கணிதம்

வகுப்பு VII

பகுதி - 1

Mathematics
Part - 1
Tamil Medium

கேரள அரசு
கல்வித்துறை

தயாரிப்பு

மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்(SCERT), கேரளம்
2016

தேசிய கீதம்

ஜன கண மன அதிநாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
பஞ்சாப சிந்து குஜராத மராட்டா
திராவிட உத்கல பங்கா
விந்திய ஹிமாசல யமுனா கங்கா
உச்சல ஜலதி தரங்கா
தவ சுப நாமே ஜாகே
தவ சுப ஆசிஸ மாகே
காகே தவ ஜய காதா
ஜன கண மங்கள தாயக ஜய ஹே
பாரத பாக்ய விதாதா
ஜய ஹே! ஜய ஹே! ஜய ஹே!
ஜய ஜய ஜய ஜய ஹே!

– மகாகவி இரவீந்திரநாத் தாகூர்

உறுதிமொழி

இந்தியா எனது நாடு. இந்தியர் அனைவரும் எனது உடன் பிறந்தோர்.

எனது நாட்டை நான் உயிரினும் மேலாக மதிக்கிறேன். அதன் வளம் வாய்ந்த பல்வகைப் பரம்பரைப் புகழில் நான் பெருமை கொள்கிறேன். அதற்குத்தக நான் என்றும் நடந்துகொள்வேன்.

என் பெற்றோர், ஆசிரியர், மூத்தோர் இவர்களை நான் நன்கு மதிப்பேன்.

எல்லாருடனும் நான் பண்புடன் பழகுவேன். எனது நாட்டினிடமும் நாட்டு மக்களிடமும் பக்தியுடன் இருப்பேன் என உறுதி கூறுகிறேன். அவர்களின் நலத்திலும் வளத்திலும் தான் எனது இன்பமும் அடங்கியிருக்கிறது.

Prepared by **:**

State Council of Educational Research and Training (SCERT)

Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in

e-mail : scertkerala@gmail.com

Phone : 0471 - 2341883, Fax : 0471 - 2341869

Typesetting and Layout : SCERT

First Edition : 2014, Reprint : 2016

Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30

© Department of Education, Government of Kerala

அன்பான குழந்தைகளே,

நாம் கணிதத்தில் ஏராளம் கருத்துகளைப் புரிந்து கொண்டோம். இனி அதன் உயர்ந்த நிலைக்குச் செல்கிறோம். எண் கணிதம், வடிவியல் கணிதம், இயற்கணிதம் ஆகியவற்றின் புதிய நோக்கங்களை அறிவதற்கும் இத்துறையில் புதிய கண்டுபிடிப்புகளைத் தெரிந்துகொள்வதற்கும் இப்பாடநூல் உதவியாக அமையும்.

தன்னம்பிக்கையுடன் முன்னோக்கிச் செல்வோம்.

வாழ்த்துகளுடன்

முனைவர். பி. ஏ. பாத்திமா
இயக்குநர்
மாநிலக் கல்வியாராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்
திருவனந்தபுரம்

Text book Committee

Anilkumar.M.K.
HSA, SKMJHSS, Wayanad.

Arunlal.M.J
UPSA, AUPS, Eramangalam, Kozhikode.

Kunjabdhullah.M
UPSA, Muyipothu, MUPS, Kozhikode.

K.G.Thulaseedharan pillai
PD Teacher, GHSS, Karucon, Kollam.

Bala Gangadharan.V.K
GM HSS, Calicut University Campus, Malappuram.

Manikandan.K.O.V
UPSA, Pattiamma AUPS, Kannur.

Rajesh.K.P
Lect., DIET, Kannur.

R.Ramanujam
HSST, MNKMGHSS, Pulappatta, Palakad.

Sunil Kumar.V.P
HSA, Janath HSS, Thembammoodu. Thiruvananthapuram.

Experts

Dr.E.Krishnan
Professor (Rtd), University College, Thiruvananthapuram.

Dr. Vijayakumar.A
Professor (Rtd), Kochi University, Kochi.

Artist

Dhanesan.M.V
AVSGHSS, Harivallor, Kannur.

Accedamic Co-ordinator

Dr.Lidsonraj.J
Research Officer, SCERT.

Tamil Version

S.C. Edwin Daniel
Headmaster, GHS, Pampanar. Idukki.

Kumaradhas.T
Headmaster (Rtd), GHS, Kozhippara. Palakkad.

Dr. K.Manickaraj
Assistant Professor in Tamil, University College. Thiruvananthapuram.

Academic Co-ordinator

Dr. Sahaya Dhas D, Research Officer, SCERT.

State Council of Education Research and Training (SCERT)
Vidhya Bhavan, Poojapura. Thiruvananthapuram. 695012.

உள்ளடக்கம்

1. கோணங்கள் இணையும்போது 7
2. இணை கோடுகள் 13
3. மாறும் எண்களும் மாறாத உறவுகளும் 35
4. மீண்டும் மீண்டும் பெருக்கல் 49
5. முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 67
6. வர்க்கமும் வர்க்கமூலமும் 79
7. வேகத்தின் கணிதம் 89

இப்புத்தகத்தின் உபயோகத்திற்காக சில அடையாளங்கள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன.

ICT வாய்ப்புகள்

கணக்கு செய்து பார்ப்போம்

செயல்திட்டம்

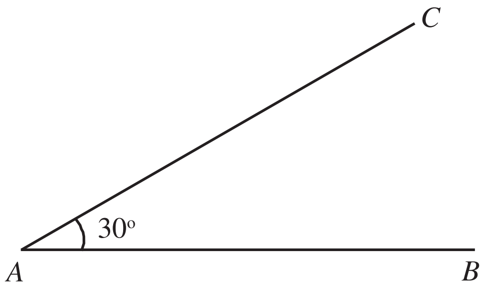
மீள்பார்வை

1

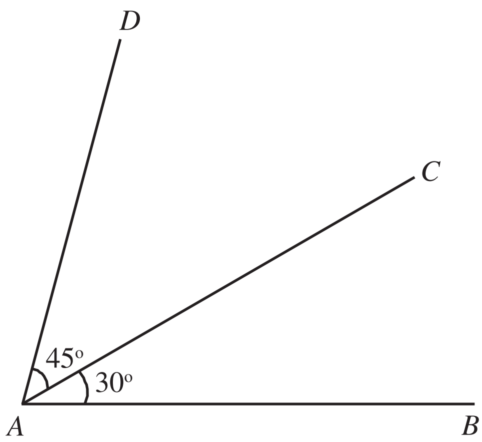
கோணங்கள் இணையும்போது

கோணங்கள் இணையும் போது

இதுபோல் ஒரு கோணம் வரையலாமா?



இதற்கு மேலே மேலும் ஒரு கோணம் வரையவும்.



இப்போது A யில் எத்தனை கோணங்கள் உள்ளன?

$\angle CAB$ = ...

$\angle DAC$ = ...

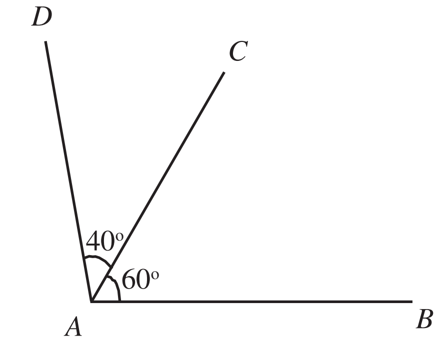
மேலும் ஒரு பெரிய கோணம் உண்டல்லவா. அதன் அளவு எவ்வளவு?

$\angle DAB$ = ...

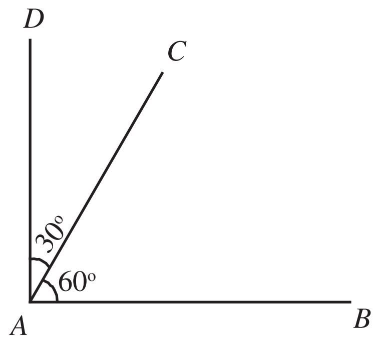
எவ்வாறு கணக்கிடப்பட்டது?

$\angle DAB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$

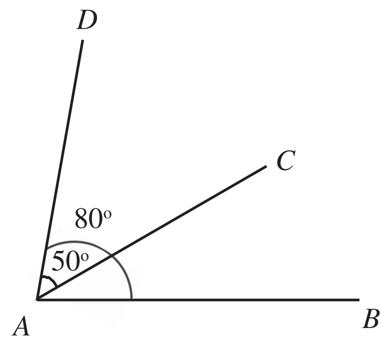
கீழே தரப்பட்டுள்ள படங்களில் இரண்டு கோணங்கள் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. மூன்றாவது கோணத்தைத் தொகையாகவோ, வித்தியாசமாகவோ எழுதி, அதைக் கணக்கிடவும்.



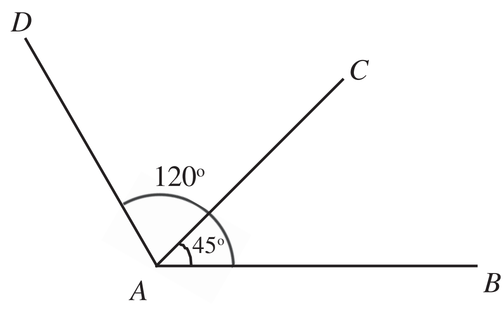
$\angle DAB$ = ... + ... = ...



$\angle DAB$ = ... + ... = ...



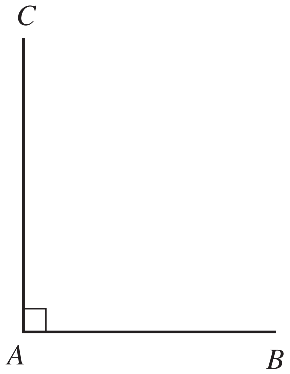
$\angle CAB$ = ... − .... = ...



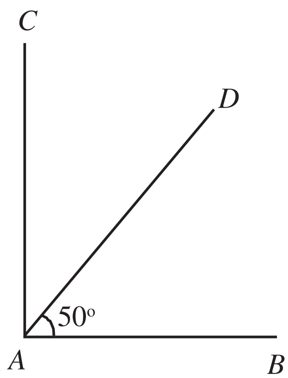
$\angle DAC$ = ... − .... = ...

இரண்டு பக்கங்கள்

கீழே காண்பது போல் ஒரு கோடும் அதற்கொரு செங்குத்துக் கோடும் வரையவும்.



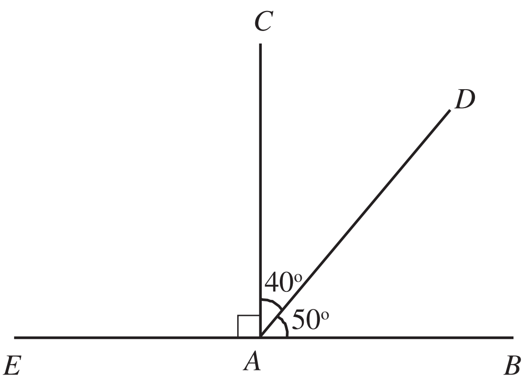
மேலும் அதற்குள் வேறொரு கோணம் கீழே காண்பது போல் வரையவும்.



$\angle DAC$ யின் அளவு எவ்வளவு?

$\angle DAC$ = ... − .... = ...

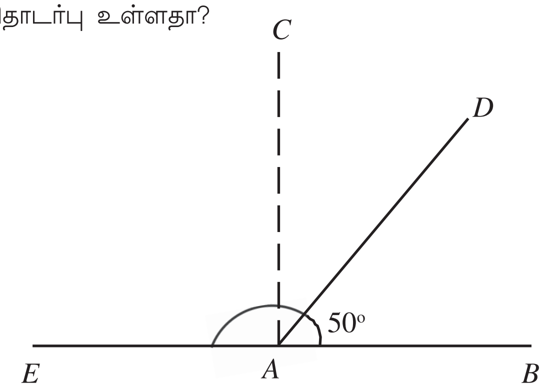
மேலும் AB யைச் சற்று இடது பக்கம் நீட்டினால்?



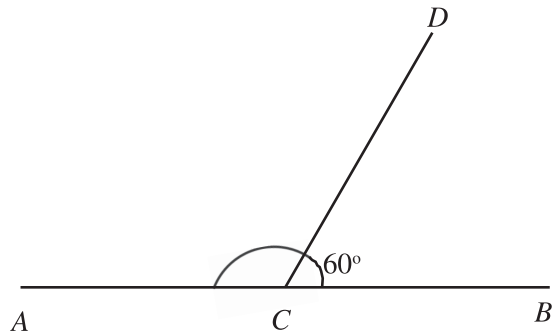
$\angle DAE$ இன் அளவு எவ்வளவு?

$\angle DAE$ = ... + ... = ...

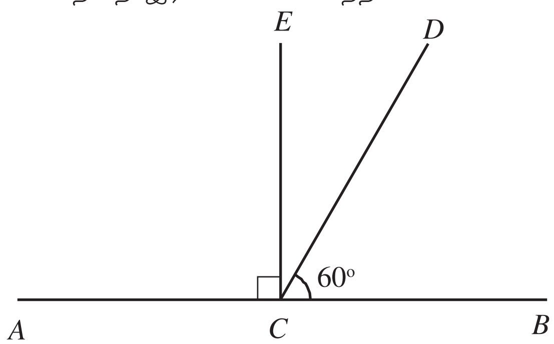
$\angle DAB$ க்கும் $\angle DAE$ க்கும் இடையில் ஏதேனும் தொடர்பு உள்ளதா?



மேலும் கீழே காணும் படத்தைப் பார்க்கவும்.



$\angle DCA$ யின் அளவைக் கணக்கிடலாமா? $\angle C$ இன் வழியாக ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைந்து இந்தக் கோணத்தை இரண்டாகப் பிரித்தால்?

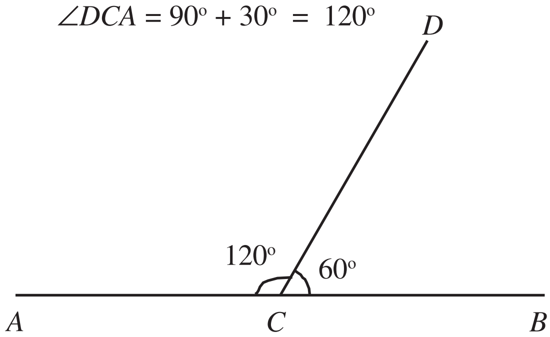


$\angle DCE$ இன் அளவு எவ்வளவு?

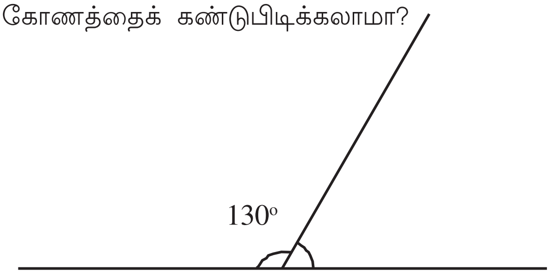
அப்படியானால் $\angle DCA$ இன் அளவு எவ்வளவு?

$\angle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

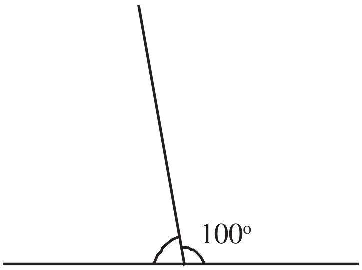
$\angle DCA = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$

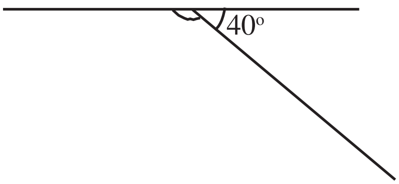


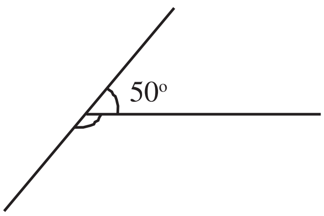
இதுபோல் இந்தப் படத்தில் வலது பக்கம் உள்ள கோணத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?

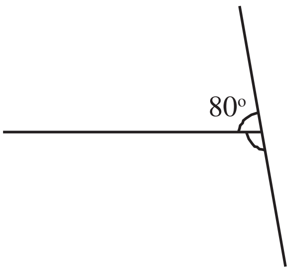


கீழே தரப்பட்டுள்ள படங்களில் இரண்டு கோடுகள் சேர்ந்து இரண்டு பக்கங்களிலும் உருவாகும் கோணங்கள் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. அவற்றில் ஒன்றின் அளவும் தரப்பட்டுள்ளது. மற்ற கோணத்தின் அளவைக் கணக்கிட்டு படத்தில் எழுதவும்.









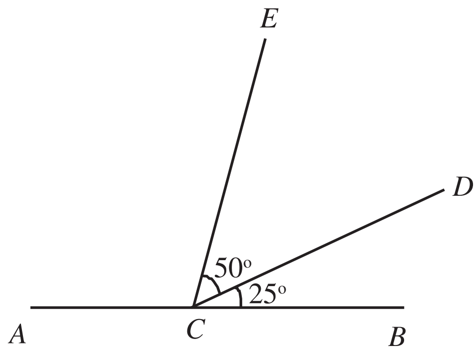
இவற்றில் காண்பது என்ன?

ஒருகோட்டில் வேறொரு கோடு வரைந்தால் இரு பக்கங்களிலும் உருவாகும் இரு கோணங்களின் தொகை 180° ஆகும்.

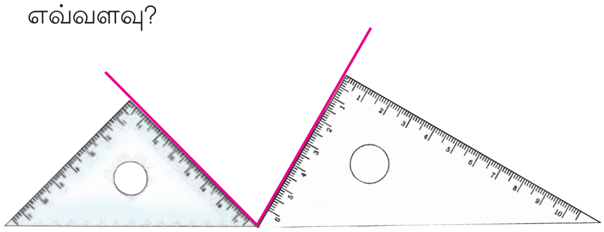
இவ்வாறு உருவாகும் ஒரு ஜோடி கோணங்களை வரைஜோடிகள் (linear pair) எனக் கூறுவர்.

கண்டுபிடிக்கலாமா?

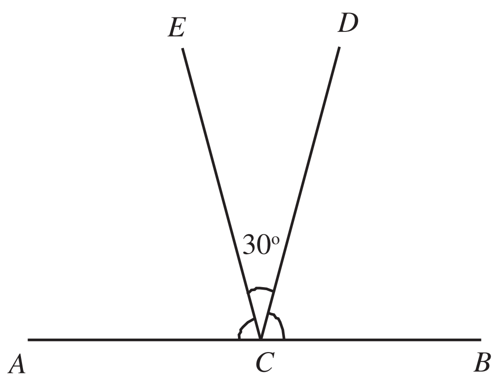
- கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $\angle ACE$ எவ்வளவு?



- படத்தில் கோடுகளுக்கிடையில் உள்ள கோணம் எவ்வளவு?

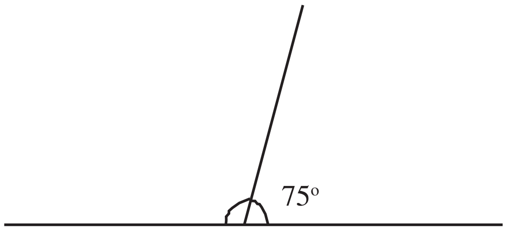


- கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில் $\angle ACD = \angle BCE$ ஆகும். இவற்றின் அளவுகளைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

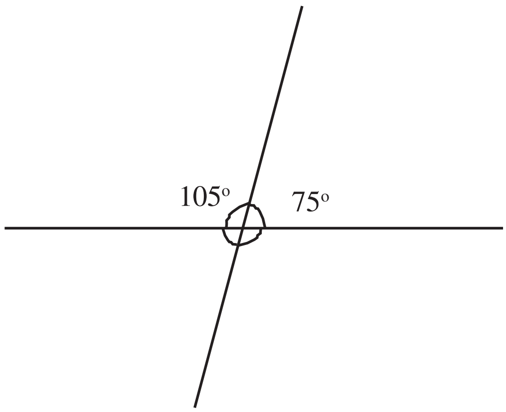


குறுக்காகச் சென்றால்

கீழே காணப்படும் படத்தில் இடது பக்கத்தில் உள்ள கோணத்தின் அளவு எவ்வளவு?



மேல்பக்கம் உள்ள கோட்டை கீழ்ப்பக்கம் நீட்டினால்?

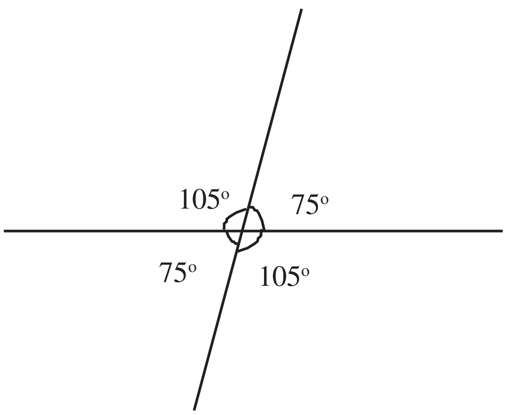


இப்போது அடிப்பக்கத்தில் இரண்டு கோணங்கள் அதிகம் ஆயின. அவற்றின் அளவுகள் எவ்வளவு?

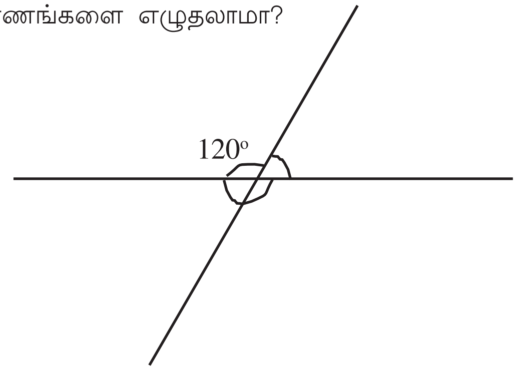
சாய்ந்த கோட்டின் இடது பக்கம் மேலேயும் கீழேயும் உள்ள கோணங்கள் வரைஜோடிகள் அல்லவா?

அதுபோல் வலதுபக்கத்திலும் ஒரு வரைஜோடி இருக்கிறது.

இனி எல்லா கோணங்களையும் கூறலாமா?



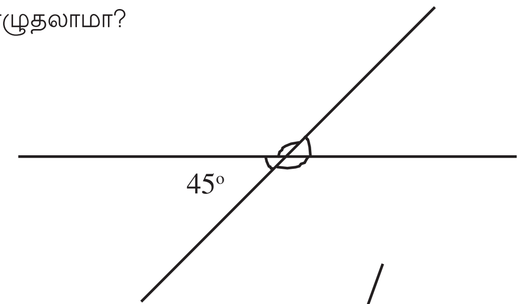
கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்திலும் இரண்டு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று வெட்டிச் செல்கின்றன அல்லவா. படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள மற்ற மூன்று கோணங்களை எழுதலாமா?

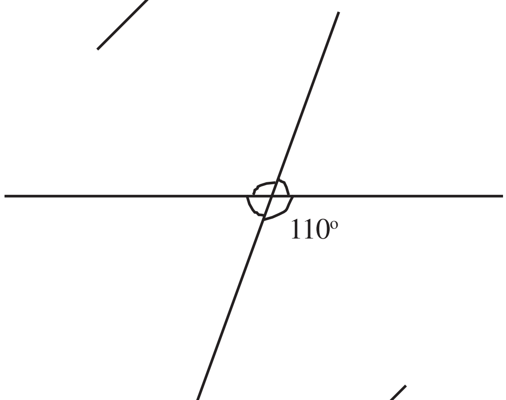


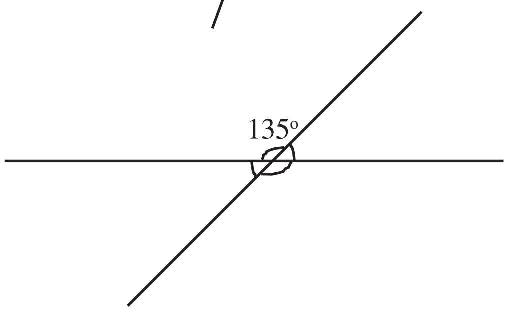
இவற்றில் காண்பது என்ன?

> ஒரு கோட்டிற்கு குறுக்காக வேறொரு கோடு சென்றால் உருவாகும் நான்கு கோணங்களில் அடுத்தடுத்து உள்ள இருகோணங்களின் தொகை 180° ஆகும். எதிர்கோணங்கள் சமமாகும்.

மேலும் கீழே தரப்பட்டுள்ள படங்களில் அடையாளப் படுத்தப்பட்டுள்ள கோணங்களைக் கணக்கிட்டு எழுதலாமா?

