^{\frac{1}{2}}$ ii. $(128)^{\frac{1}{7}}$

iii. $(343)^{\frac{1}{5}}$

SCERT TELANGANA

करणी (Surd) :

यदि 'n' एक धनात्मक पूर्णांक जो कि 1 से बड़ा है **a** एक **n** वे घातांक की धनात्मक करणीय संख्या $\sqrt[n]{a}$ (or) $a^{1/n}$ उसे **n** क्रम वाली करणी कहेंगे। साधारणतः **n** वा वर्ग **a** हो तो उसे करणी या (radical) कहेंगे। **a** को radical $\sqrt[n]{\ }$ यह radical का चिन्ह होगा। **n** को radical का घातांक कहते है।

करणी के उदाहरण

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{9}$, ... आदि।

करणी के प्रकार

घातांक रूप $a^{\frac{1}{n}}$

Radical रूप $\sqrt[n]{a}$

वास्तविक संख्या $\sqrt{7}$. इसे $7^{\frac{1}{2}}$ रूप में भी लिखा जा सकता है। 7 किसी संख्या का वर्ग नही है $\therefore \sqrt{7}$ को करणी कहेंगे।

वास्तविक संख्या $\sqrt[3]{8}$. 8, 2 का धन है।

$\therefore \sqrt[3]{8}$ करणी नही होगा।

वास्तविक संख्या $\sqrt{\sqrt{2}}$. $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$. यह संख्या एक करणी है।

इसे हल कीजिए -

1. निम्न करणी को घातांक रूप में लिखिए।

i. $\sqrt{2}$ ii. $\sqrt[3]{9}$ iii. $\sqrt[5]{20}$ iv $\sqrt[17]{19}$

2. करणी को Radical रूप में लिखिए

i. $5^{\frac{1}{7}}$ ii. $17^{\frac{1}{6}}$ iii. $5^{\frac{2}{5}}$ iv $142^{\frac{1}{2}}$

अभ्यास - 1.4

1. सरल कीजिए :

i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

2. निम्न को करणीय या अकरणीय है बताइए

i) $5-\sqrt{3}$ ii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ iii) $\left(\sqrt{2}-2\right)^2$

SCERT TELANGANA

iv) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$ v) 2π vi) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ vii) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$

3. निम्न समीकरणों में x, y, z आदि चर राशी का मूल्य करणीय या अकरणीय है बताओ।

i) $x^2 = 7$ ii) $y^2 = 16$ iii) $z^2 = 0.02$

iv) $u^2 = \frac{17}{4}$ v) $w^2 = 27$ vi) $t^4 = 256$

4. वृत्त की परिधि और व्यास का अनुपात $\frac{c}{d} = \pi$ π को हम अकरणीय संख्या कहते हैं क्यों?

5. हर को परिमेय बनाइए।

i) $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ iii) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ iv) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6. निम्न में प्रत्येक को परिमेय बनाइए।

i) $\frac{6-4\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}$ ii) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ iii) $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ iv) $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{7}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

7. $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$ का मूल्य दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात करो। ($\sqrt{2} = 1.414$ तथा $\sqrt{5} = 2.236$)

8. ज्ञात करो :

i) $64^{\frac{1}{6}}$ ii) $32^{\frac{1}{5}}$ iii) $625^{\frac{1}{4}}$

iv) $16^{\frac{3}{2}}$ v) $243^{\frac{2}{5}}$ vi) $(46656)^{\frac{-1}{6}}$

9. सरल करो : $\sqrt[4]{81} - 8\sqrt[3]{343} + 15\sqrt[5]{32} + \sqrt{225}$

10. यदि 'a' और 'b' करणीय संख्याएँ हो तो प्रत्येक समीकरण के लिए a और b का मूल्य ज्ञात करो।

i) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = a + b\sqrt{6}$ ii) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}} = a - b\sqrt{15}$

SCERT TELANGANA

हमने क्या सीखा?

इस अध्याय में निम्न लिखित अंशों के बारे में चर्चा की गयी।

1. एक संख्या जो $\frac{p}{q}$ रूप में लिखी गई p तथा q पूर्णांक संख्याएँ $q \neq 0$ हो तो उन्हें करणीय संख्याएँ कहते हैं।

2. जो संख्या $\frac{p}{q}$ रूप में न लिखी जाए p, q पूर्णांक संख्याएँ $q \neq 0$ उन्हें अकरणीय संख्याएँ कहते है।

3. करणीय संख्याओं का दशमलव विस्तार आवर्त या अनावर्त होगा।

4. अकरणीय संख्याओं का दशमलव विस्तार अनन्त या आवर्त होगा।

5. संख्या रेखा पर का प्रत्येक बिन्दु अद्वितीय वास्तविक संख्या होगी।

6. करणीय और अकरणीय संख्याओं का समूह वास्तविक संख्या कहलाता है।

7. यदि q करणीय और s अकरणीय हो तो q+s, q-s, qs तथा $\frac{q}{s}$ अकरणीय होंगे।

8. यदि n एक प्राकृतिक संख्या (पूर्ण वर्ग ना हो) $\sqrt{n}$ - को अकरणीय संख्या कहेंगे।

9. निम्न धनात्मक वास्तविक संख्याओं के लिए समरूपता a और b

   i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

   iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$ iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$

   v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

10. हर को परिमेय बनाने के लिए $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$, को $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ से गुणा करना चाहिए, जहाँ a, b पूर्णांक है।

11. मान लो $a > 0, b > 0$ वास्तविक संख्या है। p और q करणीय संख्याएँ

   i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ ii) $(a^p)^q = a^{pq}$ iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

   iv) $a^p.b^p = (ab)^p$

12. 'n' एक धनात्मक पूर्णांक है। जो 1 से बड़ी होगी तथा 'a' धनात्मक पूर्णांक संख्या हो तो n^{th} घातांक कोई करणीय संख्या न हो तो $\sqrt[n]{a}$ या $a^{\frac{1}{n}}$ को n वे क्रम की करणी कहते हैं।

SCERT TELANGANA