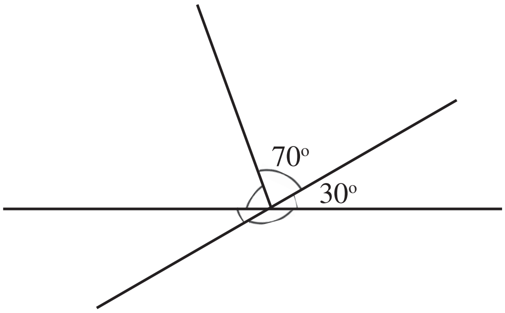


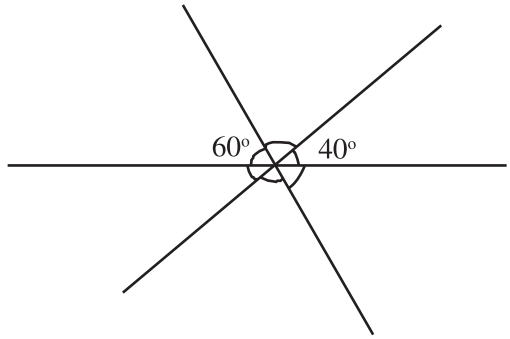


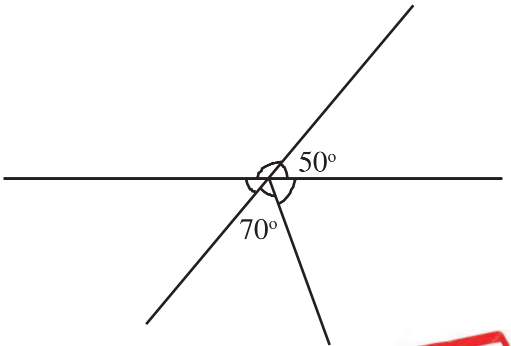


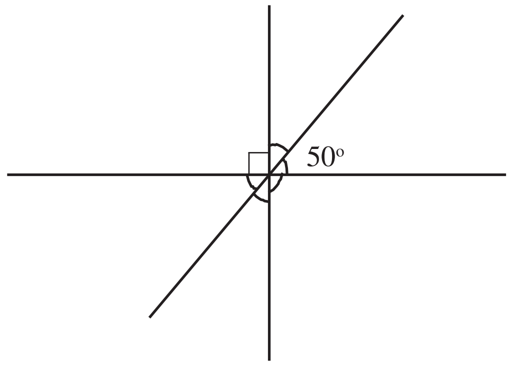
செய்து பார்ப்போம்

ஒவ்வொரு படத்திலும் சில கோணங்களின் அளவுகள் தரப்பட்டுள்ளன. பிற கோணங்களின் அளவுகளைக் கண்டுபிடித்து எழுதுக.







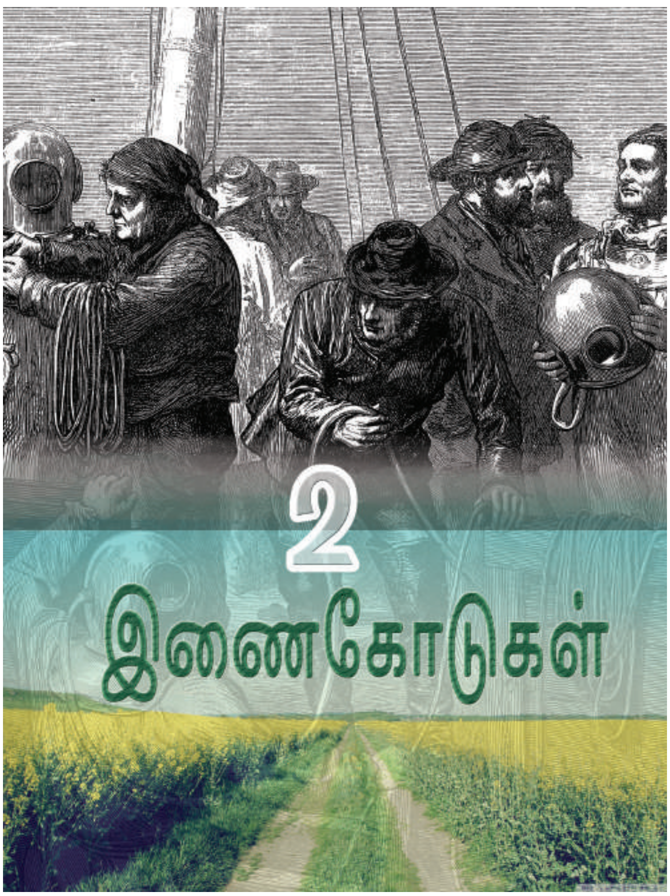


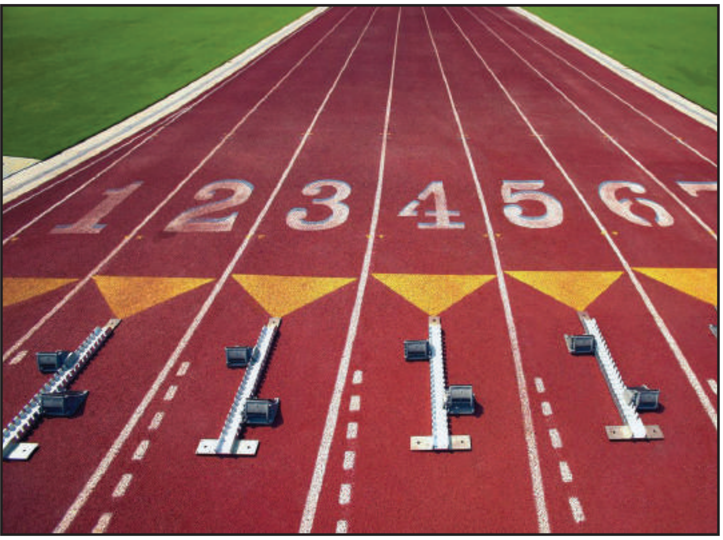
மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்படுத்த வேண்டியுள்ளது
• வடிவியல் தொடர்பான கருத்துகளைப் புதிய சூழ்நிலைகளில் பயன்படுத்துதல்.			
• கோணங்களுடன் தொடர்புடைய கருத்து களில் இருந்து வரைஜோடிகள், எதிர் கோணங்கள் ஆகிய கருத்துகள் வளர்ச்சி யடைகின்றன.			
• கோணங்களுடன் தொடர்புடைய கருத்து களைப் பயன்படுத்தி பிரச்சனைகளுக்குத் தீர்வு காணல்.			

2

இணைகோடுகள்

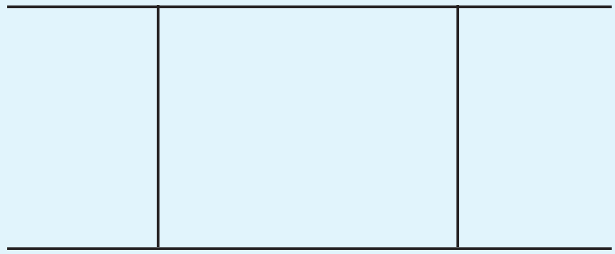


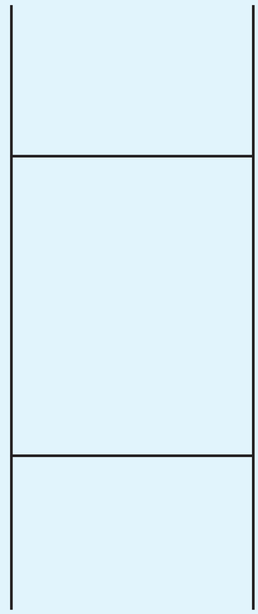


இரண்டு வகையான கோடுகள்

எந்த இரண்டு புள்ளிகளை இணைத்தாலும் ஒரு கோடு கிடைக்கும். மாறாக எந்த இரண்டு கோடுகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்குமா?

ஒரு செவ்வகத்தின் ஒரு ஜோடி எதிர்பக்கங்களை நீட்டினால்?

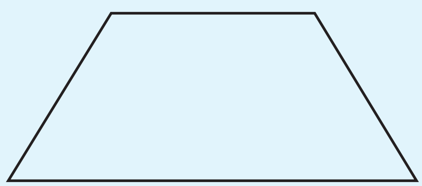




எவ்வளவு நீட்டினாலும் சந்திக்குமா?

ஏன்?

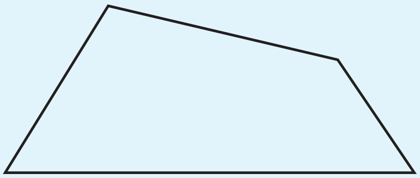
கீழே தரப்பட்டுள்ள நாற்கரத்தைப் பார்க்கவும்.



மேலேயும் கீழேயும் உள்ள பக்கங்களை நீட்டினால் சந்திக்குமா?

இடப்பக்கமும் வலப்பக்கமும் உள்ள பக்கங்களை நீட்டினால்?

நாற்கரம் இவ்வாறு ஆனால்?



ஏதேனும் எதிர்பக்கங்களை நீட்டினால் சந்திக்குமா?

ஏன்?

ஒரே இடைவெளியில் செல்லும் ஒரு போதும் சந்திக்காத கோடுகளை இணைகோடுகள் (parallel lines) எனக் கூறுவர்.

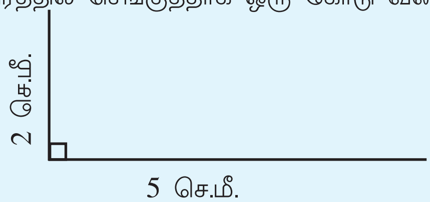
ஒரே இடைவெளி

செவ்வகம் வரையத் தெரியும் அல்லவா.

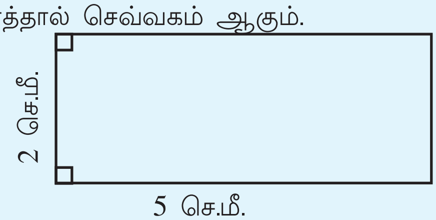
5 சென்டி மீட்டர் நீளமும் 2 சென்டி மீட்டர் அகலமும் உள்ள செவ்வகம் வரைவது எவ்வாறு?

பலமுறைகளில் வரையலாம் அல்லவா.

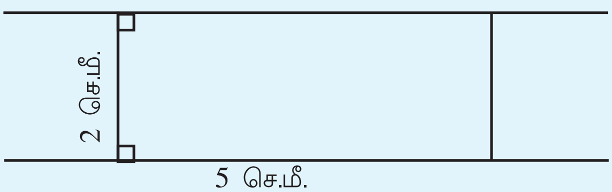
- முதலில் 5 சென்டிமீட்டர் நீளத்தில் கிடைமட்டமாக ஒரு கோடு வரைந்து அதன் ஒரு முனையில் 2 சென்டிமீட்டர் உயரத்தில் செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரையவும்.



இனி செங்குத்தாக உள்ள கோட்டின் முனையில் இருந்து 5 செமீ நீளத்தில் செங்குத்துக்கோடு வரையவும். இந்தக் கோட்டின் முனையையும் முதல் கோட்டின் முனையையும் இணைத்தால் செவ்வகம் ஆகும்.

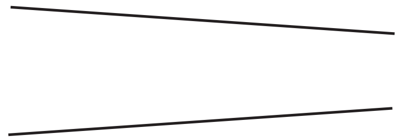


இதன் மேலேயும் கீழேயும் உள்ள பக்கங்களை நீட்டினால் 2 சென்டி மீட்டர் இடைவெளியுள்ள இணைகோடுகள் கிடைக்கும் அல்லவா.



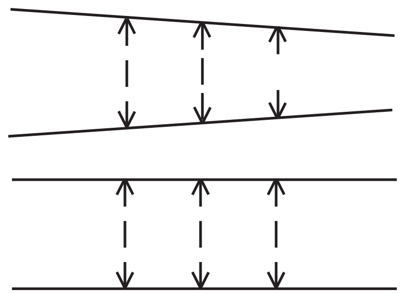
இடைவெளி

இந்தக் கோடுகளை நீட்டினால் சந்திக்குமா?



இவ்வாறு ஆனால்?

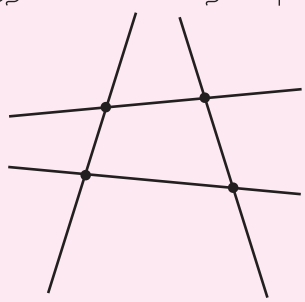
இரண்டு படங்களிலும் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள இடைவெளியைப் பார்க்கவும்.



அப்படியானால் இணை கோடுகளுக்கிடையே உள்ள இடைவெளி பற்றி என்ன கூறலாம்?

இணை என்ற சொல்லின் பொருள் சமஇடைவெளிதானே. அதாவது, மாறாத தூரம் ஆகும்.

ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு நாற்கரம் வரையவும். Line through two points கருவியைப் பயன்படுத்தி நாற்கரத்தின் பக்கங்களை நீட்டவும்.



பக்கங்கள் சந்திக்கின்றனவா?

Move கருவியைப் பயன்படுத்தி நாற்கரத்தின் உச்சிகளை மாற்றிப் பார்க்கவும். பக்கங்களை நீட்டிய கோடுகள் சந்திக்காமல் போவது எப்போது?

செங்குத்தும் இணையும்

கீழ்க்காணும் படத்தைப் பார்க்கவும்.

கிடைமட்டமான கோட்டிற்குச் செங்குத்தான கோடுகளைப் பார்க்கவும்.

அவை இணையா?

இனி கீழே காணும் படத்தைப் பார்க்கவும்.

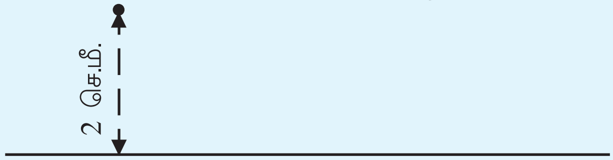
கிடைமட்டமான கோட்டிற்கு செங்குத்துக் கோடு வரைந்து, செங்குத்தான அந்தக் கோட்டிற்கு மீண்டும் செங்குத்துக்கோடு வரையப்பட்டுள்ளது.

கிடைமட்டமான கோடுகள் இணையாகுமா?

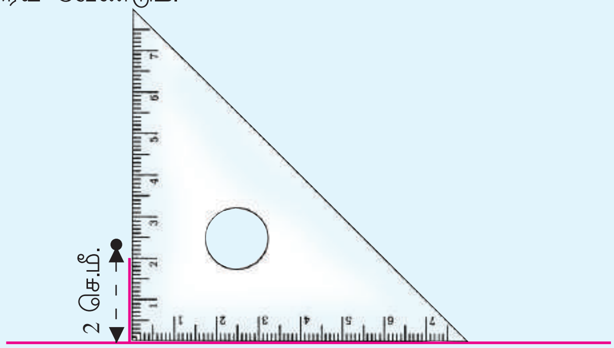
ஒரு கோட்டிற்கு செங்குத்தாகவும் இணையாகவும் கோடுகள் வரைய ஜியோஜிப்ராவில் தனித்தனிக் கருவிகள் உண்டு. முதலில் ஒரு கோடுவரைந்து அதில் ஒரு புள்ளி வைக்கவும். Perpendicular line கருவியைப் பயன்படுத்தி கோட்டிலும் புள்ளியிலும் கிளிக் செய்தால் இந்தப்புள்ளி வழியாகக் கடந்து செல்லும் கோட்டிற்கு செங்குத்தான ஒரு கோடு கிடைக்கும். புள்ளியின் இடம் கோட்டின் வெளியில் இருந்தாலும் இவ்வாறு வரையலாம். இவ்வாறு வரைந்த செங்குத்துக்கோட்டிற்கு மீண்டும் ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைந்து பார்க்கவும்.

ஒரு கோட்டிற்கு இணையாக வேறொரு கோடு வரைய Parallel line கருவி பயன்படுத்தப்படுகிறது. கோட்டிற்கு வெளியில் ஒரு புள்ளி வைக்கவும். கருவியைப் பயன்படுத்தி கோட்டிலும் புள்ளியிலும் கிளிக் செய்யவும். இணையாக ஒரு கோடு கிடைக்கும். Move கருவியின் உதவியுடன் புள்ளியின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். புள்ளியின் இடம் முதலில் வரைந்த கோட்டிலாகும் போது என்ன நிகழ்கிறது?

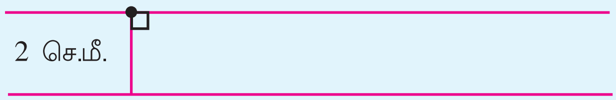
ஒரு கோடு வரைந்து அதிலிருந்து 2 சென்டிமீட்டர் தூரத்தில் ஒரு புள்ளி அடையாளப்படுத்தினால் அந்தப் புள்ளி வழியாக கோட்டிற்கு இணையான கோடு வரைவது எப்படி?



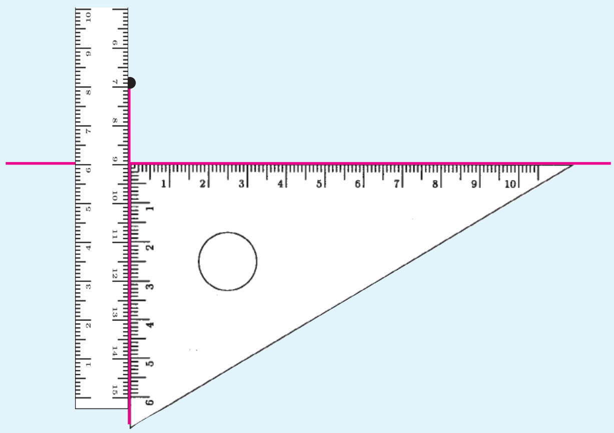
முதலில் புள்ளி வழியாக கோட்டிற்கு செங்குத்துக்கோடு வரைய வேண்டும்.



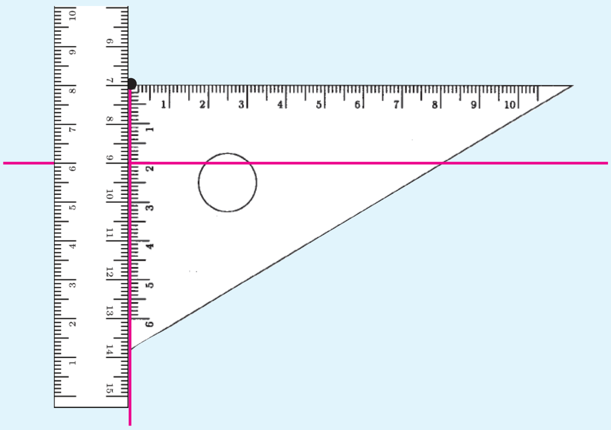
பின்னர் இந்த செங்குத்துக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைய வேண்டும்.



முதல் கோட்டிற்கு செங்குத்துக்கோடு வரைவதற்குப் பதிலாக அளவுகோலைப் பிடித்தாலும் போதும்.



இனி மட்டமானியை மேல்நோக்கி நகர்த்தி மட்டமானியின் மூலையை வேறொரு புள்ளியில் கொண்டு சென்றால் இணை கோடு வரையலாம்.



இனி புள்ளி கோட்டின் கீழே இருந்தால்,

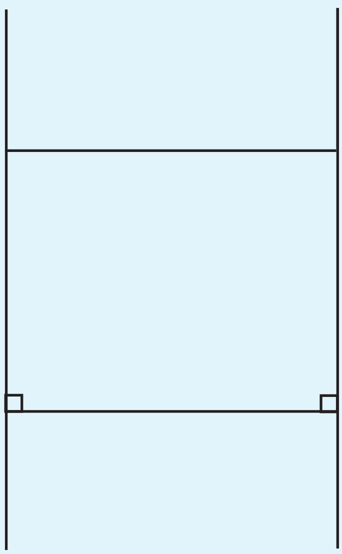
இங்கு பார்த்த செயல்கள் எவை?

எந்த கோட்டிற்கும் அதில் இல்லாத ஒரு புள்ளி வழியாக இணைகோடு வரையலாம்.

ஒரு கோட்டிற்கு அதில் இல்லாத ஒரு புள்ளி வழியாக எத்தனை இணை கோடுகள் வரையலாம்?

ஒரே திசை

செவ்வகத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் இணையானவை.

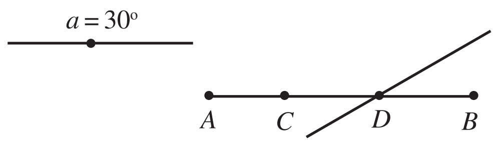


இதைவேறொரு முறையில் கூறலாம்.

ஒரு கோட்டிற்கு இரண்டு செங்குத்துக்கோடுகள் வரைந்தால் அவை இணையாகும்.

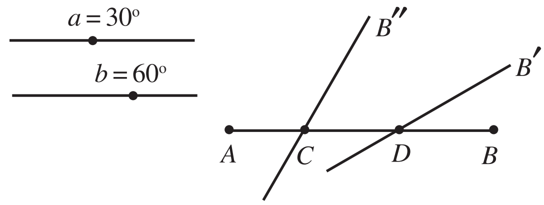
ஜியோஜிப்ராவில் AB என்ற கோடு வரைந்து அதில் C, D என்ற இரண்டு புள்ளிகள் அடையாளப்படுத்தவும்

இனி Slider கருவியை எடுத்து கிளிக் செய்யும் போது கிடைக்கும் சாளரத்தில் Angle என்பதற்கு நேராக உள்ள சிறிய வட்டத்தில் கிளிக் செய்யவும். Name ஆக a எனத் தட்டச்சு செய்யவும். தொடர்ந்து Applyஇல் click செய்க. Angle with given size கருவியைப் பயன்படுத்தி B யிலும் பிறகு D யிலும் கிளிக் செய்யவும். இப்போது தோன்றும் சாளரத்தில் Angle என்பதற்கு கீழே a என தட்டச்சு செய்து OK இல் கிளிக் செய்யவும். இப்போது B' என்ற பெயரில் ஒரு புள்ளி கிடைக்கும். D, B' ஆகிய புள்ளிகளை இணைத்து ஒரு கோடு



வரையவும்.

இனி b என்ற பெயரில் ஒரு சிலைடர் உருவாக்கவும். Angle with given size கருவியைப் பயன்படுத்தி B,C இவற்றில் வரிசையாக கிளிக் செய்யும் போது தோன்றும் சாளரத்தில் Angle என்பதில் b என்று பெயரளித்து OK இல் கிளிக் செய்யவும். புதிதாக கிடைக்கும் B'' என்ற



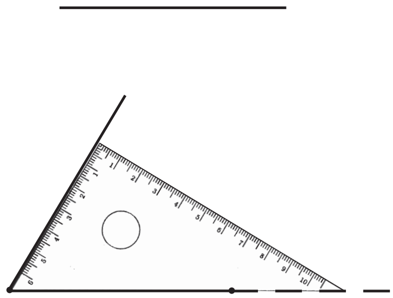
புள்ளியை C யுடன் இணைத்து வரையவும்.

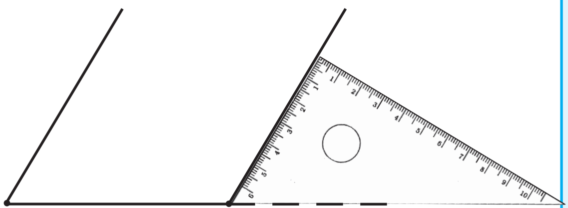
Move கருவியைப் பயன்படுத்தி a, b இவற்றின் மதிப்புக்களை மாற்றிப் பார்க்கவும். கோடுகளுக்கு என்ன நேரிடும்? அவை எப்போது சந்திக்காமல் இருக்கும்?

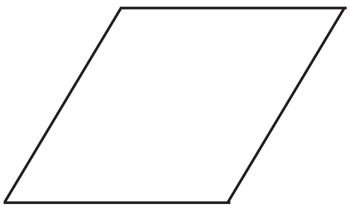
ஒரு சிலைடர் மட்டும் அமைத்து C யிலும் D யிலும் ஒரு கோணம் வரும்படி இந்தச் செயல் பாட்டைச் செய்து பார்க்கவும்.

செவ்வகம் இல்லையெனில்

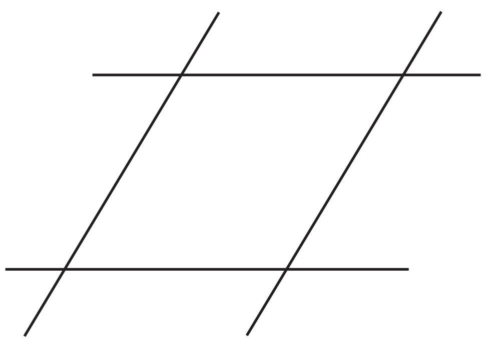
மட்டமானியைப் பயன்படுத்தி செவ்வகம் வரையத் தெரியுமல்லவா. செங்குத்து மூலைக்குப் பதில் வேறொரு மூலையைப் பயன்படுத்தி வரைந்தால்?

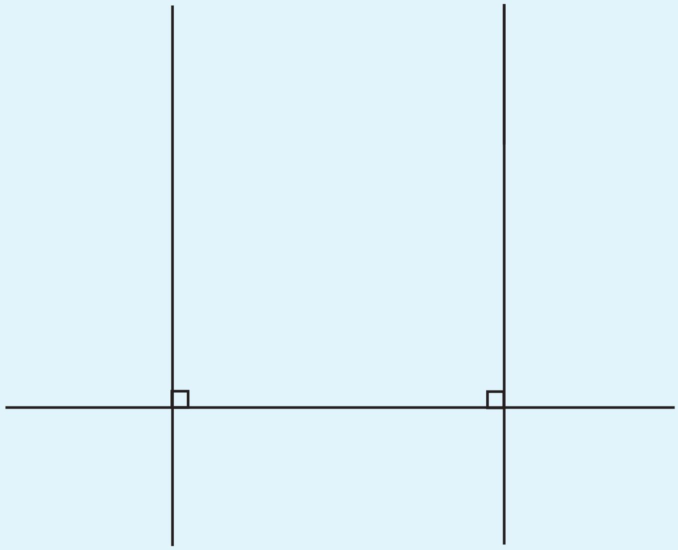




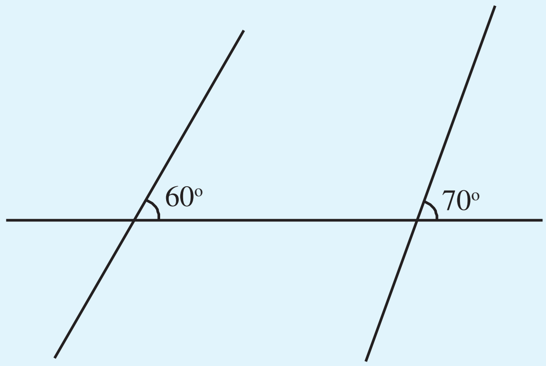


இதில் ஏதேனும் ஒரு ஜோடி எதிர்ப்பக்கங்களை நீட்டினால் சந்திக்குமா?





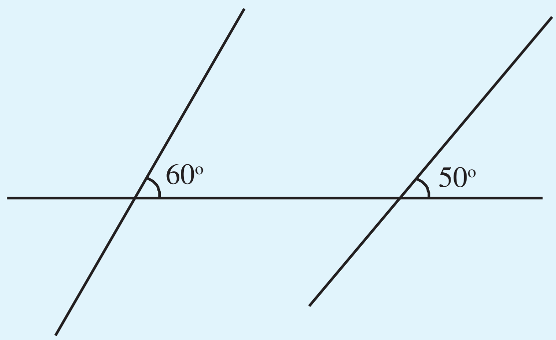
இனி கீழ்க்காணும் படத்தைப் பார்க்கவும்.



இவை இணையாகுமா?

கோடுகளை மேல்நோக்கி நீட்டினால் என்ன நடக்கும்?

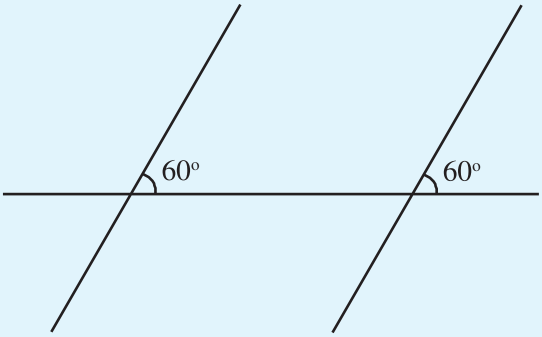
இவ்வாறு ஆனாலோ?



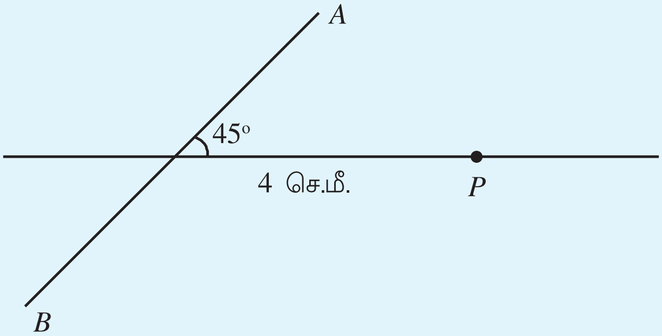
கோடுகளை மேல்நோக்கி நீட்டினால் சந்திக்குமா?

கீழ்நோக்கி நீட்டினாலோ?

சந்திக்கமால் இருக்க வலது பக்கக் கோட்டின் சாய்வு எத்தனை டிகிரி ஆகவேண்டும்?

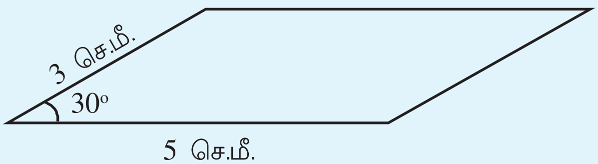


இனி கீழே காண்பது போல் ஒரு படத்தை உங்கள் குறிப்பேட்டில் வரையவும்.



P வழியாக *AB* க்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைவதற்கான எளிய முறை என்ன?

கீழே வரையப்பட்டுள்ள நாற்கரத்தின் இரண்டு ஜோடி எதிர் பக்கங்களும் இணையாகும்.

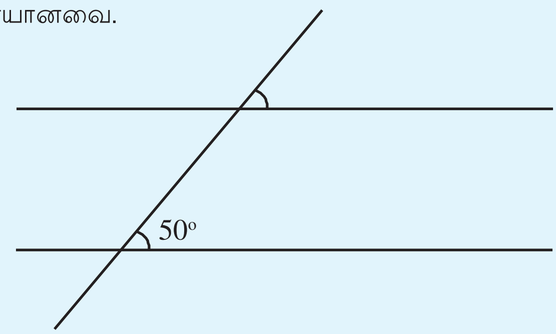


இதே அளவில் நாற்கரம் வரையலாமா?

எதிர்பக்கங்கள் சமமான இத்தகைய நாற்கரத்தை இணைகரம் (parallelogram) என்கிறோம்.

இணைகோடுகளும் கோணங்களும்

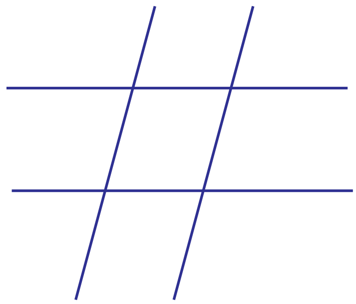
கீழே தரப்பட்டுள்ள படத்தில் மேலும் கீழும் உள்ள கோடுகள் இணையானவை.



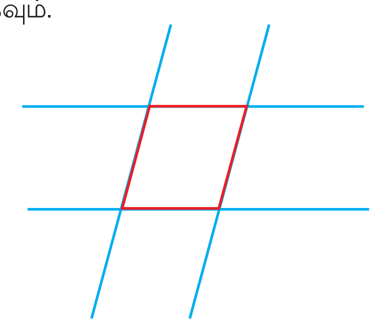
மேலே அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள கோணம் எவ்வளவு?

இணைகள் வெட்டும் போது

ஒரு ஜோடி இணைகோடுகளை வரையவும் அவற்றை வெட்டும்படி வேறொரு ஜோடி இணைகோடுகள் வரையவும்.



இவற்றின் இடையில் உருவான வடிவத்தைப் பார்க்கவும்.



இந்த வடிவத்தின் பெயர் என்ன?

செவ்வகமும் இணைகரமும்

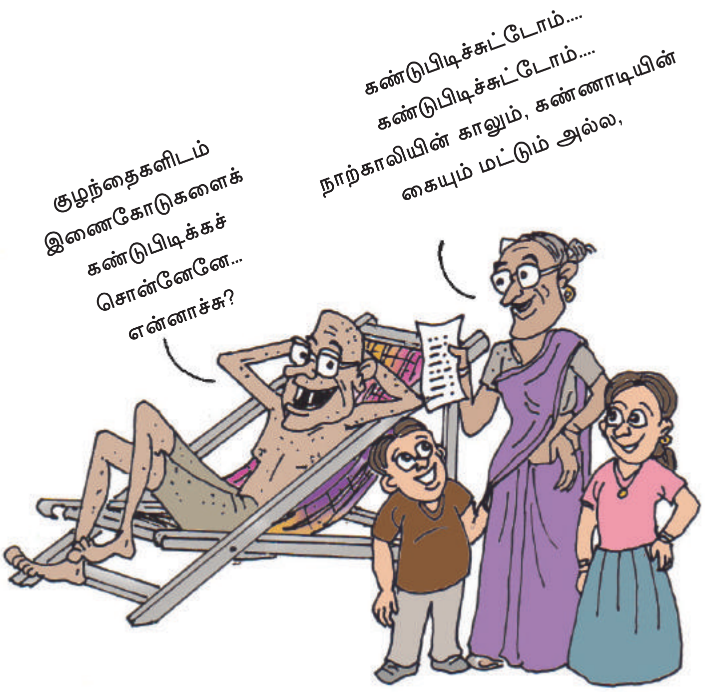
கட்டி அட்டையில் ஒரு செவ்வகத்தை வெட்டி எடுக்கவும்.

இனி கீழ் மூலையிலிருந்து சாய்வாக கீழே காண்பது போல் ஒரு முக்கோணத்தை வெட்டி எடுக்கவும்.

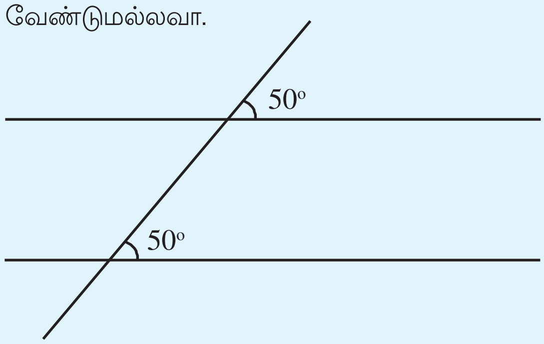
இந்த முக்கோணத்தை அடுத்த படத்தில் காண்பது போல் மறுபக்கம் சேர்த்து வைத்தால்?

இது இணைகரமா?

ஏன்?

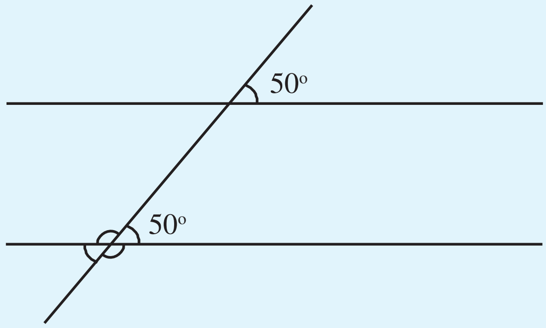


இணைகோடுகள் எந்த கோடுகளுடனும் ஒரே சாய்வில் ஆக வேண்டுமல்லவா.

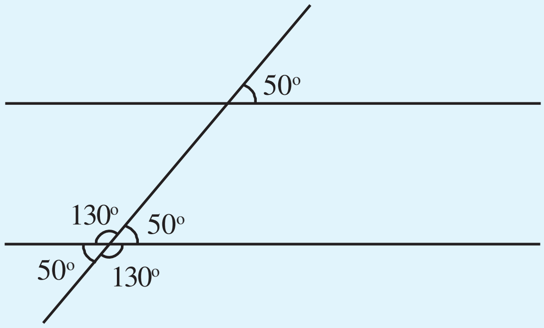


படத்தில் வேறு கோணங்களும் உண்டு. அவற்றைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?

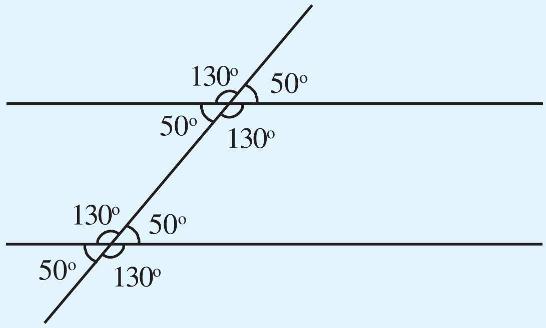
முதலில் கீழே உள்ள மூன்று கோணங்களைப் பார்க்கவும்.



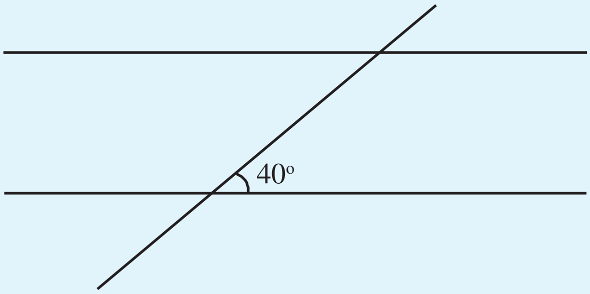
இரண்டு கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டிச் செல்லும் போது உருவாகும் நான்கு கோணங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன?



இதுபோல் படத்தில் மேலே உள்ள கோணங்களையும் எழுதலாம் அல்லவா?



கீழேக்காணும் படத்தில் மேலும் கீழும் காணப்படும் கோடுகள் இணைகோடுகள்.

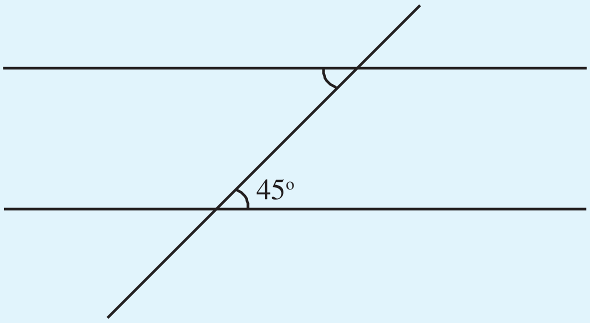


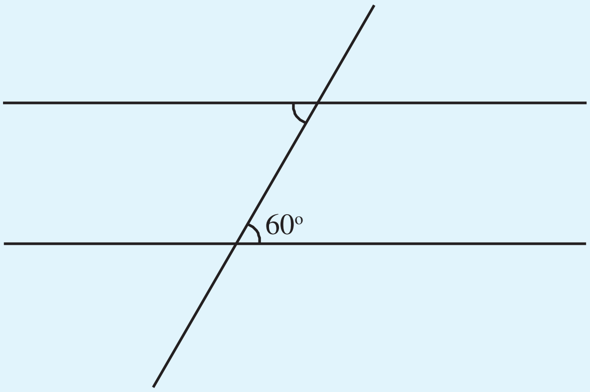
படத்தில் காணும் மற்ற ஏழு கோணங்களின் அளவுகளை எழுதுக.

இங்கு பார்த்ததை இவ்வாறு எழுதலாம்.

இணையான இரண்டு கோடுகள் வேறு எந்த கோட்டுடனும் ஒரே அளவான கோணங்களை உருவாக்கும்.

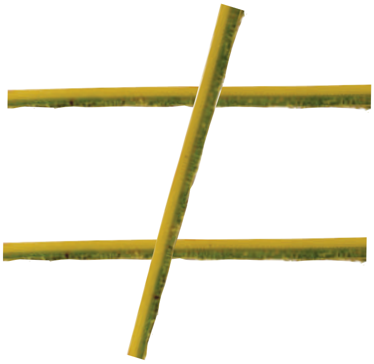
கீழ்க்காணும் படங்களில் இணை கோடுகளும் அவற்றை வெட்டிச் செல்லும் மூன்றாவது கோடும் உள்ளது. ஒவ்வொரு படத்திலும் ஒரு கோணத்தின் அளவு எழுதப்பட்டுள்ளது. வேறு ஒரு கோணம் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இந்தக் கோணத்தைக் கண்டுபிடித்து படத்தில் எழுதுக.



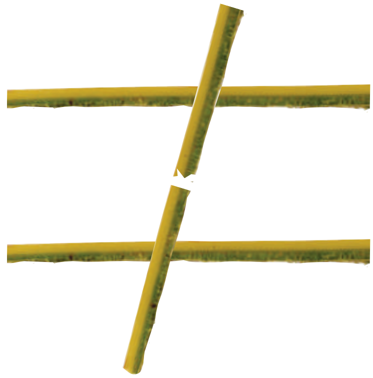


மாறாத வடிவம்

இரண்டு ஈர்க்கில் துண்டுகளை இணையாக வைக்கவும். இதற்கு குறுக்காக வேறொரு ஈர்க்கில் வைத்து நன்றாக ஒட்டவும்.



இனி இந்த வடிவத்தை நடுவில் ஒடித்து இரண்டு பாகங்களாகக்கவும்.



ஒரு பாகத்தை மற்ற பாகத்தின் மீது வைத்துப் பார்க்கவும். கோணங்கள் சரியாகப் பொருந்தி யுள்ளதல்லவா?

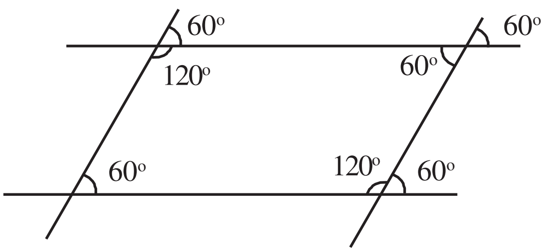
இணைகரத்தில் கோணங்கள்

ஒரு செவ்வகத்தின் கோணங்கள் எல்லாம் செங்கோணம் அல்லவா?

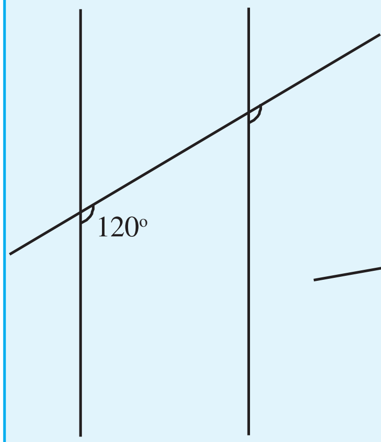
இணைகரத்தில்?

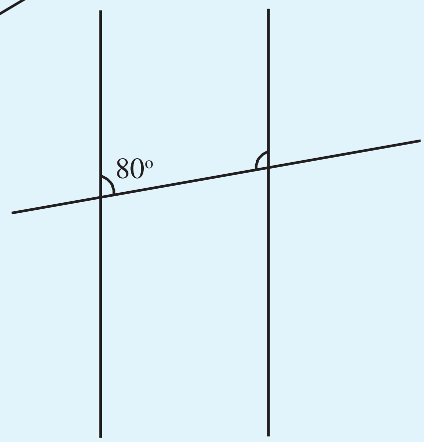
முதல் இணைகரத்தில் மற்றக்கோணங்களைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?

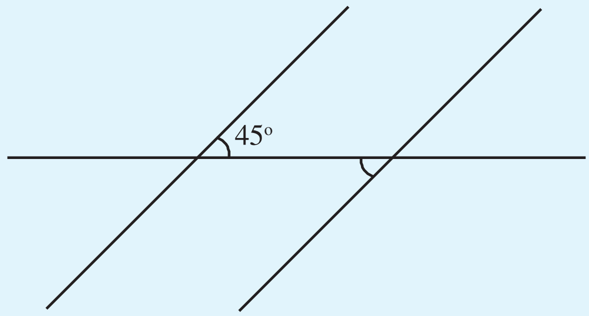
பக்கங்களை நீட்டி வரைந்து பார்க்கலாம்.



இதுபோல் இரண்டாவது இணைகரத்திலும் கோணங்களைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?

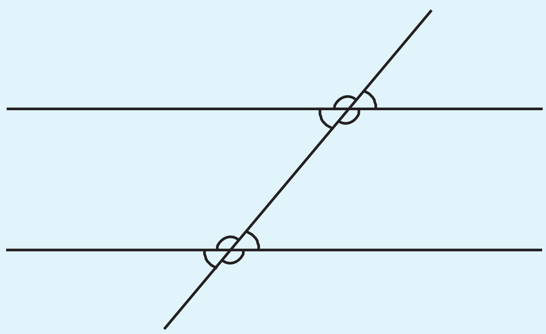






கோணப் பொருத்தங்கள்

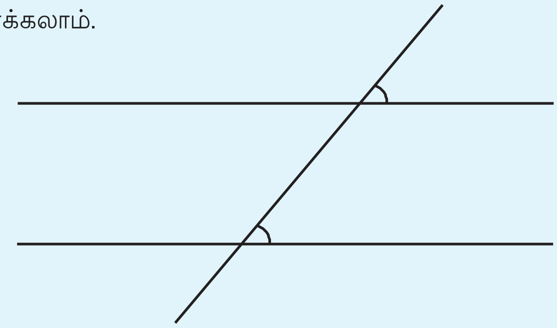
இணையான இரண்டு கோடுகளை வேறொரு கோடு வெட்டிச் செல்லும் போது எட்டு கோணங்கள் உருவாகின்றன.



படத்தில் வெட்டிச் செல்லும் கோட்டுடன் கீழேயுள்ள கோடு நான்கு கோணங்களையும் மேலேயுள்ள கோடு நான்கு கோணங்களையும் உருவாக்கும்.

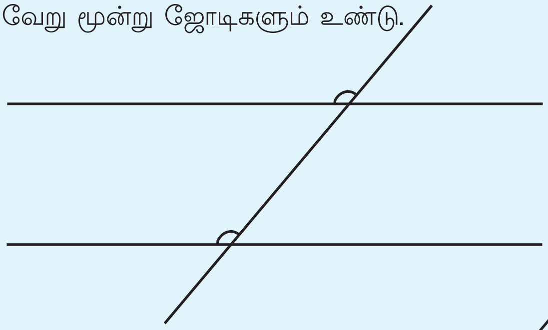
கீழிருந்தும் மேலிருந்தும் ஒரு கோணம் வீதம் எடுத்து பல ஜோடிகளை உருவாக்கலாம். சில ஜோடிகளில் கோணங்கள் சமம் ஆகும். மற்றவை மிகை நிரப்பிகள்.

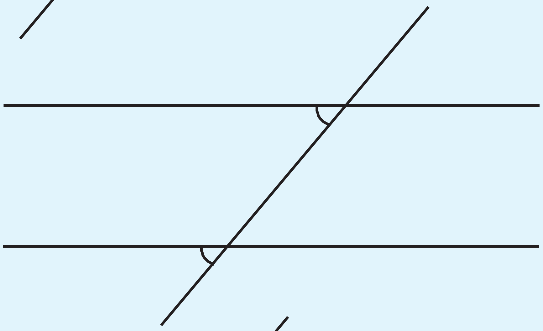
சமஜோடிகளைப் பார்க்கவும். இவை வசதிக்காக இரண்டாக தரம் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன. கீழே உள்ள படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள ஒரு ஜோடி கோணங்களைப் பார்க்கலாம்.

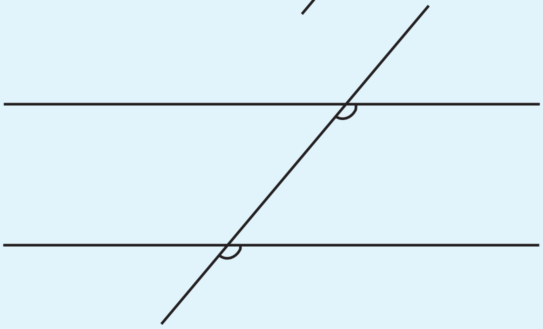


இதில் கீழ் உள்ள கோணம் கிடைமட்டமான கோட்டின் மேலேயும் சாய்ந்த கோட்டின் வலதுபக்கத்திலும் ஆகும். மேலே உள்ள கோணம் அங்கு கிடைமட்டமாக உள்ள கோட்டின் மேலேயும் சாய்ந்த கோட்டின் வலது பக்கத்திலும் ஆகும்.

இதுபோல் கீழேயும் மேலேயும் ஒரே இடத்தில் வருகின்ற வேறு மூன்று ஜோடிகளும் உண்டு.

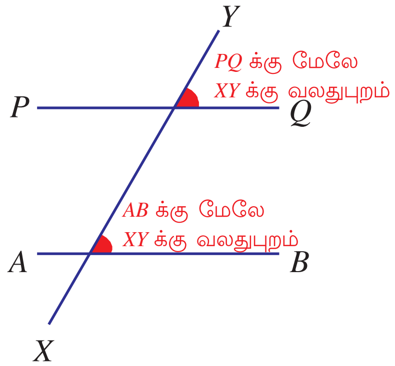


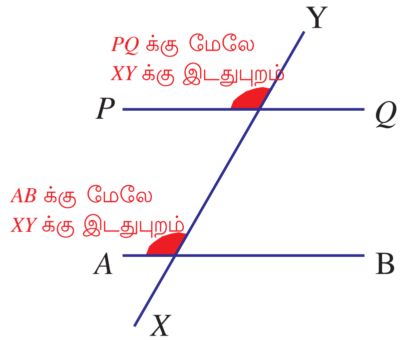


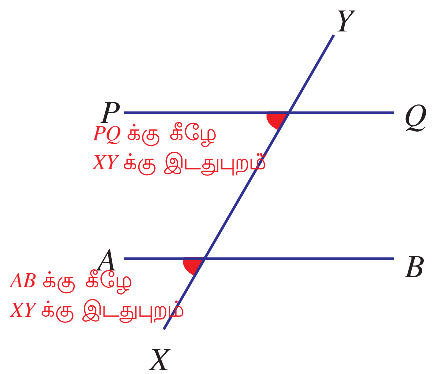


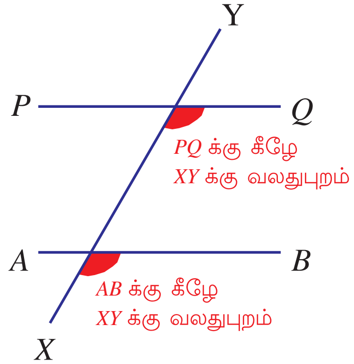
இடத்தைப் பொறுத்து இத்தகைய ஜோடிக் கோணங்களை ஒத்தக்கோணங்கள் (corresponding angles) என்று கூறுவர்.

ஒத்தக்கோணங்கள்



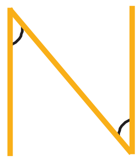






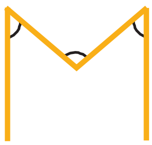
எழுத்தில் கோணங்கள்

ஆங்கிலத்தில் N என்ற எழுத்தைப் பெரியதாக வரையவும்.



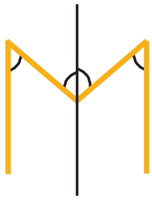
இதில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள கோணங் களுக்கிடையே தொடர்பு என்ன?

மேலும் M என்ற எழுத்தைப் பார்க்கவும்.

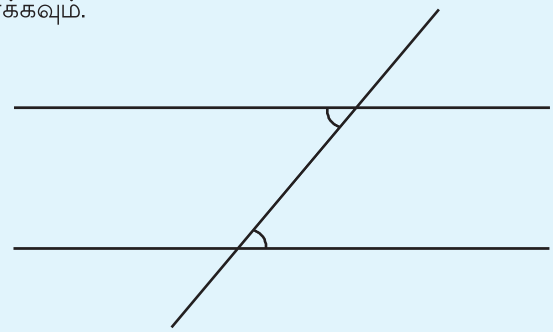


அடையாளப்படுத்தப்பட்டுள்ள மூன்று கோணங் களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு உண்டா?

மையம் வழியாக வேறொரு கோடு வரைந் தாலோ?



சமமான கோணங்களை வேறொரு முறையில் ஜோடி சேர்க்கலாம். கீழே உள்ள படத்தில் கோணங்களைப் பார்க்கவும்.

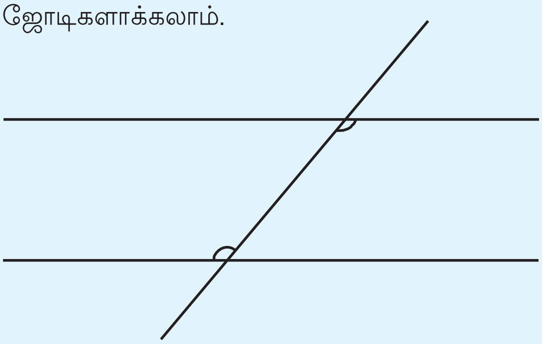


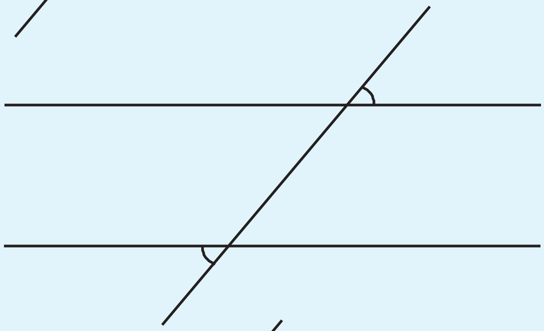
கீழே உள்ள கோணம் கிடைமட்டமான கோட்டின் மேலேயும் சாய்ந்த கோட்டின் வலதுபுறமும் ஆகும்.

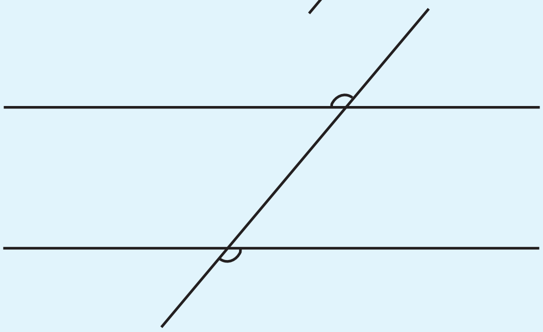
மேலேயுள்ள கோணம்?

கிடைமட்டமான கோட்டின் கீழே சாய்ந்த கோட்டின் இடதுபுறம்.

இதுபோல் இடத்தை முற்றிலும் மாறுபட்ட மூன்று முறைகளில் ஜோடிகளாக்கலாம்.

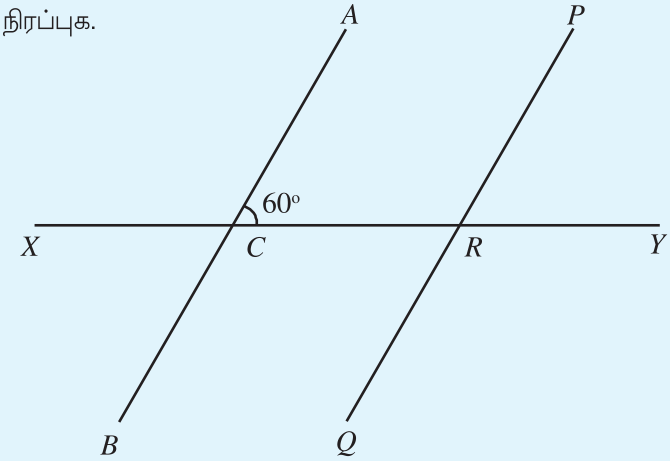






இடம் மாறுபட்ட இத்தகைய ஜோடியின் கோணங்களை ஒன்றுவிட்டக் கோணங்கள் (alternate angles) என்று கூறுவர்.

கீழே காணும் படத்தில் இரண்டு இணைகோடுகளுக்கும் அவற்றை வெட்டும் கோட்டிற்கும் பெயரிடப்பட்டுள்ளது. ஒரு கோணத்தின் அளவும் எழுதப்பட்டுள்ளது. ஒத்தக் கோணங் களுடையவும் ஒன்றுவிட்டக் கோணங்களுடையவும் ஜோடிகளின் பெயரும் அளவும் எழுதி அட்டவணையை நிரப்புக.



ஒத்த கோணங்கள்	
பெயர்கள்	அளவு
$\angle ACY$, $\angle PRY$	60°

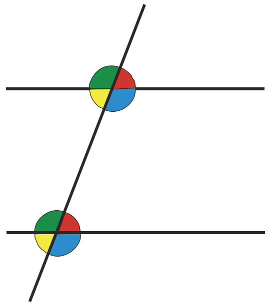
ஒன்றுவிட்டகோணங்கள்	
பெயர்கள்	அளவு
$\angle ACY$, $\angle QRX$	60°

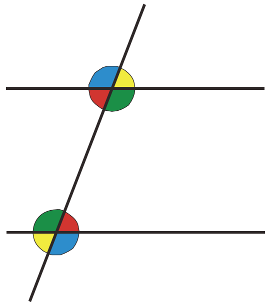
சுருக்கமாகக் கூறினால்

இரண்டு இணைகோடுகளை வேறொரு கோடு வெட்டும் போது ஒரு கோட்டுடன் உருவாக்கும் நான்கு கோணங்களில் இருந்தும் மற்ற கோட்டுடன் உருவாக்கும் நான்கு கோணங்களில் இருந்தும் ஒவ்வொன்று வீதம் எடுத்து பல முறைகளில் ஜோடிகள் உருவாக்கலாம். இவற்றில் எட்டுஜோடிகளில் கோணங்கள் சமம். கோணங்களின் இடத்தின் அடிப்படையில் நான்கு ஜோடி கோணங்களை ஒத்தக்கோணங்கள் என்றும் பிற நான்கு ஜோடி கோணங்களை ஒன்றுவிட்டக்கோணங்கள் என்றும் கூறுவர்.

ஒத்தவையும் எதிரானவையும்

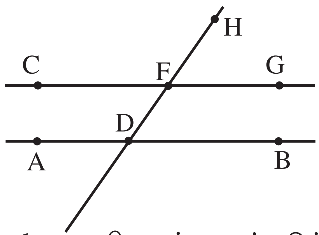
கீழ்க்காணும் படங்களைப் பார்க்கவும்.
முதல்படத்தில் ஒத்த கோணங்களின் ஜோடிகளுக்கு ஒரே நிறம் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.
இரண்டாவது படத்தில்?



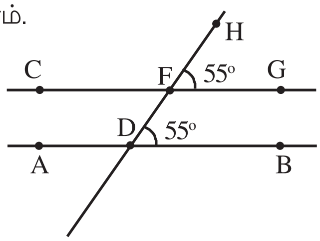


மேலேயும் கீழேயும் உள்ள கோணங்களில் ஒரே நிறம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளக கோணங்களுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன?

ஜியோஜிப்ராவில் AB என்ற கோடும் அதற்கு இணையாக C வழியாக மற்றொரு கோடும் வரையவும். இந்த கோடுகளில் D, F என்ற புள்ளிகளை அடையாளப்படுத்தி அவைகளை இணைத்து ஒரு கோடு வரையவும். பின்னர் G, H என்ற புள்ளிகளைப் படத்தில் உள்ளது போல் அடையாளப்படுத்தவும்.



இனி Angle கருவியைப் பயன்படுத்தி G, F, H என்ற புள்ளிகளில் வரிசையாக கிளிக் செய்யவும். இதுபோல் B, D, F என்ற புள்ளிகளிலும் கிளிக் செய்யவும். இப்போது இந்த கோணங்களின் அளவு எத்தனை என்று காண்போம்.



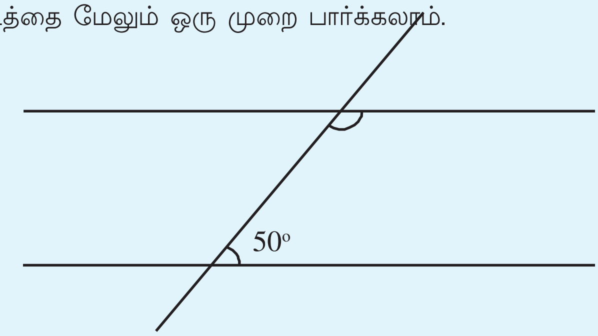
Move கருவியைப் பயன்படுத்தி F ன் இடத்தை மாற்றி பார்க்கவும்.

F, D என்ற புள்ளிகளில் வருகின்ற மற்ற கோணங்களையும் இதுபோல் அடையாளப் படுத்தி பார்க்கவும்.

இனி கோணங்களுக்கு நிறம் கொடுப்போம். இதற்காக கோணத்தின் அடையாளத்தில் Right கிளிக் செய்யும் போது வருகிற ஒரு சாளரத் திலிருந்து Object properties தேர்ந்தெடுக்கவும். இதில் நிறத்தில் கிளிக் செய்து தேவையான நிறம் தேர்ந்தெடுக்கவும். இவ்வாறு ஒரே அளவுள்ள கோணங்களுக்கு ஒரே நிறம் கொடுக்கவும்.

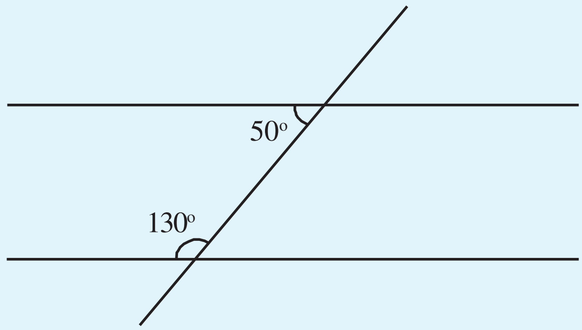
மிகை நிரப்பிகள்

இரண்டு இணைக்கோடுகளை மற்றொரு கோடு வெட்டுகின்ற படத்தை மேலும் ஒரு முறை பார்க்கலாம்.



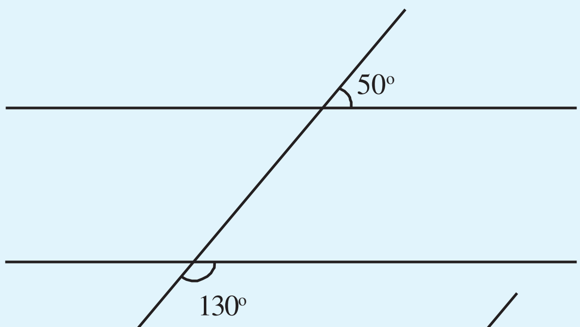
படத்தின் மேலே உள்ள கோட்டில் அடையாளப் படுத்தப்பட்டுள்ள கோணத்தின் அளவு என்ன?

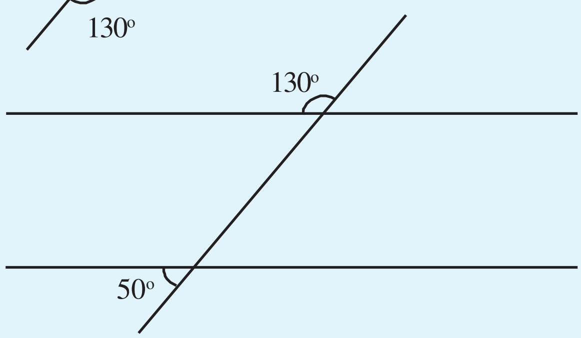
இதுபோல் சாய்ந்த கோட்டின் இடது பக்கமும் மிகைநிரப் பிகளான ஒரு ஜோடி கோணங்கள் உண்டல்லவா?



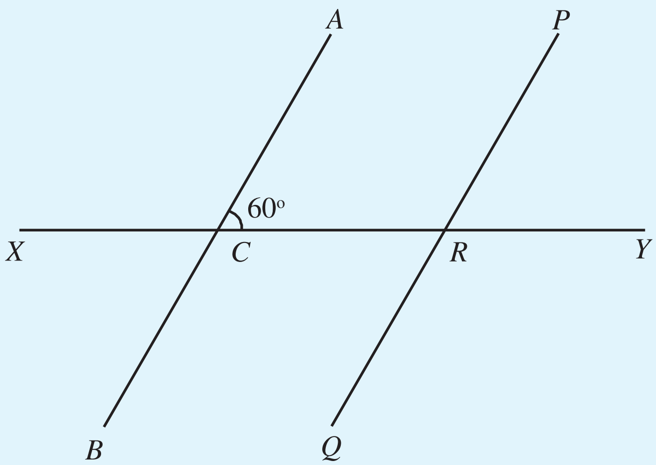
இந்த இரண்டு ஜோடிகளிலுள்ள கோணங்களை உட்கோண ஜோடிகள் (co-interior angles) என்று கூறலாம்.

இதுபோல் மிகைநிரப்பிகளான இரண்டு வெளிக்கோண ஜோடிகளும் (co-exterior angles)உள்ளன.





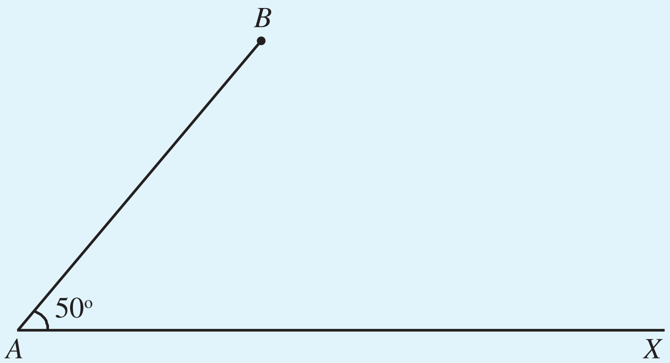
கீழே உள்ள படத்தில் AB, PQ என்ற இணைக்கோடுகளை XY என்ற கோடு வெட்டிச் செல்கின்ற புள்ளிகள் C, R. படத்தில் உள்கோணங்களினுடையவும், வெளிகோணங் களினுடையவும் ஜோடிகளைக் கண்டுபிடித்து பெயர் களையும் அளவுகளையும் கீழே எழுதவும்.



உட்கோணங்கள்	வெளிக்கோணங்கள்

இணைகோடுகளும் முக்கோணமும்

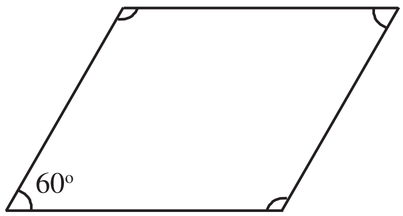
இந்தப் படத்தைப் பார்க்கவும்.



B யிலிருந்து துவங்குகின்ற ஒரு கோடு AX ற்கு இணையாக வரையவும்.

இணைகரத்தின் கோணங்கள்

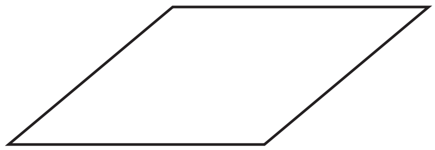
இந்த இணைகரத்தைப் பார்க்கவும்.



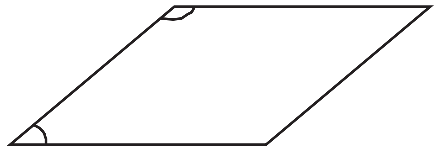
இதில் மற்ற மூன்று கோணங்களின் அளவுகளை எழுதலாமா?

நான்கு கோணங்களினுடையவும் தொகை எவ்வளவு?

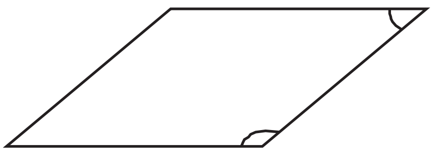
இனி இந்த இணைகரத்தைப் பார்க்கவும்.



கோணங்கள் ஒன்றும் குறிப்பிடப்படவில்லை. இடதுபக்கத்தில் மேலும் கீழும் உள்ள கோணங் களின் தொகை எவ்வளவு?.



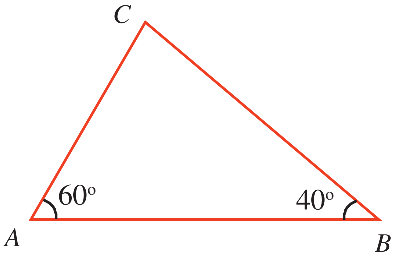
வலது பக்கத்தில் மேலும் கீழும் உள்ள கோணங்களின் தொகை எவ்வளவு?



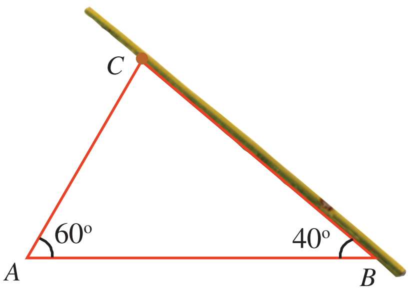
அப்படியானால் நான்கு கோணங்களின் தொகை எவ்வளவு?

முக்கோணமும் இணைகோடுகளும்

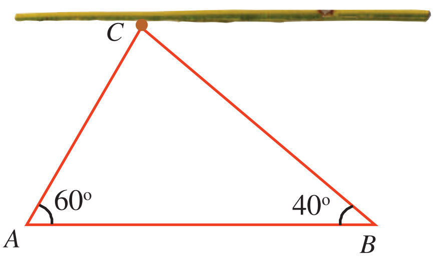
படத்தில் காண்பது போல் ஒரு முக்கோணத்தை அட்டையில் வரையவும்.



இனி நீண்ட ஒரு ஈர்க்கில் எடுத்து BC என்ற பக்கத்தோடு சேர்த்து வைத்து C ல் ஒரு ஊசியைக் குத்தி வைத்து நிலை நிறுத்தவும்.



ஈர்க்கிலை மேல்நோக்கி நகர்த்தி AB க்கு இணையாக்கவும்.



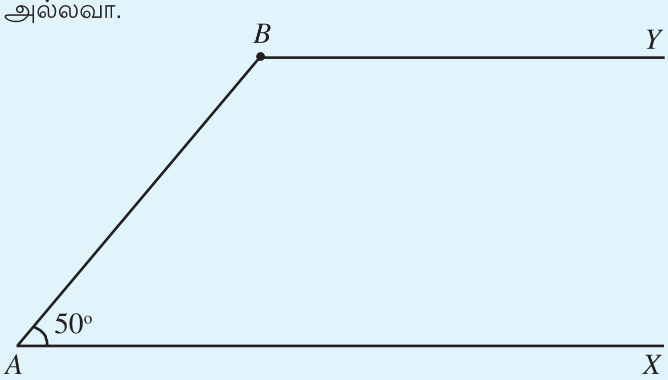
இப்போது BC யுடன் ஈர்க்கில் ஏற்படுத்துகிற கோணம் எவ்வளவு?

AC யுடன் ஏற்படுத்துகின்ற கோணம் எவ்வளவு?

அப்படியானால் முக்கோணத்தில் உள்ள C ன் கோணம் எவ்வளவு?

எப்படி வரையலாம்?

A யின் கோணமும் B யின் கோணமும் உள்கோண ஜோடிகள் அல்லவா.

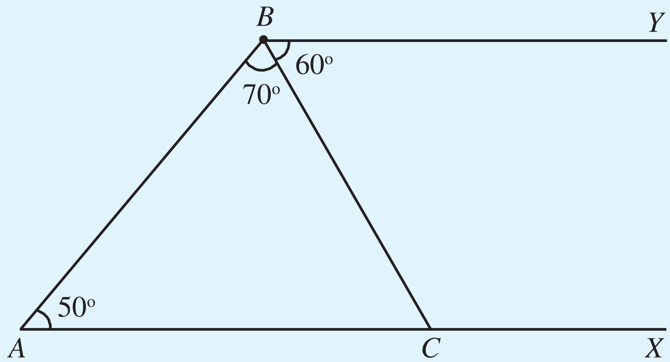


குறிப்பேட்டில் இந்த படத்தை வரைந்து பார்க்கவும்.

இனி இதே படத்தில் B யிலிருந்து ஒரு கோடு சாய்வாக வரைய வேண்டும். AB யுடனான கோணம் 70° என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

இந்தக் கோடு AX ற்கு இணையானதல்ல.

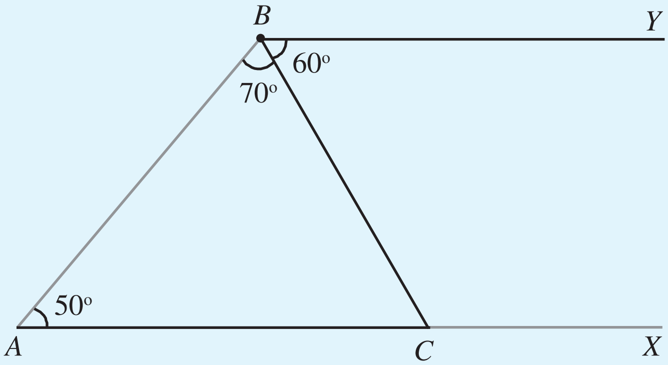
அது AX உடன் இணைகின்ற புள்ளியை C என்று குறிப்பிடலாம்.



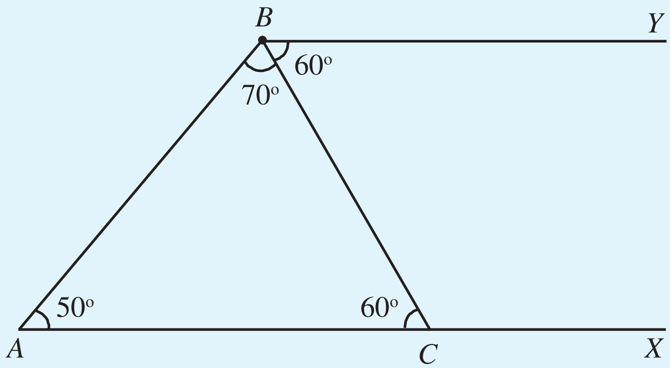
இப்போது ABC ஒரு முக்கோணம் ஆகும்.

அதில் A, B என்ற கோணங்களின் அளவுகள் தெரியும். C இன் கோணம் எவ்வளவு?

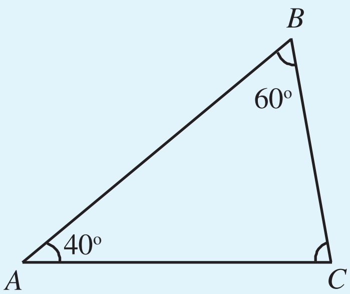
AC, BY இவை இணையாகும். இந்த கோடுகளையும் BC என்ற கோட்டையும் மட்டும் கவனிக்கவும்.



$\angle ACB$, $\angle CBY$ இவை ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் அல்லவா.

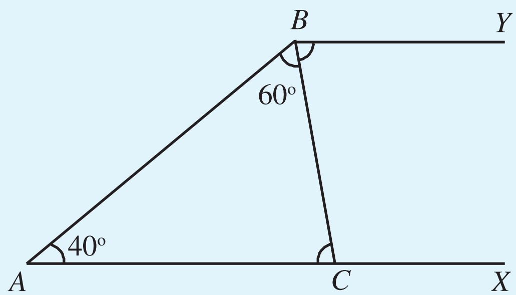


இனி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணத்தில் C ன் கோணத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?



முதலில் உள்ள படத்தைப் போல் AC ஐ நீட்டவும். அதற்கு இணையாக B யிலிருந்து ஒரு கோடு வரைந்தாலோ?

$\angle ACB$ கண்டுபிடிக்க வேண்டும். இது $\angle CBY$ க்கு சமமாகும். ஏன்?



$\angle CBY$ கண்டுபிடிக்க, $\angle ABY$ தெரிந்துகொண்டால் போதும். அதுவும் $\angle A$ யும் உள்கோண ஜோடிகள் ஆகும்.

அப்படியானால்

$$\angle ABY = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

இதிலிருந்து

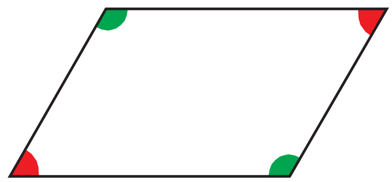
$$\angle CBY = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

அப்படியானால்

$$\angle ACB = \angle CBY = 80^0$$

இணைகரமும் முக்கோணமும்

கீழே வரையப்பட்டுள்ள இணைகரத்தைப் பார்க்கவும்.

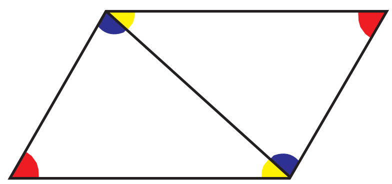


சிவப்பு நிறத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டிருக்கின்ற கோணங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

பச்சை நிறத்திலுள்ள கோணங்களுக்கிடையிலோ?

வெவ்வேறு நிறங்கள் உள்ள கோணங்களுக்கிடையிலோ?

இனி இந்த இணைகரத்தின் இரண்டு எதிர் மூலைகளை இணைக்கவும். அப்போது இரண்டு முக்கோணங்கள் கிடைக்கின்றன.



நீல நிறம் கொடுக்கப்பட்டுள்ள கோணங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

மஞ்சள் நிறமுள்ள கோணங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?

அப்போது வெவ்வேறு நிறங்களிலுள்ள மூன்று கோணங்களை எடுத்து கூட்டும் போது எத்தனை டிகிரி கிடைக்கும்?

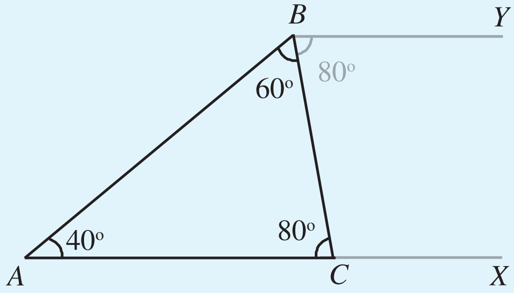
ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் மூன்று கோணங்களின் தொகை எவ்வளவு?

தத்துவமும் உண்மையும்

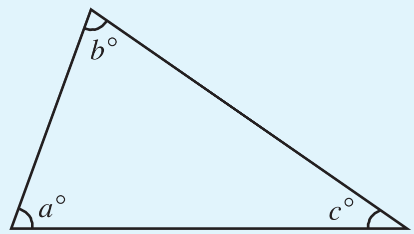
எல்லா முக்கோணங்களிலும் மூன்று கோணங்களின் தொகை 180^o என்று எவ்வாறு தீர்மானிக்கப்படுகிறது? சில முக்கோணங்கள் வரைந்து ஒவ்வொன்றினுடையவும் கோணங்களை அளந்து கூட்டிப் பார்த்தால் போதுமா? இதில் உட்படாத ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை 180^o தான் என்று எப்படி சொல்ல முடியும்?
எந்த முக்கோணத்திலும் ஒரு மூலை வழியாக எதிர்பக்கத்திற்கு இணையாக ஒரு கோடு வரைவோம். இணைகோடுகள் உருவாக்குகின்ற கோணங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பைப் பயன்படுத்தி, முக்கோணத்தின் கோணங்களின் தொகை 180^o என்று காணலாம்.

இவ்வாறு செய்வதால் பல கருத்துக்களையும் பெற முடிகிறது.

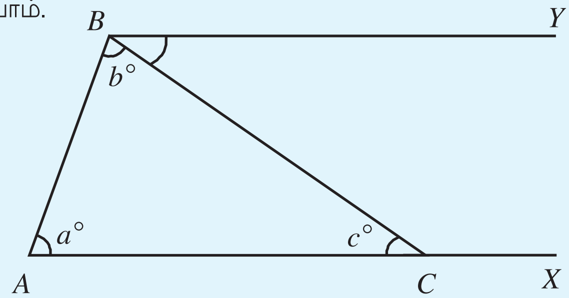
- முக்கோணங்கள் மாறினாலும் இங்கே கூறுகின்ற அடிப்படைகள் மாறுவதில்லை. அதனால் அவை ஏற்படுத்துகின்ற உண்மை எல்லா முக்கோணங்களிலும் சரியாகும்.
- இணைகோடுகளைப் பற்றிய தத்துவங்களை எளிதில் புரிந்து கொள்ளலாம். முக்கோணங்களின் தொகை 180^o என்று அறிந்து கொள்வது எளிதானதல்ல. எளிமையான தத்துவங்கள் பயன்படுத்தி சிக்கலான தத்துவங்களை நிறுவுவதற்கு இது ஒரு எடுத்துக்காட்டு ஆகும்.
- இணைகோடுகள் பயன்படுத்தி ஒரு காரியத்திலிருந்து மற்றொன்று என்ற முறையில் அடிப்படைகளை இணைக்கும் போது, முக்கோணத்தின் கோணங் களின் தொகை 180^o தான் என்ற தத்துவம் மட்டுமல்ல, அதன் காரணங்களையும் புரிய முடிகிறது.



இனி இந்த முக்கோணத்தைப் பார்க்கவும்.



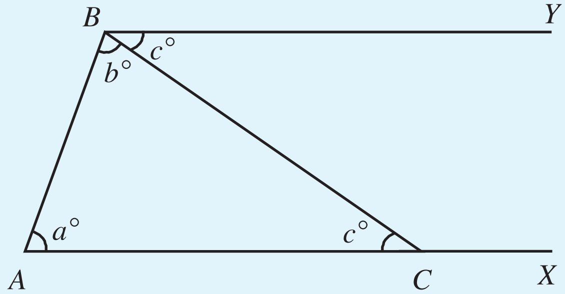
கோணங்களின் அளவுகள் a, b, c என்ற எழுத்துகளால் குறிக்கப்பட்டுள்ளது. இவைகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன? முன்பு வரைந்தது போலவே இணைகோடுகள் வரைவோம்.



படத்திலிருந்து

$$\angle CBY = \angle ACB = c^o$$

என்று காணலாம்.



இந்த படத்திலிருந்து

$$\angle A + \angle ABY = 180^o$$

அதாவது

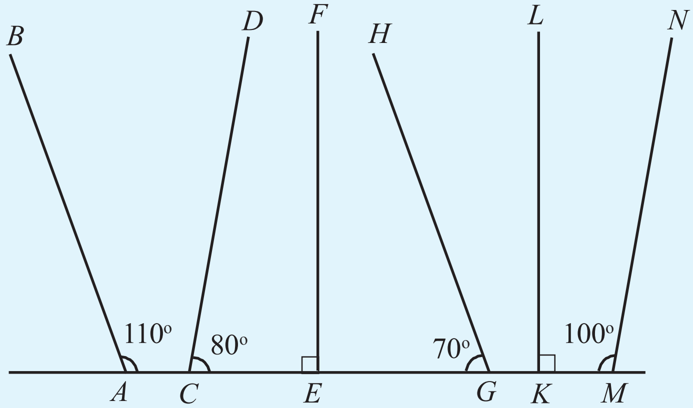
$$a + b + c = 180^\circ$$

இதிலிருந்து என்ன புரிகிறது?

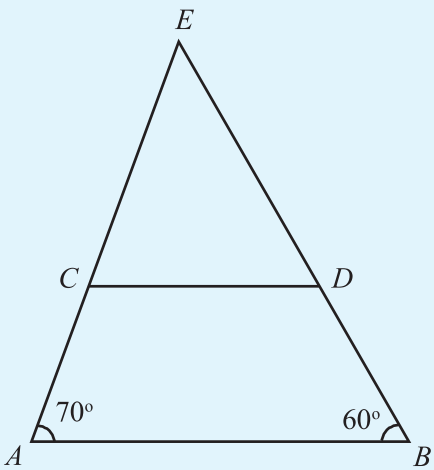
எந்த முக்கோணத்திலும் கோணங்களின் தொகை 180° ஆகும்.

செய்து பார்ப்போம்.

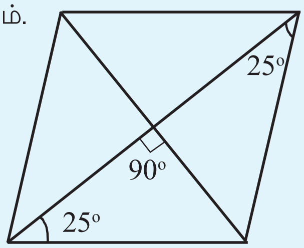
- படத்தில் கோடுகளுக்கு இணையான ஜோடிகளை கண்டுபிடிக்கவும்.



- படத்தில் AB யும் CD யும் இணையாகும். படத்திலுள்ள எல்லாக் கோணங்களையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

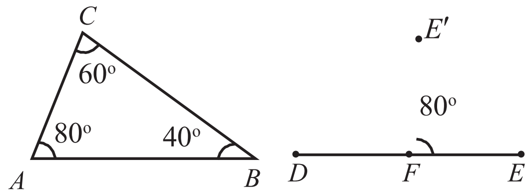


- கீழே உள்ள படத்தில் ஒரு இணைகரம் நான்கு முக்கோணங்களாக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு முக்கோணத்தினுடையவும் கோணங்களைக் கண்டு பிடிக்கவும்.



மாறாத தொடர்பு

ஜியோஜிப்ராவில் Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி ABC என்ற முக்கோணம் உருவாக்கவும். Angle கருவியை எடுத்து முக்கோணத்தில் கிளிக் செய்யும் போது முக்கோணத்தினுடைய கோணங்களின் அளவுகள் காணமுடியும்.



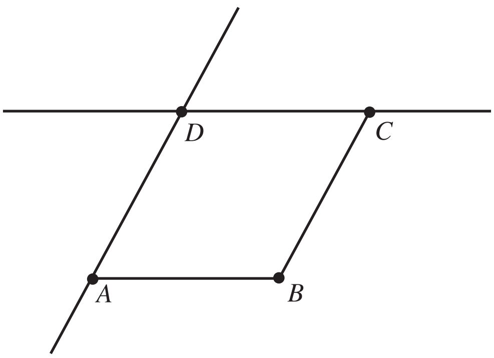
இனி DE என்ற கோடு வரைந்து அதில் F என்ற புள்ளி அடையாளப்படுத்தவும். Angle with given size கருவியைப் பயன்படுத்தி E யிலும் F லும் வரிசையாக கிளிக் செய்யவும். தோன்றுகின்ற சாளரத்தில் Angle க்கு α என்று கொடுத்து OK கிளிக் செய்யவும். இப்போது E' என்ற புதிய புள்ளி கிடைக்கும். இதே கருவியைப் பயன்படுத்தி $E'F$ல் வரிசையாக கிளிக் செய்து Angle β என்று கொடுக்கவும். புதிய புள்ளி E'' கிடைக்கும். $E''F$ல் கிளிக் செய்யும் போது Angle γ என்று கொடுக்கவும். புதிய புள்ளி E'' கிடைக்கும். FE', FE'' என்ற கோடுகள் வரையவும். இப்படி கிடைக்கின்ற படத்தில் $LEFE' = LA$; $LE'\ FE'' = LB$; $LE''\ FE'' = LC$ ஆகும். இரண்டு படங்களிலும் ஒரே அளவுடைய கோணங்களுக்கு ஒரே நிறம் கொடுக்கவும்.

Move கருவியைப் பயன்படுத்தி கோணங்களை மாற்றிப் பார்க்கவும். வலது பக்க படத்திலும் ஒவ்வொரு மாற்றம் வருகிறதல்லவா. இங்கே மாறாமல் இருப்பது என்ன?

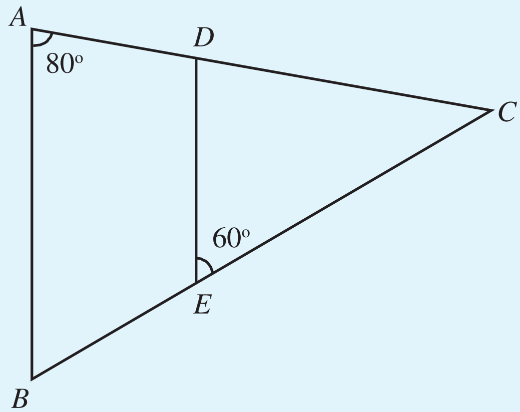
இணைகரம் வரைவோம்

ஜியோஜிப்ராவில் ஒரு இணைகரம் வரைவோம்.

AB, *BC* என்ற கோடுகள் வரையவும். Parallel line கருவியைப் பயன்படுத்தி *AB* க்கு இணையாக *C* வழியாகவும் *BC* க்கு இணையாக *A* வழியாகவும் கோடுகள் வரையவும். இந்த கோடுகள் இணைகின்ற புள்ளிக்கு *D* என்று பெயரிடுக. Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தி இணைகரம் *ABCD* ஐ முழுமையாக்குக., தேவையில்லாத கோடுகளை அழிக்கலாம்.

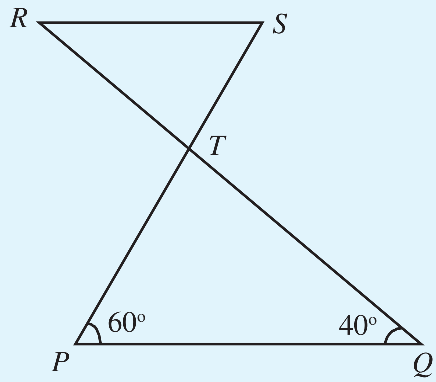


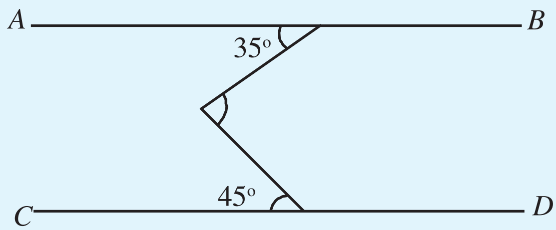
AB என்ற கோட்டில் Right click செய்யும்போது தோன்றுகின்ற சாளரத்தில் Trace on என்பதற்கு நேராக கிளிக் செய்யவும். இதுபோல் *BC* என்ற கோடு வழியாகவும் Trace on கொடுக்கவும். இனி Move கருவியைப் பயன்படுத்தி இணைகரத்திற்குள் கிளிக் செய்து பிடித்துக் கொண்டு நேர் மேல்நோக்கி நகர்த்தி பாருங்கள் என்ன கிடைக்கிறது?

- 

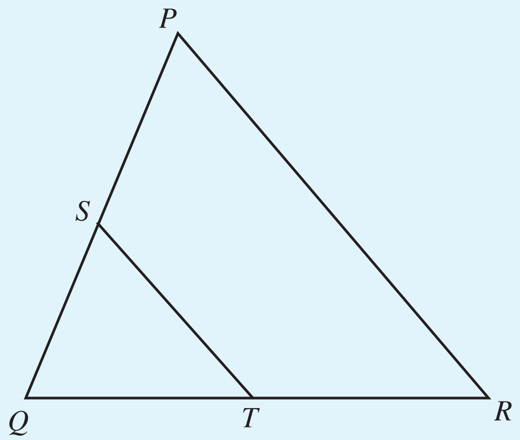
  படத்தில் *AB* யும் *DE* யும் இணையாகும். இரண்டு முக்கோணங்களிலும் எல்லா கோணங்களினுடையவும் தொகையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

- *PQ* ம் *RS* ம் இணையாகும். படத்திலுள்ள கோணங்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்

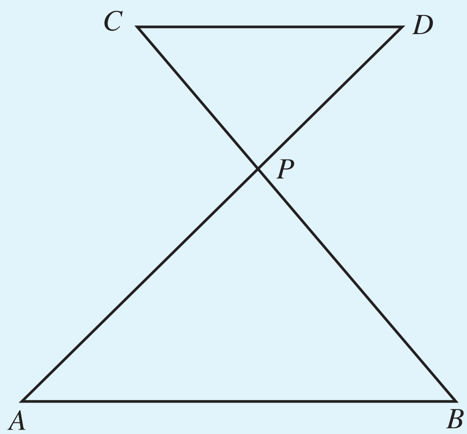
  

- 

  படத்தில் *AB* ம் *CD* ம் இணையாகும். மூன்றாவது கோணத்தின் அளவைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

- 

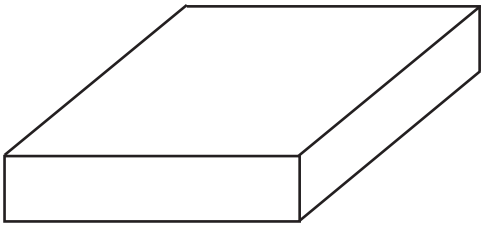
PR உம் *ST* உம் இணையாகும். பெரிய முக்கோணத் தினுடையவும் சிறிய முக்கோணத்தி னுடையவும் கோணங்களுக்கிடையே ஏதாவது தொடர்பு உண்டா?

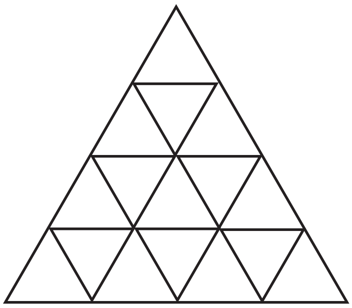


- *AB* யும் *CD* யும் இணையாகும். பெரிய முக் கோணத்தினுடையவும், சிறிய முக்கோணத்தி னுடையவும் கோணங்களுக்கிடையே என்ன தொடர்பு?
- *AB* என்ற கோடு வரைந்து அதற்கு இணையாக *CD* என்ற கோடு வரையவும். இந்த இரண்டு கோடுகளையும் வெட்டிச் செல்கின்ற வகையில் *EF* என்ற கோடு வரையவும். *EF* என்ற கோடு *AB*, *CD* என்ற கோடுகளை வெட்டுகின்றபோது உருவாகும் புள்ளிகள் *M*, *N* என்பவை ஆகும். இப்போது உருவாகின்ற கோணங் களில் ஒன்றை அளந்து எழுதுக. பிற கோணங்களின் அளவுகளை அளந்து பார்க்காமல் எழுதவும். படத்தி லுள்ள ஒத்த கோணங்கள், ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள், எதிர்கோணங்கள் என்பவைகளின் ஜோடிகளை எழுதுக.

படங்கள் வரையவும்

ஜியோஜிப்ராவைப் பயன்படுத்தி கீழே உள்ள படங்களை வரைந்து பார்க்கவும்.





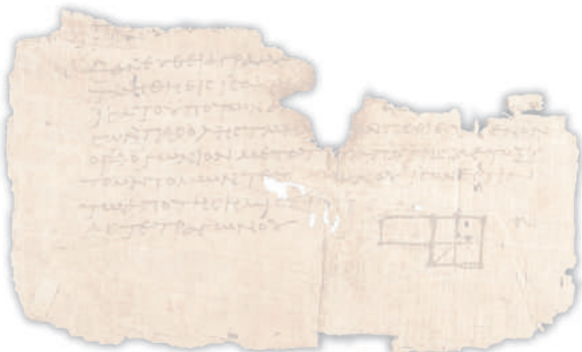
மிகவும் பெரிய முக்கோணம் வரைவதற்கு Regular Polygon கருவியைப் பயன்படுத்தலாம்.

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்படுத்த வேண்டியுள்ளது
• சம இடைவெளியிலுள்ள கோடுகள் என்ற முறையில் இணைகோடுகளை விவரித்தல்.			
• சாய்வு / செங்குத்து இவற்றுடன் தொடர்பு கொண்டு இணைகோடுகளை விவரித்தல்.			
• பலமுறைகளில் இணைகோடுகளை வரைதல் இவை இணையானவை என்று நிரூபித்தல்.			
• இணைகோடுகளின் மாதிரிகள் உருவாக்கி விவரித்தல்.			
• இரண்டு இணைகோடுகளை ஒரு கோடு வெட்டும் போது உருவாகின்ற ஒரு கோணத்தின் அளவு தரப்பட்டால் பிற கோணங்களை கண்டுபிடிக்கும் முறையை நிரூபித்தல்.			
• இணைகோடுகளின் சிறப்புக்களை விவரிப்பதற்கு ஐ.சி.டியின் உதவியைப் பயன்படுத்துதல்.			
• இணைகோட்டில் ஒத்தக் கோணங்கள், எதிர்கோணங்கள், ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் இவற்றின் சிறப்புக்களை விவரித்தல்.			
• முக்கோணத்தின் கோணங்களின் அளவுகளின் தொகை $180°$ என்ற தத்துவ முறைப்படி நிரூபித்தல்.			

3

மாறும் எண்களும் மாறாத உறவுகளும்



மாறாத உறவுகள்

பல அளவுகளில் சதுரம் வரையலாம். பக்கங்களின் நீளம் மாறும்போது சுற்றளவும் மாறுகிறது. ஆனால் எல்லா சதுரங்களிலும் சுற்றளவு பக்கத்தின் நீளத்தின் நான்கு மடங்காகும். பரப்பளவு, பக்கத்தின் நீளத்தை நீளத்தினால் பெருக்கியதாகும்.

இவ்வாறு அளவுகள் மாறும் போது, அவைகளுக்கிடையே உள்ள உறவுகள் மாறாத அநேக சூழ்நிலைகள் இருக்கின்றன. உதாரணமாக இரும்பினால் உருவாக்கிய பல பொருட்களை எடுத்து பார்த்தோமானால் அவைகளின் கனஅளவும் எடையும் மாறுபட்டதாக இருக்கும். ஆனால் எடையை கனஅளவினால் வகுத்தால் 7.8 என்ற ஒரே எண் மட்டும் தான் கிடைக்கும். இதனை இரும்பின் அடர்த்தி என கூறுவர். இரும்பிற்குப் பதிலாக வெண்கலம் கொண்டு தயாரிக்கப்பட்ட பொருளின் எடையை கனஅளவினால் வகுத்தால் 8.9 கிடைக்கும். இதுதான் வெண்கலத்தின் அடர்த்தியாகும்.

இதுபோன்ற சூழ்நிலைகளில் அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள மாறாத உறவுகளை எழுத்துக்களால் குறிப்பிடுகின்றனர். உதாரண மாக இரும்பினால் உருவாக்கப் பட்டுள்ள ஒரு பொருளின் எடை w எனவும் கனஅளவு v எனவும் எடுத்துக்கொண்டால்,

$$w = 7.8v$$

என எழுதலாம். இரும்பிற்கு பதிலாக வெண்கலம் எனில், இந்த உறவு

$$w = 8.9v$$

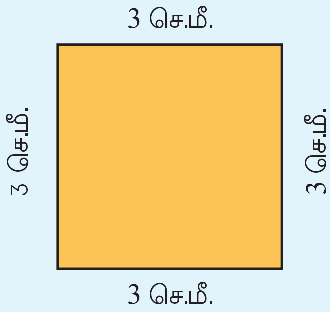
என்றாகும். பொதுவாக கூறினால் ஒரு பொருளின் எடை w, கனஅளவு v, அதை உருவாக்க பயன்படுத்தப்பட்ட பொருளின் அடர்த்தி d என்றால் இந்த அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள பொதுவான உறவை

$$w = dv$$

என எழுதலாம்.

அளவுகளின் உறவுகள்

ஒரு சதுரத்தின் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் 3 சென்டிமீட்டரானால் அதனுடைய சுற்றளவு எவ்வளவு?



பக்கத்தின் நீளம் 5 சென்டிமீட்டர் ஆனால்?

எந்த சதுரமாக இருந்தாலும் அதன் சுற்றளவு, ஒரு பக்கத்தின் நீளத்தின் நான்கு மடங்கல்லவா, இதனை எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி சுருக்கி எழுதியது நினைவிருக்கிறதல்லவா?

சதுரத்தின் பக்கத்தின் நீளத்தை s என்ற எழுத்தாலும், சுற்றளவினை p என்ற எழுத்தாலும் குறிப்பிட்டால்,

$$p = 4 \times s$$

என எழுதலாம், இவ்வாறு எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி எண்களுக்கு இடையேயுள்ள உறவை எழுதும்போது $\times$ என்ற பெருக்கல் அடையாளத்தைப் பயன்படுத்துவதில்லை. அதன் காரணத்தை நாம் அறிவோம்.

அப்பொழுது எந்த சதுரத்தினுடையவும், பக்கத்தின் நீளம் s க்கும் சுற்றளவாகிய p க்கும் இடையேயுள்ள உறவை

$$p = 4s$$

என எழுதலாம்.

சதுரத்திற்கு பதிலாக செவ்வகமானாலோ?

இரண்டு மாறுபட்ட பக்கங்களின் நீளம் தெரியுமெனில் சுற்றளவை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?

பக்கங்களின் நீளம் l, b எனவும் சுற்றளவு p எனவும் எடுத்துக்கொண்டால் p, l, b இவைகளுக்கு இடையே உள்ள உறவை எவ்வாறு எழுதலாம்?

செவ்வகத்தின் பக்கங்களின் நீளங்களுக்கும், பரப்பளவிற்கும் இடையே உள்ள உறவை எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு சுருக்கி எழுதுவாய்?

எண்களின் உறவுகள்

இந்த கணக்குகளைப் பார்க்கவும்:

$$1 + 2 = 3$$
$$2 + 3 = 5$$
$$3 + 4 = 7$$

அடுத்தடுத்த எண்ணல் எண்கள் கூட்டப்படுகின்றன. மேலும் இந்த கணக்குகளையும் பார்க்கவும்:

$$(2 \times 1) + 1 = 3$$
$$(2 \times 2) + 1 = 5$$
$$(2 \times 3) + 1 = 7$$

எண்ணல் எண்களின் இரு மடங்குடன் ஒன்று கூட்டப்படுகிறது.

இரண்டு கணக்குகளிலும் இறுதியில் ஒரே எண்கள் கிடைப்பது எதனால்?

ஏதாவதொரு எண்ணல் எண்ணை எடுத்து முதலில் கூறிய செயலைச் செய்து பார்க்கவும். எடுத்துக்காட்டாக 7 ஐ எடுக்கவும். அடுத்த எண் 8; தொகை

$$7 + 8 = 15$$

இதில் 8 ஐ $7 + 1$ என எழுதினாலோ?

$$7 + 7 + 1 = (2 \times 7) + 1 = 15$$

என காணலாம். இதில் 7க்கு பதிலாக எந்த எண்ணல் எண்ணை எடுத்தாலும் இதைப்போன்று எழுதலாம். அதாவது

> ஏதாவது ஒரு எண்ணல் எண்ணை எடுத்து அதன் அடுத்த எண்ணல் எண் உடன் கூட்டினாலும் முதல் எண்ணல் எண்ணின் இருமடங்குடன் ஒன்றை கூட்டினாலும் ஒரே எண்தான் விடையாக கிடைக்கும்.

இங்கு எண்ணல் எண்கள் மட்டும் வேண்டுமென்பதில்லை?

எடுத்துக்காட்டாக அரை என்ற பின்ன எண்ணிலிருந்து தொடங்குவோம். அதற்கு அடுத்த எண் என்று கூறுவதில் பொருளில்லை. அதனுடன் ஒன்று கூட்டிய எண் என கூறலாம். அதாவது அரையும் ஒன்றும் ஒன்றரை; அரையும் ஒன்றரையும் கூட்டினால் இரண்டு.

மாறாக, அரையின் இரண்டு மடங்கு ஒன்று, அதனுடன் ஒன்று கூட்டினால் இரண்டு, அதாவது

$$\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \left(2 \times \frac{1}{2}\right) + 1$$

அளவுகளும் எண்களும்

பலவகையான அளவுகளைக் குறிப்பிடவும் அவற்றை ஒப்புமைப்படுத்தி பார்ப்பதற்கும் மனிதன் எண்களை உருவாக்கினான். எடுத்துக் காட்டாக, "மிகப்பெரிய மக்கள் கூட்டம்" என்று கூறுவதற்கு பதிலாக, "நூறு பேர் அடங்கிய சங்கம்" என்று கூறும்போது நன்றாக தெளிவா கின்றது. அதைப்போன்று ''சிறிது தூரம் நடந்தான்'' என்பதற்கு பதிலாக ''இரண்டு கிலோமீட்டர் நடந்தான்" என தெளிவாகக் கூறலாம்.

நீளம், எடை, நேரம் இவற்றை கருவிகள் உபயோகித்து நேரடியாக அளக்கலாம். பரப்பளவு, கனஅளவு, அடர்த்தி இவையெல்லாம் நேரடியாக அளக்கப்படுபவை அல்ல, கணக்கீடு செய்து கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. அதற்கு எண்களால் ஆன கணித செயல்கள் தேவைப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக சதுரக்கட்டையின் கனஅளவு காண்பதற்கு நீளமும் அகலமும் உயரமும் அளந்து கிடைக்கும் எண்களைப் பெருக்க வேண்டும்.

காலப்போக்கில் அளவுகளுடன் தொடர்பில்லாத எண்களின் செயல்களுக்கிடையே உள்ள உறவுகளைப் பற்றியும் மனிதன் சிந்திக்கத் தொடங்கினான். எடுத்துக்காட்டாக,

ஒரு செவ்வகத்தின் சுற்றளவு காண்பதற்காக ஒவ்வொரு பக்கத்தினுடையவும் நீளத்தை அளந்து கூட்டுவதற்கு பதிலாக இரண்டு மாறுபட்ட பக்கங்களின் நீளத்தை அளந்து அவற்றின் தொகையின் இரண்டு மடங்கைக் கண்டுபிடித்தால் போதுமானதென்பதன் தொடர்ச்சியாக,

> இரண்டு எண்களை இரண்டினால் வெவ்வேறாகப் பெருக்குவதற்கு பதில் அவ்வெண்களின் தொகையை இரண்டினால் பெருக்கினால் போதுமானதாகும்.

என்ற பொதுவான எண் தத்துவம் காலபோக்கில் எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி

$$2x + 2y = 2\,(x + y)$$

எனச் சுருக்கி எழுதும் கணித மொழியையும் நாம் உருவாக்கினோம்.

எண் தத்துவங்கள்

எண்களின் செயல்களைக் குறித்து பொதுவான வற்றை எழுத்துக்களால் சுருக்கி எழுதலாம் என கூறினோமல்லவா. எடுத்துக்காட்டாக,

எந்த எண்ணுடன் 0-வைக் கூட்டினாலும் அதே எண் கிடைக்கும்,

இதனை

x என்ற எந்த எண்ணை எடுத்தாலும்

$$x + 0 = x$$

என சுருக்கி எழுதலாம்.

இதைப்போன்று இரண்டு எண்களின் தொகை காண்பதற்கு எந்த வரிசையிலும் கூட்டலாம் என்பதின் சுருங்கியவடிவமாகும்.

x, y என்ற எந்த இரண்டு எண்களை எடுத்தாலும்

$$x + y = y + x$$

இதைப்போன்று எளிமையான நடைமுறை பொதுதத்துவங்களை இவ்வாறு சுருக்கி எழுத தேவையில்லை. ஆனால், ஏதாவது எண்ணை எடுத்து அதனுடன் ஒன்று கூட்டியதைக் கூட்டினாலும் இரண்டு மடங்குடன் ஒன்று கூட்டினாலும் ஒரே எண் கிடைக்கும்.

என்று விரிவாக கூறுவதை விட

x என்ற எந்த எண்ணை எடுத்தாலும்

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

எனக் கூறலாம்.

இங்கு வேறொன்றை கவனிக்க வேண்டும். இதுபோன்ற சுருக்கெழுத்துக்களை மனதில் எளிதில் வைத்துக் கொள்ளலாம்; இருப்பினும் அவற்றை தேவைக்கேற்ப பயன்படுத்த அவற்றின் பொருளைப் புரிந்துகொள்ள வேண்டும்.

மடக்குகுடையை எளிதில் கொண்டு செல்லலா மென்றாலும் அதை விரிக்க தெரியாவிட்டால் மழையில் நனைய நேரிடும்,

எந்த பின்ன எண்ணிலிருந்து ஆரம்பித்தாலும் இப்போது கூறிய கணிதகூட்டல் சரியானதே. இங்கே மேற்கூறிய செயலை மேலும் விரிவுபடுத்தலாம்.

> ஏதேனும் ஒரு எண்ணை எடுத்து அத்துடன் ஒன்று கூட்டியதை கூட்டினாலும் இரண்டு மடங்குடன் ஒன்று கூட்டினாலும், ஒரே எண்தான் கிடைக்கும்.

எண்களுடன் தொடர்புடைய பொதுவானவற்றை எழுத்துக்கள் உபயோகித்து சுருக்கி எழுதலாம். அதற்கு முதல் எண் x எனலாம். அதனுடன் ஒன்றுகூட்டியது $x + 1$; இவற்றினுடைய தொகை $x + (x + 1)$ என எழுதலாம். மேலும் x ன் இரண்டு மடங்கு $2x$. அதனுடன் 1 கூட்டினால் $2x + 1$, அப்பொழுது எண்களைக் குறித்து நாம் கண்டறிந்தவைகளை இவ்வாறு எழுதலாம்.

x எந்த எண் ஆனாலும் $x + (x + 1) = 2x + 1$

எண்கள் தொடர்பானவைகளை எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி சுருக்கி எழுதும் முறையை இயற்கணிதம் (*algebra*) எனலாம். சிறு எடுத்துக்காட்டைப் பார்க்கவும். ஒரு எண்ணுடன் வேறொரு எண்ணைக் கூட்டி, பின் கூட்டிய எண் கழிக்கப்பட்டது. இப்பொழுது நிகழ்ந்தென்ன? பழைய எண் மீண்டும் கிடைத்தது.

முதல் எண் x என்றும் கூட்டிய எண் (பின்னர் கழித்தது) y எனவும் கொண்டால், நடந்தவற்றை இயற்கணித முறையில் எழுதலாம்.

x, y என்ற எந்த இரண்டு எண்களானாலும், $(x + y) - y = x$

இங்கு கூறியது எல்லா எண்களுக்கும் பொருந்தக்கூடிய ஒரு பொதுவான தத்துவமாகும் எனபதை நினைவில் கொள்க. சில குறிப்பிட்ட எண்களுக்கு மட்டும் பொருந்துபவை பொதுவான தத்துவங்களல்ல. எடுத்துக்காட்டாக, $2 + 2$ ம் 2×2 ம் நான்காகும். இருப்பினும் $x + x = x \times x$ என்பது ஒரு பொதுதத்துவமல்ல அல்லவா. (2ற்குப் பதில் 3 என எடுத்தால்)

இனி கீழேகொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு செயலையும் பல எண்கள் எடுத்து செய்து பார்க்கவும். விடையாக கிடைக்கும் எண்ணை வேறொரு முறையில் விவரிக்கவும். இவ்வாறு கிடைக்கும் ஒவ்வொரு உறவையும் பொதுவான தத்துவமாக சாதாரண மொழியில் எழுதுக. அதை இயற்கணித முறையில் (எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி) எழுதுக.

- ஓர் எண்ணையும் அதனுடன் இரண்டு கூடிய எண்ணையும் கூட்டவும்.
- ஓர் எண்ணுடன் ஒன்றைக் கூட்டி இரண்டை கழிக்கவும்.
- ஓர் எண்ணிலிருந்து மற்றொரு எண்ணைக் கழித்து, கழித்த எண்ணின் இரண்டு மடங்கைக் கூட்டவும்.
- ஓர் எண்ணுடன் அதன் இரண்டு மடங்கைக் கூட்டவும்.
- அடுத்தடுத்த இரண்டு எண்ணல் எண்களின் தொகையிலிருந்து 1 ஐ கழிக்கவும்.
- அடுத்தடுத்த இரண்டு ஒற்றை எண்களின் தொகை யிலிருந்து அவற்றின் மையத்தில் வரும் எண்ணை கழிக்கவும்.
- ஓர் எண்ணுடன் மற்றொரு எண்ணைக் கூட்டி முதல் எண்ணைக் கழிக்கவும்.
- ஓர் எண்ணையும் அதனுடன் வேறொரு எண்ணையும் கூட்டிக் கிடைக்கின்ற எண்ணையும் கூட்டவும்.
- ஓர் எண்ணின் 5 மடங்கிலிருந்து அந்த எண்ணின் 2 மடங்கைக் கழிக்கவும்.
- ஓர் எண்ணின் இரண்டு மடங்கையும் மூன்று மடங்கையும் கூட்டவும்.

எப்படி கூட்டினாலும்

38 + 25 + 75 எத்தனை?

வரிசைப்படி கூட்டலாம்:

$$38 + 25 = 63$$

$$63 + 75 = 138$$

இப்படியும் கூட்டலாம்:

$$25 + 75 = 100$$

$$38 + 100 = 138$$

இரண்டாவது முறைப்படி கூட்ட காகிதமும் பேனாவும் தேவையில்லை.

இனி இந்த கணக்கை முயற்சி செய்து பார்க்கவும்:

$$29 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

எந்த இரண்டு எண்களை முதலில் கூட்டுவது எளிதாகும்? இந்த இரண்டு கணக்குகளிலிருந்து கண்டறிந்ததென்ன?

மூன்று எண்களின் தொகை காண்பதற்கு முதல் இரண்டு எண்களின் தொகை கண்டு, மூன்றாவது எண்ணுடன் கூட்ட

செயல் இரண்டு பலன் ஒன்று

ஓர் எண்ணின் இரண்டு மடங்குடன் ஒன்று கூட்டுவதென்பது ஒரு கணித செயலாகும். இந்த செயல் மூலம் கிடைக்கின்ற எண் அதன் தொகையாகும். எடுத்துக்காட்டாக 3 என்ற எண்ணை எடுத்து இந்தச் செயலைச் செய்தால் 7 கிடைக்கும். இந்தச் செயல் செய்ய 10 என்ற எண் பயன்படுத்தினால் 21 கிடைக்கும்.

ஓர் எண்ணுடன் ஒன்றை கூட்டி, அந்த தொகையை எண்ணுடன் கூட்டுதல் என்பது மற்றொரு செயல் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக 4 என்ற எண்ணைப் பயன்படுத்தி இந்த செயலைச் செய்தால் $4 + (4 + 1) = 9$ கிடைக்கும்.

ஒரே எண்ணில் இவ்விரண்டு செயல்களைச் செய்தாலும் கிடைப்பது ஒரே விடைதான். இந்தச் செயலை இயற்கணித முறையில்

$$x + (x + 1) = 2x + 1$$

என சுருக்கியெழுதலாம். இதில் முதலில் எழுதிய $x + (x + 1)$ என்பது ஓர் எண்ணையும் அதனுடன் ஒன்று கூட்டிய எண்ணையும் கூட்டுதல் என்ற செயலாகும். இரண்டாவதாக எழுதிய $2x + 1$ என்பது எண்ணின் இரண்டு மடங்குடன் ஒன்றைக் கூட்ட வேண்டும் என்ற செயலாகும் இந்த இரண்டு செயல்களிலும் கிடைப்பது சமம் என்பதனை சமம் என்ற அடையாளம் காண் பிக்கின்றது.

இதே போன்று இரண்டு எண்களில் ஒவ் வொன்றினுடையவும் இரண்டு மடங்கு கண்டு பிடித்து அவற்றின் தொகை காண்க என்ற செயலை இயற்கணித முறையில் $2x + 2y$ என எழுதலாம். இரண்டு எண்களைக் கூட்டி அத்தொகையின் இரண்டு மடங்கு காண்க. இச்செயலின் இயற்கணிதவடிவம் $2(x + y)$. ஒரே ஜோடி எண்களில் இவ்விரண்டு செயல்களின் பலன் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும் என்பதன் இயற்கணித வடிவம்,

$$2x + 2y = 2(x + y)$$

இதைப் போன்று எண்களைப் பற்றிய பொதுத்தத்துவங்கள் தோற்றத்தில் வித்தியாசமான செயல்களாக இருந்தாலும் அவற்றின் விடை சமமாக இருக்கும் எனக் கூறலாம்.

எண்கணிதமும் இயற்கணிதமும்

எண்களைப்பற்றிய கல்வியைப் பொதுவாக எண்கணிதம் எனக் கூறுவர். எழுத்துக்களைப் பயன்படுத்தி இவற்றைக் குறிப்பிடுவது இயற் கணிதமும் ஆகும்.

எண்கணிதத்தில் 3 + 7 என எழுதுவது மூன்றையும் ஏழையும் கூட்டுதல் என்ற செயலைக் குறிப்பதாகும். கூட்டிக்கிடைக்கும் தொகை, அதாவது இந்த எண்களை கூட்ட வேண்டும் என்ற செயலின் பலன் பத்தாகும். செயலையும் பலனையும் சேர்த்து

$$3 + 7 = 10$$

என எழுதப்படுகிறது.

இயற்கணிதத்தில், இரண்டு எண்களைக் கூட்ட வேண்டும் என்ற செயலை $x + y$ என எழுதலாம். கூட்டிக்கிடைக்கும் தொகையை எவ்வாறு எழுதலாம்? எண்கள் தெரியாமல் தொகை காண முடியாதல்லவா. அப்போது தொகையையும் $x + y$ என்றே எழுத இயலும்.

ஆனால்

> ஓர் எண்ணை அதே எண்ணுடன் கூட்டும்போது அந்த எண்ணின் இரண்டு மடங்கு கிடைக்கிறது.

இந்த அடிப்படை உண்மையை இயற் கணித முறையில்

$$x + x = 2x$$

என்றெழுதலாம்.

இங்கு மற்றொன்றைக் கவனிக்க வேண்டும். மேலே கூறப்பட்டது ஒரு தத்துவமல்ல. இரண்டு மடங்கு (இரண்டினால் பெருக்குவது) என்ற செயலின் விளக்கம் அதாவது வரையறையாகும்,

வேண்டும் அல்லது கடைசி இரண்டு எண்களின் தொகையை முதல் எண்ணுடன் கூட்டலாம். இதனை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம்.

> ஓர் எண்ணுடன் இரண்டு எண்களை ஒன்றன்பின் ஒன்றாகக் கூட்டுவதற்குப் பதில் இவ்விரண்டு எண் களின் தொகையைக் கூட்டினால் போதுமானதாகும்.

செயல்களின் நிலைகளைத் தனியாக காட்டலாம். எடுத்துக் காட்டாக முதல் கணக்கை இவ்வாறெழுதலாம்.

$$(38 + 25) + 75 = 38 + (25 + 75)$$

இரண்டாவது கணக்கை இவ்வாறும்:

$$\left(29 + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} = 29 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

அப்பொழுது மூன்று எண்களின் கூட்டலின் பொதுத்தத்துவத்தை இயற்கணித முறையில் இவ்வாறு எழுதலாம்:

> x, y, z என்ற எந்த எண்கள் எடுத்தாலும்
>
> $$(x + y) + z = x + (y + z)$$

மேலும் $36 + 25 + 64$ ஐ கூட்டவேண்டுமென்றால்

36 யும் 64 யும் முதலில் கூட்டுவது எளிதல்லவா? இங்கு செய்ததென்ன?

$25 + 64$ க்கு பதில் $64 + 25$ என்றெழுதி மொத்த தொகை $(36 + 64) + 25$ என மாற்றப்பட்டது.

அதாவது எண்களைக் கூட்டும்போது எந்த வரிசையையும் பயன்படுத்தலாம்.

இனி கீழே தரப்பட்டுள்ள கணக்குகளை மனக்கணக்காக செய்து பார்க்கவும்.

- $49 + 125 + 75$
- $347 + 63 + 37$
- $88 + 72 + 12$
- $\frac{1}{4} + 1\frac{3}{4} + 2$
- $15.5 + 0.25 + 0.75$
- $8.2 + 3.6 + 6.4$

கூட்டலும் கழித்தலும்

மூன்று எண்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்பதற்கான பொதுத்தத்துவம் கண்டீர்களல்லவா?

கூட்டுவதற்கு பதிலாக தொடர்ச்சியாக கழித்தாலோ?

இந்த கணக்கைச் செய்து பாருங்கள்.

உண்ணியிடம் 500 ரூபாய் இருக்கிறது. அதிலிருந்து 150 ரூபாயை அப்புவிடம் கொடுத்தான். சிறிது நேரத்திற்கு பின் அபு 50 ரூபாய் கடனாக வாங்கினான். தற்போது உண்ணியிடம் எத்தனை ரூபாய் மீதி இருக்கின்றது?

அப்புவிற்கு கொடுத்த பின்னர் மீதி தொகை

$$500 - 150 = 350$$ ரூபாய்

அபுவிற்கு கொடுத்த பின்

$$350 - 50 = 300$$ ரூபாய்

வேறொரு வகையிலும் சிந்திக்கலாம். மொத்த செலவு

$$150 + 50 = 200$$ ரூபாய்

மீதியிருப்பது

$$500 - 200 = 300$$ ரூபாய்

அதாவது, இந்த செயலை $(500 - 150) - 50$ என செய்தாலும் $500 - (150 + 50)$ என செய்தாலும் ஒரே எண்தான் கிடைக்கும்.

இதே போன்று

$$(218 - 20) - 80$$

மனதில் கணக்கு கூட்டலாமா?

இங்கு நாம் கண்டதை எவ்வாறு கூறலாம்?

ஓர் எண்ணிலிருந்து இரண்டு எண்களை ஒன்றன்பின் ஒன்றாகக் கழிப்பதற்குப் பதிலாக, இவ்விரண்டு எண்களின் தொகையைக் கழித்தால் போதுமானதாகும்.

இயற்கணித முறையிலானாலோ?

x, y, z என்ற எந்த எண்களானாலும்

$$(x - y) - z = x - (y + z)$$

இரண்டு எண்களைத் தொடர்ச்சியாக கூட்டுவதற்கோ கழிப்பதற்கோ பதிலாக, ஓர் எண்ணைக் கூட்டவும் மற்றொரு எண்ணைக் கழிக்கவும் செய்தாலோ?

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

வகுப்பு ஆரம்பித்த போது 38 மாணவர்கள் இருந்தார்கள். சிறிது நேரத்திற்கு பின் மேலும் 5 மாணவர்கள் வந்தனர். சிறிது நேரம் கழித்து 3 மாணவர்கள் கணித மன்ற கூட்டத்திற்கு சென்றனர். தற்பொழுது வகுப்பில் எத்தனை மாணவர்கள் உள்ளனர்?

இச்செயல்கள் நடந்த முறைப்படி கணக்கீடு செய்வோம். மேலும் 5 மாணவர்கள் வந்தபோது

$$38 + 5 = 43$$

வித்தியாசத்தின் வித்தியாசம்

மூன்று எண்களின் கூட்டுத்தொகை காண்பதை எளிதாக செய்யலாம் என்பதால் அதன் இயற்கணித வடிவமாகிய

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

என்பதை குறிப்பாக நினைவில் வைத்துக்கொள்ள தேவையில்லை. சில சூழ்நிலைகளில் இதை பயன்படுத்தி செயல்பாட்டை எளிதாக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $29 + 37 + 63$ என்ற தொகை காணும் போது, $37 + 63 = 100$ என்பதை விரைவாக காண முடிந்தால் மொத்த தொகை 129 என்பதனை மனக்கணக்காகக் கூறலாம். (எண்களை தரப் பட்டுள்ள வரிசையில் கூட்டுவதற்கு சில நேரங் களில் காகிதமும் பேனாவும் தேவைப்படும்).

ஆனால் எண்களைக் கழிக்கும் போது கவனமாக இருத்தல் வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக

$$(10 - 3) - 2$$

என்பதன் பொருள் 10 லிருந்து 3 ஐக் கழித்து, அவ்வாறு கிடைக்கும் 7 லிருந்து 2 ஐக் கழிக்க வேண்டுமென்பதாகும். அதாவது இந்த செயலின் பலன் 5.

$$10 - (3 - 2)$$

என்றானாலோ? முதலில் 3 லிருந்து 2 ஐக் கழிக்க வேண்டும். அவ்வாறு கிடைக்கும் 1 ஐ 10 லிருந்து கழிக்க வேண்டும். அப்பொழுது பலன் $10 - 1 = 9$.

அதாவது, இந்த செயல்களிலிருந்து கிடைப்பது வித்தியாசமான பலன்களாகும். என்றால் $(10 - 3) - 2$ என்ற செயலினுடையவும் $10 - (3+2)$ என்ற செயலினுடையவும் பலன் 5 ஆகும். இதனுடைய பொதுத்தத்துவம்

$$(x - y) - z = x - (y + z)$$

அதாவது

ஒன்றன் பின் ஒன்றாக கழிப்பதற்கு பதிலாக தொகையைக் கழித்தால் போது மானது.

என நினைவில் கொள்க.

தத்துவமும் பயன்பாடும்

$25 + 20 - 15$ என்ற கணக்கைச் செய்யும் போது முதலில் கூட்டவும் பின்னர் கழிக்கவும் செய்து $45 - 15 = 30$ என்ற விடையைக் கண்டுபிடிக்கலாம். இல்லையெனில் முதலில் கழித்து பின்னர் கூட்டி $25 + 5 = 30$ எனவும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

ஆனால் $25 + 10 - 15$ என்ற கணக்கில் முதலில் கழிப்பது கடினமானது என்பதைப் புரிந்து கொள்ள முடிகின்றது.

பொதுவாக கூறினால் இதுபோன்ற செயல்களை எண்களில் செய்யும் போது சில செயல்களை செய்ய முடியாது என்பதனைப் புரிந்து கொள்ள முடிகின்றது. ஆனால் இதைக் குறித்த பொதுத் தத்துவங்களை எழுத்துக்கள் பயன்படுத்தி எழுதும்போது அவை சரியாக வேண்டிய நிபந்தனைகளையும் கூறவேண்டும்.

$$(x + y) - z = x + (y - z)$$

என எழுதும்போது $y > z$ என்ற நிபந்தனையையும் சேர்க்க வேண்டும்.

3 மாணவர்கள் சென்ற பின்னர்

$$43 - 3 = 40$$

இச்செயல்களைக் குறித்து மொத்தமாக சிந்தித்தால் இவ்வாறும் கணக்கீடு செய்யலாம். 5 மாணவர்கள் உள்ளே நுழையவும் 3 மாணவர்கள் வெளியே செல்லவும் செய்தனர். அப்பொழுது வகுப்பில் அதிகமாக உள்ளவர்கள்.

$$5 - 3 = 2$$

முதலில் இருந்தவர்கள் 38 மாணவர்கள்; தற்போது மொத்தம்

$$38 + 2 = 40$$

அதாவது, ஓர் எண்ணைக் கூட்டுவதற்கும் மற்றொரு எண்ணைக் கழிப்பதற்கும் பதிலாக முதல் எண்ணிலிருந்து இரண்டாவது எண்ணைக் கழித்து பின்னர் கூட்டினால் போதுமானது. எடுத்துக்காட்டாக,

$$(108 + 25) - 15 = 108 + (25 - 15) = 118$$

இங்கு ஒன்றைக் கவனிக்க வேண்டும். இவ்வாறு கணக்கீடு செய்வதற்கு கூட்டப்படும் எண் கழிக்கப்படும் எண்ணை விட பெரியதாக வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக இந்த கணக்கை செய்து பார்க்கவும்.

$$25 + 10 - 15$$

இதைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு முதலில் 10 லிருந்து 15ஐக் கழிக்க முடியாதல்லவா.

எனில் இதை இயற்கணித வடிவில் இவ்வாறு எழுதலாம்.

> x, y, z என்ற எந்த எண்களானாலும்
>
> $y > z$ ஆனால்
>
> $(x + y) - z = x + (y - z)$

இவற்றையெல்லாம் பயன்படுத்திக் கீழே தரப்பட்டுள்ள கணக்குகளை மனக்கணக்காகச் செய்து பார்க்கவும்:

- $(135 - 73) - 27$
- $\left(37 - 1\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$
- $(298 - 4.5) - 3.5$
- $(128 + 79) - 29$
- $(298 + 4.5) - 3.5$
- $\left(149 + 3\frac{1}{2}\right) - 2\frac{1}{2}$

கழித்துக் கூட்டும்போது

இந்தக் கணக்கைப் பார்க்கவும்.

கோபுவின் பணபெட்டியில் 110 ரூபாய் உள்ளது. பேனா வாங்குவதற்கு 15 ரூபாய் எடுத்தான். 10 ரூபாய்க்குப் பேனா கிடைத்

தது. மீதியிருந்த 5 ரூபாயை மீண்டும் பெட்டியிலிட்டான். தற்பொழுது பெட்டியில் எத்தனை ரூபாய் இருக்கிறது.?

கோபு செய்த முறைப்படி கணக்கீடு செய்யலாம்.

15 ரூபாய் எடுத்த பின்னர் பெட்டியில்

$$110 - 15 = 95 \text{ ரூபாய்}$$

5 ரூபாய் திரும்ப போட்ட பின்

$$95 + 5 = 100 \text{ ரூபாய்}$$

இச்செயல்கள் முடிந்த பின் இவ்வாறும் சிந்திக்கலாம். 15 ரூபாய் எடுக்கப்பட்டது. 5 ரூபாய் மீண்டும் இடப்பட்டது என்று கூறினால் பெட்டியில் குறைந்தது

$$15 - 5 = 10 \text{ ரூபாய்}$$

இப்போது பெட்டியில்

$$110 - 10 = 100 \text{ ரூபாய் உள்ளது.}$$

முதலில் செய்த செயல்களை (110 - 15) + 5 எனவும் இரண்டாவது செயல்களை $110 - (15 - 5)$ எனவும் எழுதினால் மேற்கூறிய கணக்கீடு இவ்வாறாகும்:

$$(110 - 15) + 5 = 110 - (15 - 5)$$

அதாவது ஓர் எண்ணைக் கழிப்பதற்கும் வேறொரு எண்ணைக் கூட்டுவதற்கும் பதிலாக முதல் எண்ணிலிருந்து இரண்டாவது எண்ணைக் கழித்ததைக் கழித்தால் போதுமானதாகும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$(29 - 17) + 7 = 29 - (17 - 7) = 19$$

கழிப்பதற்கும் கூட்டுவதற்குமான செயல்களை இவ்வாறு செய்ய முடியுமா?

$$(29 - 7) + 17$$

என்ற கணக்கில் இவ்வாறு மாற்றி எழுதி செய்ய இயலுமா?

அப்பொழுது இச்செயல் மாற்றத்தை இயற்கணித வடிவில் இவ்வாறு எழுதலாம்.

> x, y, z என்ற எந்த மூன்று எண்களானாலும்
> $y > z$ ஆனால்
> $$(x - y) + z = x - (y - z)$$

இதைப் பயன்படுத்தி சில மனக்கணக்குகள் செய்து பார்க்கலாம்:

- $(135 - 73) + 23$
- $\left(38 - 8\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$
- $(19 - 6.5) + 5.5$
- $135 - (35 - 18)$
- $4.2 - (3.2 - 2.3)$

கழிப்பது குறைந்தால்

இந்த கணக்குகளைப் பார்க்கவும்:

$$10 - 9 = 1$$
$$10 - 8 = 2$$
$$10 - 7 = 3$$
$$10 - 6 = 4$$

கழிக்கும் எண் குறையும் போது கழித்து கிடைக்கும் எண் அதிகரிப்பதைக் கண்டீர்களா?

குறைவதன் காரணமென்ன?

கழிப்பது ஒன்று குறையும் போது கழித்து கிடைப்பது ஒன்று அதிகரிக்கிறது. கழிப்பது இரண்டு குறையும் போது கழித்து கிடைப்பது இரண்டு அதிகரிக்கிறது.

சுருக்கமாக கூறினால்,

> கழிப்பது குறையும் போது கழித்து கிடைப்பது அதிகரிக்கிறது. கழிப்பது எவ்வளவு குறைந்ததோ அந்த அளவு கழித்து கிடைப்பதும் அதிகரிக்கும்.

இதை இயற்கணித வடிவிலாக்கினாலோ?

x, y என்ற இரண்டு எண்களெடுத்தால்,
x லிருந்து y கழித்தது $x - y$ ஆகும்.

இனி z என்ற மற்றொரு எண்ணை எடுத்தால், $y - z$ என்ற எண்ணில் y ஐவிட z குறைவாகும். அப்போது $x - (y - z)$ என்ற எண், $x - y$ ஐ விட z அதிகமாகும். அதாவது

$$x - (y - z) = (x - y) + z$$

தொகையும் வித்தியாசமும்

இரண்டு எண்களின் தொகையையும் வித்தி யாசத் தையும் கூட்டும்போது என்ன நிகழ் கின்றது?

எண்களின் வித்தியாசம் என்பது, அவற்றின் பெரிய எண்ணிலிருந்து சிறிய எண்ணைக் கழித்ததாகும். தொகை என்பது பெரிய எண்ணுடன் சிறிய எண ணைக் கூட்டுவதாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக 3,7 என்ற எண்களை எடுத்தோ மானால் இதன் தொகை $7 + 3$. வித்தியாசம் $7 - 3$. செயல்கள் புரிந்து இவற்றை 10, 4 என்றெழுதாமல் தொகையினுடையவும் வித்தியாசத்தினுடையவும் தொகை என எழுதினாலோ?

$$(7+3)+(7-3)$$

இதில் பெரிய எண்ணாகிய 7 இரண்டு முறை கூட்டப்படுகிறது. சிறிய எண்ணான 3 ஒரு முறை கூட்டவும் ஒரு முறை கழிக்கவும் செய்யப்படு கிறது. அப்பொழுது செயலின் பலன் $7 + 7 = 14$ என காணலாம்.

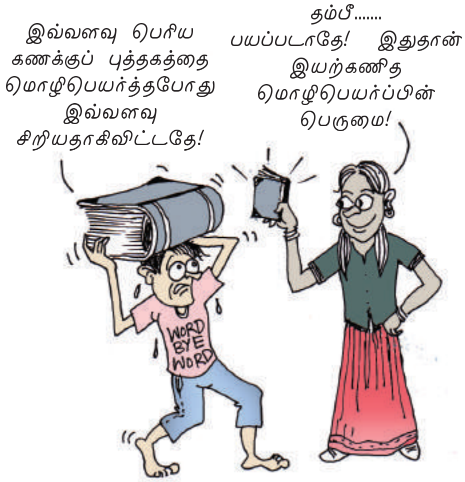
அதாவது செயலின் வரிசையை மாற்றி அமைத் தால், மேலே எழுதிய தொகையை

$$(7+3)+(7-3)=(7+7)+(3-3)=14$$

இந்தச் செயலை ஒரு பொதுவான இயற்கணித முறையில்

$$(x+y)+(x-y)=(x+x)+(y-y)=2x$$

என்று எழுதலாம்.



தொகையும் வித்தியாசமும்

அடிக்கடி சில கண்டுபிடிப்புகளுடன் அதுல்யா வகுப் பறைக்கு வருவதுண்டு. அன்றொரு புதிய வித்தையுடன் வருகிறாள். “ஏதாவது இரண்டு எண்களை மனதில் நினைத்து, அவைகளின் தொகையும், வித்தியாசமும் கூறினால் நினைத்த எண்களை நான் சொல்வேன்!” என்று கூறுகிறாள்.

“தொகை 10, வித்தியாசம் 2” என்று ரஹீம் ஆரம்பிக்கிறார்.

“எண்கள் 6, 4” சிரமமின்றி அதுல்யா கூறினாள்.

“தொகை 16, வித்தியாசம் 5” குறும்புத்தனமான ஜெஸியின் சவால்.

சிறிது நேர யோசனைக்கு பின்னர் . “ஏமாற்ற நினைக்க வேண்டாம்; எண்கள் $10\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ ” என்று அதுல்யா கூறுகிறாள்.

அதுல்யா எவ்வாறு எண்களைக் கண்டுபிடித்தாள்?

ஏதாவது இரண்டு எண்களின் தொகையையும், வித்தியாசத்தை யும் பயன்படுத்தி எண்களை காண்பது எவ்வாறு?

எண்களை x, y என எடுத்துக்கொள்வோம். அப்பொழுது தொகை $x + y$ பெரிய எண் x என எடுத்தால் வித்தியாசம் $x - y$ இவற்றை பயன்படுத்தி x, y ஐ கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$x + y$ லிருந்து x கிடைக்க y கழித்தால் போதுமானது.

$$(x + y) - y = x$$

இருப்பினும் y தெரியாதல்லவா

ஒரு x ஐ மீண்டும் கூட்டினாலோ?

$$(x + y) - y + x = x + x = 2x$$

y ஐக் கழித்து x ஐ கூட்டுவதும், x ஐ கூட்டி y ஐக் கழிப்பதும் ஒன்றல்லவா?

$$(x + y) + (x - y) = 2x$$

என்பதன் பொருளென்ன?

தொகையையும் வித்தியாசத்தையும் கூட்டினால், பெரிய எண்ணின் இரு மடங்கு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக ரஹீம் கூறிய தொகை 10 உம் வித்தியாசம் 2 உம் என்பதாகும். இவற்றை கூட்டினால் 12. இது பெரிய

எண்ணின் இரண்டு மடங்காகும். அப்பொழுது பெரிய எண் 6; சிறிய எண் $10 - 6 = 4$.

இனி ஜெஸி கூறியதைப் பார்ப்போம். தொகை 16, வித்தியாசம் 5, இவற்றின் தொகை 21. அப்பொழுது பெரிய எண் இதனுடைய பாதி $10\frac{1}{2}$. சிறிய எண் $16 - 10\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$.

அதுல்யாவின் சூத்திரத்தைப் புரிந்து கொண்டீர்களா?

இங்கு வேறொரு செயல் கூட பார்க்கவும். தொகையிலிருந்து வித்தியாசத்தைக் கழித்தாலோ

$$\begin{aligned}(x + y) - (x - y) &= (x + y) - x + y \\ &= x + y - x + y \\ &= x - x + y + y \\ &= 2y\end{aligned}$$

இதன் பொருளென்ன?

தொகையிலிருந்து வித்தியாசம் கழித்தால் சிறிய எண்ணின் இரண்டு மடங்கு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ரஹீமின் எண்களையெடுத்தால், தொகை 10, வித்தியாசம் 2. அப்பொழுது சிறிய எண்ணின் இரண்டு மடங்கு $10 - 2 = 8$; சிறிய எண், இதன் பாதி 4.

சில எண்களின் தொகையும் வித்தியாசமும் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. எண்களைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?

1. தொகை 12, வித்தியாசம் 8
2. தொகை 140, வித்தியாசம் 80
3. தொகை 23, வித்தியாசம் 11
4. தொகை 20, வித்தியாசம் 5

கூட்டலும் பெருக்கலும்

ஓர் எண்ணின் இரண்டு மடங்கும் அந்த எண்ணின் மூன்று மடங்கும் கூட்டினால் எண்ணின் ஐந்து மடங்கு கிடைக்குமென கண்டோமல்லவா? (**எண் உறவுகள்** என்ற பகுதியில் கடைசி கணக்கு) இப்பொழுது கூறியதின் இயற்கணித வடிவம் எது?

x என்ற எந்த எண்ணை எடுத்தாலும்

$$2x + 3x = 5x$$

பல்வேறு வழிமுறைகள்

இந்த கணக்கைப் பார்க்கவும்.

> ஒரு புத்தகத்தினுடையவும் பேனாவினுடையவும் விலை 16 ரூபாய். புத்தகத்திற்கு பேனாவைவிட 10 ரூபாய் விலை அதிகமாகும். ஒவ்வொன்றினுடையவும் விலை காண்க?

புத்தகத்தையும் பேனாவையும் மாற்றி வைத்துவிட்டு, இவற்றின் விலைகளை வெறும் எண்களாக பார்த்தோமானால் இந்த பிரச்சினை இவ்வாறாகும்.

இரண்டு எண்களின் தொகை 16, வித்தியாசம் 10 எண்கள் எவையெல்லாம்?

பெரிய எண்ணின் இரண்டு மடங்கு $16 + 10 = 26$; பெரிய எண் 13. அப்படியானால் சிறிய எண் $16 - 13 = 3$ அதாவது, புத்தகத்தின் விலை 13 ரூபாய், பேனாவின் விலை 3 ரூபாய்.

வேறொரு வகையிலும் சிந்திக்கலாம். ஒரு புத்தகமும் பேனாவும் வாங்கினால் 16 ரூபாய். இதற்கு பதில் இரண்டு புத்தகங்களை மட்டும் வாங்கினாலோ?

புத்தகத்திற்கு பேனாவைவிட 10 ரூபாய் அதிகம் அல்லவா? அப்பொழுது 10 ரூபாய் அதிகமாக கொடுக்க வேண்டும். அதாவது, $10 + 16 = 26$ ரூபாய் கொடுக்க வேண்டும்.

இது இரண்டு புத்தகங்களின் விலையாகும். அப்பொழுது ஒரு புத்தகத்தின் விலை 13 ரூபாய்.

நாள்காட்டி கணக்கு

நாள்காட்டியில் ஒரு மாதத்தை எடுத்து சதுரத்தினுள் வரும் நான்கு எண்களை அடையாளப்படுத்தவும்:

ஞாயிறு	திங்கள்	செவ்	புதன்	வியா	வெள்ளி	சனி
			1	2	3	4
5	6	7	(8)	(9)	10	11
12	13	14	(15)	(16)	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

இந்த நான்கையும் கூட்டினால் $8+9+15+16=48$ இதனை நான்கால் வகுத்து நான்கை கழித்துப் பார்க்கவும். முதல் எண்ணாகிய 8 கிடைத்த தல்லவா?

இதை போன்று வேறு நான்கு எண்களை எடுத்துப் பார்க்கவும்?

இது எதனால்?

முதல் எண் x என எடுத்தால் அடையாளப் படுத்திய எண்கள் இவ்வாறாகும்.

x	$x+1$
$x+7$	$x+8$

இவற்றின் தொகை

$$x+(x+1)+(x+7)(x+8)=4x+16$$

இதனை மாற்றி எழுதினால்

$$4x+16 = (4\times x)+(4\times 4)$$

$$= 4(x+4)$$

அதாவது முதல் எண்ணுடன் 4ஐ கூட்டி, பின் 4-ஆல் பெருக்கியது தொகையாகும். அப்பொழுது முதல் எண் மீண்டும் கிடைக்க, 4-ஆல் வகுத்து, பின் 4ஐ கழிக்க வேண்டும்.

இதனை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம்.

2 யும் 3 யும் ஒரே எண்ணால் தனித்தனியாக பெருக்கி, கூட்டுவதற்கு பதிலாக 5-ஆல் பெருக்கினால் போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டாக, $(2\times 16)+(3\times 16)=5\times 16=80$

இதில் 2, 3 என்பதற்கு பதில் வேறு எண்களானாலோ? இந்த கணக்கை பார்க்கவும்.

கணித மாநாட்டில் கலந்துரையாடல்கள் நடப்பது இரண்டு அறைகளிலாகும். ஒரு அறையில் 40 பேரும் மற்றொரு அறையில் 35 பேரும் உள்ளனர். ஒவ்வொருவருக்கும் 2 பிஸ்கட் கொடுக்க வேண்டியுள்ளது. மொத்தம் எத்தனை பிஸ்கட் தேவைப்படும்?

முதல் அறையிலுள்ள 40 பேருக்கு தேவைப்படும் பிஸ்கட்

$$2\times 40 = 80$$

இரண்டாவது அறையிலுள்ள 35 பேருக்கு தேவைப்படும் பிஸ்கட்

$$2\times 35 = 70$$

மொத்தம் தேவைப்படும் பிஸ்கட்

$$80+70 = 150$$

வேறொரு முறையிலும் சிந்திக்கலாம். இரண்டு அறை களிலும் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை

$$40+35 = 75$$

அப்பொழுது தேவைப்படும் பிஸ்கட்களின் எண்ணிக்கை

$$2\times 75 = 150$$

இங்கே நாம் பார்த்தது என்ன? 40யும் 35யும் இரண்டால் தனித்தனியாகப் பெருக்கிக் கூட்டுவதற்குப் பதில் அவற்றின் தொகையாகிய 75ஐ 2 ஆல் பெருக்கினால் போதுமானது.

பின்ன எண்களின் பெருக்கலிலும் இது சரியாகும். எடுத்துக் காட்டாக 4 இன் பாதியையும் 6 இன் பாதியையும் கூட்டினால் $2+3=5$. தொகையாகிய 10ன் பாதியை எடுத்தாலும் 5 தான்.

இங்கே காணும் பொதுவான உறவு என்ன?

இரண்டு எண்களைப் பத்தடிமான எண்ணால் தனித்தனியே பெருக்கிக் கூட்டினாலும் எண்களின் தொகையைப் பெருக்கி னாலும் கிடைப்பது சமமாகும்.

சுருக்கமாகக் கூறினால் (ஒரே எண்ணால்) பெருக்கிக் கூட்டு வதும் கூட்டி பெருக்குவதும் ஒன்றேயாகும்.

இயற்கணித முறையில் கூறினாலோ?

> x, y, z என்ற எந்த எண்களானாலும்
>
> $$xz + yz = (x + y)\,z$$

கூட்டுவதற்கு பதில் கழித்தாலோ?

> இரண்டு எண்களை பத்தடிமான எண்ணால் தனித்தனியே பெருக்கி கழித்தாலும், எண்களின் வித்தியாசத்தை மூன்றாவது எண்ணினால் பெருக்கினாலும் கிடைப்பது சமமாகும்.

இயற்கணித வடிவில் கூறினால்

> x, y, z என்ற எந்த எண்களானாலும்
>
> $$xz - yz = (x - y)\,z$$

இனி இந்த கணக்குகளைச் செய்து பார்க்கவும்:

- $(63 \times 12) + (37 \times 12)$
- $\left(15 \times \frac{3}{4}\right) + \left(5 \times \frac{3}{4}\right)$
- $\left(\frac{1}{3} \times 20\right) + \left(\frac{2}{3} \times 20\right)$
- $(65 \times 11) - (55 \times 11)$
- $\left(2\frac{1}{2} \times 23\right) - \left(1\frac{1}{2} \times 23\right)$
- $(13.5 \times 40) - (3.5 \times 40)$

செய்து பார்ப்போம்

- கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள செவ்வகத்தில் ஒரு சதுரத்தில் வரும் ஏதாவது 9 எண்களை எடுக்கவும். அவற்றின் தொகைக்கும் சதுரத்தின் மையத்தில் வரும் எண்ணிற்கும் இடையே உள்ள உறவைப் ஆராயவும். இந்த உறவை இயற்கணித முறையைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

அடுத்ததாக 25 எண்கள் உள்ள சதுரங்களை எடுத்துப் பார்க்கவும்.

வேறொரு நாள்காட்டி கணக்கு

நாள்காட்டியில் நான்கு எண்கள் கொண்ட சதுரத்திற்கு பதிலாக 9 எண்களைக் கொண்ட சதுரத்தை எடுத்துப் பார்க்கவும்:

ஞாயிறு	திங்	செவ்	புதன்	வியா	வெள்ளி	சனி
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

இவற்றின் தொகை 144. இது 16 இன் 9 மடங்காகும். இதுபோன்ற வேறு சதுரங்களிலும் இம்முறை சரியாகுமா என பாருங்கள்.

இது எதனால் என்று தெரிந்து கொள்ள மையத்திலுள்ள எண்ணை x என்று எடுக்கவும். அப்போது சதுரத்தின் வேறு சில எண்களை இவ்வாறு எழுதலாம்

	$x-7$	
$x-1$	x	$x+1$
	$x+7$	

$x-8$	$x-7$	$x-6$
$x-1$	x	$x+1$
$x+6$	$x+7$	$x+8$

இதில் $x-8$, $x+8$ என்றிவ்வாறான ஜோடிகளை கவனித்தால், இதன் தொகை $9x$ என்பதை காணலாம். அதாவது மையத்திலுள்ள எண்ணின் 9 மடங்காகும்.

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்படுத்த வேண்டியுள்ளது
• எண் செயல்களின் பொதுத் தத்துவங்களை கண்டடைதல்.			
• செயல்களின் தத்துவங்களை மொழி வடிவில் எழுதுதல்.			
• எண் உறவுகளையும் செயல் தத்துவங்களையும் எழுத்துக்களையும் பயன்படுத்தி குறிப்பிடுதல்.			
• செயல்பாடுகளை எளிதாக்குவதற்கு பொதுத்தத்துவங்களைப் பயன்படுத்துதல்.			

4

மீண்டும் மீண்டும் பெருக்கல்

பெருக்கலும் அளவும்

இது ஒரு பழைய கதை. ஒரு செல்வந்தர் உதவி கேட்டு வந்தவரிடம் இவ்வாறு சொன்னார். ''ஒவ்வொரு நாளும் 1000 ரூபாய் வீதம் 30 நாட்களுக்கு தருவேன் அல்லது முதல்நாள் ஒரு பைசா, இரண்டாவது நாள் இரண்டு பைசா, மூன்றாவது நாள் நான்கு பைசா என ஒவ்வொரு நாளும் இரு மடங்காக 30 நாள் தருகிறேன். எது வேண்டும்?''

எது நல்லது?

நாம் பார்போமா.

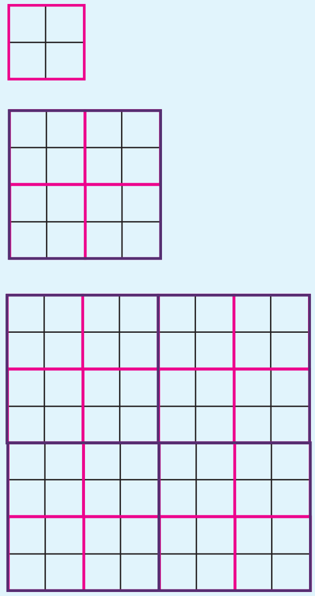
முதல் முறையிலானால் 30 நாட்களில் 30000 ரூபாய் கிடைக்கும். இரண்டாவது முறையாக இருந்தால்?

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...$

என்றிவ்வாறு 30 எண்கள் கூட்டிக் கிடைக்கும் காசுகள். இது எவ்வளவு? 1073741823 காசுகள். அதாவது 1 கோடிக்கும் அதிகமான ரூபாய்.

பெருக்கிப் பெருக்கி

இப்படங்கள் பார்க்கவும்:



முதல் படத்தில் எத்தனை கட்டங்கள் உள்ளன?

இரண்டாவதும், மூன்றாவதும் படங்களிலோ?

இதே முறையில் வரைந்தால் அடுத்த படத்தில் எத்தனைக் கட்டங்கள் இருக்கும்?

இதை இம்முறையில் காணலாம்.

முதலாவது படம் நான்கு சிறிய சதுரங்கள் சேர்ந்த சதுரம் ஆகும். இத்தகைய நான்கு சதுரங்கள் சேர்ந்ததே இரண்டாவது படம். அவ்வாறு அதில் $4 \times 4 = 16$ சிறிய சதுரங்கள்.

இரண்டாவது சதுரத்தைப் போன்று நான்கு சதுரங்கள் சேர்ந்தே மூன்றாவது படம். அதாவது அதில் $16 \times 4 = 64$ சிறிய சதுரங்கள். அடுத்த சதுரத்திலோ?

மொத்தம் $64 \times 4 = 256$ சிறியசதுரங்கள். இதனை இவ்வாறும் கூறலாம்.

சிறிய சதுரங்களின் எண்ணிக்கை

முதல் படத்தில் 4

இரண்டாவது படத்தில் 4×4

மூன்றாவது படத்தில் $4 \times 4 \times 4$

அவ்வாறெனில் 10ம் படத்திலோ?

இதனை $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$

என்று விவரித்தெழுதாமல் சுருக்கமாக 4^{10} என எழுதலாம். படிக்கும்போது 4ன் அடுக்கு 10 ("4 raised to 10") எனவும், கணினி பயன்படுத்தி இந்த எண் 1048576 எனவும் கூறலாம்.

மேலும் படங்களிலுள்ள சதுரங்களின் எண்ணிக்கை 4, 4^2, 4^3,... இவ்வாறு எனவும், அவ்வாறு 20வது படத்தில் 4^{20} நூறாவது படத்தில் 4^{100} கட்டங்கள் என்றெல்லாம், சொல்வதும், எழுதுவதும் எளிமையாக இருக்குமெல்லவா?

இந்த எண்களைக் கணக்கிட்டு கண்டுபிடிப்பதற்கு சிரமமாக இருந்தால் கணினியைப் பயன்படுத்தவும் செய்யலாம்.

இங்கு நாம் கண்ட 4, 4^2, 4^3, 4^4,.. என்பவற்றை 4ன் அடுக்குகள் என்று கூறுவர்.(powers of 4)

4^2 என்பது 4ன் இரண்டாம் அடுக்கு, 4^3 என்பது 4ன் மூன்றாம் அடுக்கு என்பதாகும்.

4 என்பதை தேவையானால் 4^1 என எழுதலாம். அப்பொது 4ன் ஒன்றாம் அடுக்கு 4 என்றும் கூறலாம்.

4^3 ல் 3 ஐ படி (exponent) எனக் கூறலாம்.

ஓர் எண்ணின் இரண்டாம் அடுக்கை அதன் வர்க்கம் (square) என்றும் மூன்றாம் அடுக்கை கனம் (cube) என்றும் அழைப்பதுண்டு.

அடுக்குகளாக்குதல்

மீண்டும் மீண்டும் கூட்டும் செயலை பெருக்கல் என்று கூறுவது போல் மீண்டும் மீண்டும் பெருக்கல் செயலை அடுக்குகளாக்குதல் (exponentiation) என்றும் கூறலாம்.

சில எடுத்துக்காட்டுகளையும் பார்க்கலாம்.

மூன்றின் அடுக்கு எவையெல்லாம்?

$3^1, 3^2, 3^3$,... என்று ஒவ்வொன்றாகப் பெருக்கி கண்டு பிடிக்கலாம்.

$$3^1 = 3$$
$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$
$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 3 = 27$$

என்று ஒவ்வொன்றாகப் பெருக்கி கண்டுபிடிக்கலாம்.

3^6 கண்டு பிடிக்க வேண்டுமென்றால்?

இவ்வாறு ஒன்றன் பின் ஒன்றாக கண்டுபிடிப்பதற்குப் பதிலாக எளிய முறையில் கண்டுபிடிப்பதற்கு வழி உள்ளதா என்று பார்க்கலாம்.

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

ஒவ்வொன்றாக பெருக்குவதற்கு பதில் மூன்று வீதம் பெருக்கினால்

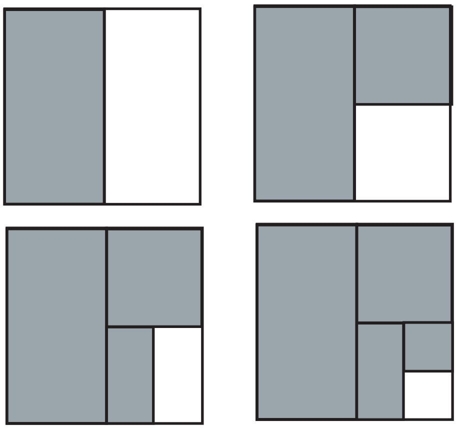
அடுக்குகளாக்குதல்

கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் என்ற நான்கு செயல்களை நாம் சாதாரணமாக கணிதத்தில் பயன்படுத்துகிறோம். ஐந்தாவது செயல்பாடு அடுக்குகளாக்குதல் (exponentiation). எண்ணல் எண்களைக் கொண்ட பெருக்கல் தொடர் கூட்டல் ஆவது போல் அடுக்குகளாக்குதல் தொடர் பெருக்கலாகும்.

கணிதச் செயல்களை எழுதும் போது (+, −, ×, ÷) எண்களுக்கிடையே ஒரு குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவது போல் அடுக்குகளாக்குதல் என்ற செயலுக்கு குறியீடு ஒன்றும் கிடையாது. பெருக்கப்படும் எண்ணின் வலது மேற்பகுதியில் எத்தனை முறை பெருக்குகிறோம் என்பதைக் குறிக்கும் எண்ணை சற்று சிறியதாக எழுதுவது தான் முறை.

எடுத்துக்காட்டாக : $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

படிகளின் தொகை



ஒவ்வொரு படத்திலும் உள்ள பெரிய சதுரத்தின் எவ்வளவு பாகம் நிழலிடப்பட்டுள்ளது?

முதலாவது படத்தில் $\frac{1}{2}$ பாகம்

இரண்டாவதிலோ

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

வேறொரு முறையிலும் காணலாம்.

நிழலிடப்படாதது $\frac{1}{4}$ பாகம்

அப்படியானால், நிழலிடப்பட்டது

$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ பாகம்.

இங்கு கண்டது என்ன?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{4}$$

இதைப்போன்று மூன்றாவது படத்திலிருந்தும்

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$

நான்காவது படத்திலிருந்தும்

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$

இவ்வாறு மேலும் முன்னோக்கி செல்லாமல்லவா?

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 1 - \frac{1}{2^4}$

பொதுவாகக் கூறினால் $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}$ இது போன்ற ஏராளம் அடுக்குகளின் தொகை 1 லிருந்து கடைசி அடுக்கைக் கழிப்பதாகும்.

$3^6 = (3 \times 3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= 27 \times 27$

$= 729$

மேலும் 2^9 காண வேண்டுமெனிலோ?

$2^9 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= 16 \times 32$

$= 512$

வேறு ஏதேனும் முறையில் இதைக் கண்டுபிடிக்கலாமா?

மேலும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அடுக்குகளைக் காண்க.

- 2^6
- 3^8
- 4^4
- 2^9
- 10^6
- 1^{10}
- 100^4
- 0^{20}

பத்தின் அடுக்குகள்

10 ன் அடுக்கு எவையெல்லாம்?

$10, 10^2, 10^3, \ldots$ என்று இவ்வாறல்லவா?

இவற்றைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டுமானால்

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

10^8 எத்தனை?

இதைப்போன்று 20ன் அடுக்குகள் கண்டுபிடிக்கலாமா?

20^4 எவ்வாறு கண்டுபிடிப்பாய்?

$20^4 = 20 \times 20 \times 20 \times 20$

$= (2 \times 10) \times (2 \times 10) \times (2 \times 10) \times (2 \times 10)$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10)$

$= 16 \times 10000 = 160000$

$2^4 \times 5^5$ எவ்வளவு?

இதனை $(2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5)$ என்று எழுதலாம்.

இதை மாற்றி எழுதினால்

$(2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times 5$

$= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 5$

$= 10^4 \times 5 = 50000$

100^3 எவ்வளவு?

$100^3 = 100 \times 100 \times 100$

$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ என்று எழுதினால்

$$100^3 = 10^6$$
$$= 1000000$$

இனி கீழ்வரும் வினாக்களுக்கு விடை கண்டு பிடிக்கலாமல்லவா?

- நூறு, ஆயிரம், பத்தாயிரம், இலட்சம், பத்துலட்சம், கோடி, இவையனைத்தையும் பத்தின் அடுக்குகளாக எழுதவும்.
- கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அடுக்குகளைக் கணக்கிடவும்
  - 30^4
  - 50^5
  - 200^3

இடமதிப்பு

3675 என்பதை இடமதிப்பிற்கேற்ப எவ்வாறு பிரித்து எழுதலாம்?

$$(3 \times 1000) + (6 \times 100) + (7 \times 10) + 5$$

பத்தின் அடுக்குகள் பயன்படுத்தி இதனை

$$(3 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (7 \times 10) + 5$$

என்றும் எழுதலாம்.

இதுபோன்று கீழேயுள்ள எண்களைப் பிரித்து எழுதலாமா?

- 4321
- 732
- 1221
- 60504

தசம வடிவிலுள்ள எண்கள் ஆனாலோ?

362.574 என்ற எண்ணை எவ்வாறு பிரித்து எழுதலாம்?

$$362.574 = (3 \times 100) + (6 \times 10) + 2 + \left(5 \times \frac{1}{10}\right) + \left(7 \times \frac{1}{100}\right) + \left(4 \times \frac{1}{1000}\right)$$

இதனை

$$(3 \times 10^2) + (6 \times 10) + 2 + \left(5 \times \frac{1}{10}\right) + \left(7 \times \frac{1}{10^2}\right) + \left(4 \times \frac{1}{10^3}\right)$$

என்றும் எழுதலாமல்லவா.

இது போன்று கீழ்வரும் எண்களையும் பிரித்து எழுதிப் பாருங்கள்.

- 437.54
- 23.005
- 4567
- 201

காரணிப்படுத்துதல்

எந்த எண்ணல் எண்ணையும் பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதலாமல்லவா? எடுத்துக்காட்டாக 72ஐ எடுத்துக் கொண்டால்

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ என்று எழுதலாம்.

அடுக்குகளைப் பயன்படுத்தி எழுதினால்

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

வேறொரு தொகை

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

என்று பார்த்தோமல்லவா.

இதன் இரண்டு பக்கமும் 8 ஆல் பெருக்கினால்

$$8\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 8\left(1 - \frac{1}{8}\right)$$

அதாவது

$$\left(8 \times \frac{1}{2}\right) + \left(8 \times \frac{1}{4}\right) + \left(8 \times \frac{1}{8}\right) = 8 - \left(8 \times \frac{1}{8}\right)$$
$$4 + 2 + 1 = 8 - 1$$

இதேபோல் $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$ என்பதின் இருபக்கங்களிலும் 16-ஆல் பெருக்கினால்

$$8 + 4 + 2 + 1 = 16 - 1$$

வரிசையை மாற்றி எழுதினால்

$$1 + 2 + 4 = 8 - 1$$
$$1 + 2 + 4 + 8 = 16 - 1$$

அதாவது

$$2 + 4 = 8 - 2$$
$$2 + 4 + 8 = 16 - 2$$

இதனை அடுக்குகளாக எழுதினால்

$$2 + 2^2 = 2^3 - 2$$
$$2 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 2$$

இவ்வாறு மேலும் முன்னோக்கி செல்லலாம் அல்லவா.

பொதுவாகக் கூறினால் $2, 2^2, 2^3$ என்று இவ்வாறான அடுக்குகளின் தொகை, அடுத்த அடுக்கிலிருந்து 2 கழிப்பதாகும்.

அறிவியலில் எண்கள்

அறிவியலில் அடிக்கடி மிகப்பெரிய எண்களைப் பயன்படுத்த வேண்டிய சூழ்நிலை வரும். எடுத்துக்காட்டாக பூமிக்கும் சூரியனுக்கும் இடையேயுள்ள சராசரி தூரம் 149000000 கிலோ மீட்டராகும். இந்த எண் அறிவியல் முறைப்படி (scientific notation) எழுதுவது 1.49×10^8 என்றாகும். இது போல் ஒளி வருடத்திற்குப் பயணம் செய்யும் தூரம் சுமார் 9.46×10^{17} கிலோ மீட்டர் என்று கணக்கிடப்படுகிறது.

இந்த தூரத்தை நாம் 1 ஒளி வருடம் என்று கூறுகிறோம். நட்சத்திரங்களின் தூரத்தைக் கூறும் போதும் ஒளி வருடத்தில் தான் கூறப்படுகிறது. பூமிக்கு மிக அருகிலுள்ள நட்சத்திரம் சூரியன் அல்லவா. அதற்கு அடுத்த நட்சத்திரம் புரோக்ஸிமா ஸென்டோரி (Proxima centauri) ஆகும். இந்த நட்சத்திரங்களுக்குள்ள தூரம் சுமார் 4.22 ஒளி வருடமாகும். அதாவது சுமார் 3.99×10^{18} கிலோ மீட்டராகும்.

இதனை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். இந்த நட்சத்திரத்திலிருந்து வெளிவருகின்ற ஒளிக்கதிர்கள் பூமியில் வந்தடைவதற்கு நான்கு வருடத்திற்கு மேலாகும். அதாவது இன்று பூமியிலிருந்து நாம் காண்பது இந்த நட்சத்திரத்தின் 4 வருடங்களுக்கு முன்புள்ள நிலையேயாகும். அப்போது இந்த நட்சத்திரம் அழிந்து போனாலும் 4 வருடங்களுக்கு மேல் அதனுடைய ஒளிக்கதிர்களைக் காணலாம்.

இதுபோல 1000 ஐ எவ்வாறு எழுதலாம்?

$$1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$$
$$= 2^3 \times 5^3$$

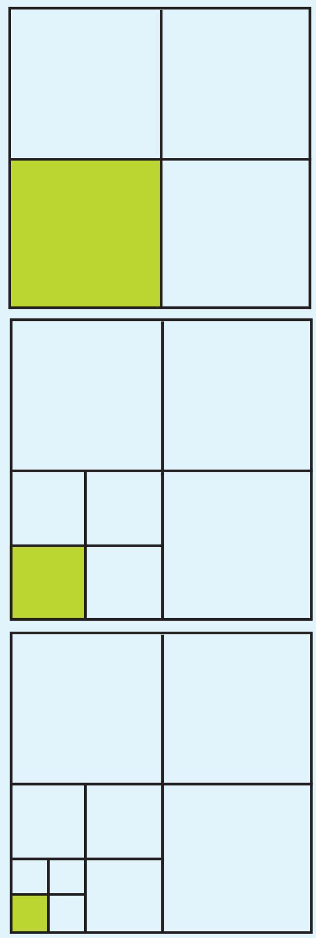
இனி கீழே கொடுத்திருக்கின்ற எண்களை இதே போல் பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலனாக எழுதிப் பாருங்கள்.

- 36
- 225
- 500
- 784
- 750
- 625
- 1024

பின்ன அடுக்குகள்

இந்தப் படத்தைப் பாருங்கள்.

முதல் படத்தில் சதுரத்தின் எத்தனை பாகங்கள் நிறம்



கொடுக்கப்பட்டுள்ளது?

இரண்டாவது படத்தில்?

$\frac{1}{4}$ ன் $\frac{1}{4}$ பாகம்.

அதாவது

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \text{ பாகம்}$$

மூன்றாவது படத்தில் இதன் $\frac{1}{4}$ பாகம்

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64} \text{ பாகம்}$$

இது மூன்று $\frac{1}{4}$ களை ஒன்றோடொன்று பெருக்கியரால்அல்லவா?

இந்த முறையில் தொடர்ந்தால் அடுத்த படத்தில் எத்தனை பாகம் நிறம் கொடுக்க வேண்டும்?

ஐந்தாவது படத்திலோ?

ஐந்து $\frac{1}{4}$ களைப் பெருக்க வேண்டும்.

இதனை $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ என்று சுருக்கி எழுதலாமல்லவா.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4\times4\times4\times4\times4}$$

$$= \frac{1}{4^5}$$

$$= \frac{1}{64\times16}$$

$$= \frac{1}{1024}$$

அதாவது ஐந்தாவது படத்தில் மொத்தம் சதுரத்தின் $\frac{1}{1024}$ பாகம் மட்டுமே நிறம் கொடுக்க வேண்டும்.

எந்தவொரு பின்ன எண்ணினுடையவும் தொடர்ந்து வரும் பெருக்கலை இதுபோல அடுக்காக எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{3\times3\times3}{5\times5\times5} = \frac{3^3}{5^3}$$

$$= \frac{27}{125}$$

ஒரு எடுத்துக்காட்டைப் பார்ப்போம்.

$$\left(2\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{12}{5}\right)^3$$

$$= \frac{12}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{12}{5}$$

செயல்திட்டம்

கடைசி இலக்கம்

10 ன் எல்லா அடுக்குகளுடையவும் கடைசி இலக்கம் 0 ஆகுமல்லவா. 5 ன் அடுக்கு களுடைய கடைசி இலக்கம்?

6 ன் அடுக்குகளானாலோ?

4 ன் அடுக்குகளைக் காண்க?

கடைசி இலக்கம் எல்லா அடுக்குகளுக்கும் ஒரே போன்றதா?

அப்படியென்றால் கடைசி இலக்கம் எவை யெல்லாம்?

இதுபோன்ற பிற ஓரிலக்க எண்களின் அடுக்கு களைப் ஆராய்ந்துப் பாருங்கள்.

மேலும் ஒரு வினா. 2^{100} ன் கடைசி இலக்கம் எது?

கூடுமா? குறையுமா?

2 ன் அடுக்குகளான 2, 4, 8, 16, ... என்பவை மிக விரைவில் பெரிதாவதைக் கண்டோம். வேறு எண்களின் அடுக்குகளும் இதைப் போன்று பெரிதாகி கொண்டிருக்குமா?

$\frac{1}{2}$ ன் அடுக்குகளை எடுத்துப் பார்த்தால்?

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, ... இது சிறியதாகிக் கொண்டு வருகிறது.

$\frac{2}{3}$ ன் அடுக்குகளானால்?

$\frac{3}{2}$ ன் அடுக்குகளானால்?

எந்தெந்த எண்களுக்கு அடுக்குகள் பெரியதாகிக் கொண்டிருக்கும்?

எந்தெந்த எண்களுக்கு அடுக்குகள் சிறியதாகிக் கொண்டிருக்கும்?

அப்படியானல், 1 ன் அடுக்குகள்?

$$= \frac{1728}{125} = 13\ \frac{103}{125}$$

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அடுக்குகளை இதைப்போன்று கண்டுபிடியுங்கள்.

- $\left(\frac{2}{3}\right)^5$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^4$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
- $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$

தசம எண்களின் அடுக்குகள்

$(1.2)^2$ எவ்வளவு?

$$(1.2)^2 = 1.2 \times 1.2$$
$$= 1.44$$

இதைப்போன்று $(1.5)^3$ கண்டுபிடிக்கவும்.

$(0.2)^4$ எவ்வளவு?

$2^4 = 16$ என்று தெரியுமல்லவா?

0.2 என்பதை $\frac{2}{10}$ என்று எழுதலாம். அப்போது,

$$(0.2)^4 = \left(\frac{2}{10}\right)^4$$
$$= \frac{2^4}{10^4}$$
$$= \frac{16}{10000}$$
$$= 0.0016$$

இது மனக்கணக்காக செய்யலாமல்லவா?

$(0.3)^3$ எத்தனை என்று மனக்கணக்காகக் கூறலாமா?

3^3 எவ்வளவு?

$(0.3)^3$ ல் எத்தனை தசம எண்கள் இருக்கும்?

$12^3 = 1728$ ஆகும். இதிலிருந்து $(1.2)^3$, $(0.12)^3$ என்பவற்றைக் கண்டுபிடிக்கலாமல்லவா?

இதைப்போன்று கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அடுக்குகளின் மதிப்பைக் கண்டுபிடியுங்கள்.

- $(1.1)^3$
- $(0.02)^5$
- $(0.1)^6$

$16^3 = 4096$ ஐப் பயன்படுத்தி கீழேயுள்ள அடுக்குகளின் மதிப்பைக் கண்டுபிடியுங்கள்.

- $(1.6)^3$
- $(0.16)^3$
- $(0.016)^3$

பெருக்கல் விதி

ஓர் எண்ணினுடைய இரண்டு பெருக்கற்பலன்களின் தொகையை அதே எண்ணின் வேறொரு பெருக்கலாக எழுதுவதற்கு நமக்கு தெரியும்.

$$(3 \times 2) + (5 \times 2) = (3 + 5) \times 2 = 8 \times 2$$

இது எப்படி சரியாகின்றது?

$$3 \times 2 = 2 + 2 + 2$$

$$5 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

எனில்

$$\begin{aligned}(3 \times 2) + (5 \times 2) &= (2 + 2 + 2) + (2 + 2 + 2 + 2 + 2)\\ &= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2\\ &= 8 \times 2\end{aligned}$$

இதைப்போன்று அடுக்குகளின் பெருக்கற்பலன் கண்டுபிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக $2^3 \times 2^5$ என்பதைப் பார்ப்போம்.

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2$$

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

எனில்

$$\begin{aligned}2^3 \times 2^5 &= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)\\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2\\ &= 2^8\end{aligned}$$

இங்கே 2ற்குப் பதிலாக வேறு ஏதாவது ஒரு எண்ணின் மூன்றாம் அடுக்கும் ஐந்தாம் அடுக்கும் பெருக்குவ தென்றாலோ?

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 &= \left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^8\end{aligned}$$

நாம் எடுக்கும் எண்ணை x என்ற எழுத்தினால் குறிப்பிட்டாலோ?

$$\begin{aligned}x^3 \times x^5 &= (x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x \times x)\\ &= x \times x \times x \times x \times x \times x \times x \times x = x^8\end{aligned}$$

பெருக்கலும் அடுக்குகளும்

m ஒரு எண்ணல் எண்ணும் x ஏதாவது ஒரு எண்ணுமானால், (எண்ணல் எண்ணோ, பின்ன எண்ணோ) ஆனால் mx அதாவது $m \times x$ ன் பொருள் m எண்ணிக்கை x கூட்டவேண்டும் என்றல்லவா. x^m என்பதன் பொருள் m எண்ணிக்கை x பெருக்கவும் என்பதாகும்.

ஒரு எண்ணை எண்ணல் எண்களால் பெருக்கி கூட்டுவதினுடையவும், அடுக்குகள் பெருக்கு வதினுடையவும் விதிகள் காண்க:

$$mx + nx = (m + n)x$$

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

ஓர் எண்ணைப் பின்ன எண்களைக் கொண்டு பெருக்கலாம். அது தொடர் கூட்டல் அல்ல. அதைப் பொறுத்து m, n இவை பின்ன எண்களானாலும் $mx + nx = (m + n)x$ என்பது சரியாகும். ஆனால் n பின்ன எண் எனில் x^n என்பதற்கு தற்பொழுது பொருள் ஒன்றும் இல்லை.

இரண்டின் மடங்குகளும் அடுக்குகளும்

இரண்டின் அடுக்குகள் எல்லாம் இரட்டை எண்களாகும். ஆனால் இரட்டை எண்கள் எல்லாம் இரண்டின் அடுக்குகள் அல்ல என்பது நமக்குத் தெரியும்.

எடுத்துக்காட்டாக 6 இரட்டை எண்ணாகும். இரண்டின் அடுக்கு அல்ல. ஆனால்,

$$6 = 2 + 4 = 2^1 + 2^2$$

இதைப்போன்று,

$$10 = 2 + 8 = 2^1 + 2^3$$

$$12 = 4 + 8 = 2^2 + 2^3$$

$$14 = 2 + 4 + 8 = 2^1 + 2^2 + 2^3$$

இவ்வாறு இரட்டை எண்களையெல்லாம் இரண்டின் அடுக்குகளின் தொகையாக எழுதமுடியுமா எனப் பார்க்கவும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 100-ஐ இரண்டின் அடுக்குகளின் தொகையாக எழுதுவது எவ்வாறு?

2ன் அடுக்குகளை ஒவ்வொன்றாக ஆராய்ந்து பார்த்தால்,

$2^6 = 64$ என்பது 100 ஐ விடக் குறைவானது என்றும், $2^7 = 128$ என்பது 100 ஐ விடப் பெரியது என்றும் காணலாம்.

$$100 = 2^6 + 36$$

என எழுதலாம். மேலும். $2^5 = 32 < 36$ என்றும்

$$2^6 = 64 > 36$$

என்றும் காணலாம்.

அப்பொழுது $36 = 2^5 + 4 = 2^5 + 2^2$

என்று எழுதலாம். அதாவது,

$$100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$$

இதைப்போன்று, 150 ஐ 2 ன் அடுக்குகளின் தொகையாக எழுதிப் பார்க்கவும்.

மேலும் படி 3ற்கும் 5ற்கும் பதிலாக வேறு ஏதேனும் எண்களானாலோ?

$$x^2 \times x^4 = (x \times x) \times (x \times x \times x \times x)$$
$$= x \times x \times x \times x \times x \times x$$
$$= x^6$$

படிகளையும் பொதுவாக m, n என்ற எழுத்துக்களினால் குறிப்பிட்டாலோ?

$$x^m \times x^n = \underbrace{(x \times x \times x \times \ldots \times x)}_{m \text{ எண்ணிக்கை}} \times \underbrace{(x \times x \times x \times \ldots \times x)}_{n \text{ எண்ணிக்கை}}$$

$$= \underbrace{(x \times x \times x \times \ldots \times x)}_{m+n \text{ எண்ணிக்கை}}$$

$$= x^{m+n}$$

இப்பொழுது நாம் கண்ட பொதுத்தத்துவம் என்ன?

இயற்கணித முறையில் கூறினால்

> x எந்த எண்ணானாலும் m, n எந்த எண்ணல் எண்களானாலும்
>
> $$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

இதை சாதாரண மொழியில் எவ்வாறு கூறலாம்?

இதில் இரண்டு கருத்துகள் உள்ளன.

> (i) ஒரே எண்ணின் இரண்டு அடுக்குகளின் பெருக்கல்பலன் அந்த எண்ணின் அடுக்கு ஆகும்.
>
> (ii) பெருக்கல் பலனின் படி காரணிகளின் படிகளின் தொகையாகும்.

இதைப் பயன்படுத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கு களைச் செய்து பார்க்கவும்.

- 2^5 னை 2^3 கொண்டு பெருக்கினால் 2ன் எந்த அடுக்கு கிடைக்கும்.
- $10^2 \times 10^5$ என்ற எண்ணை சாதாரண வடிவில் எவ்வாறு கூறலாம்.
- 2^{10} இன் இரண்டு மடங்கு 2ன் எந்த அடுக்காகும்?
- 2^{10} னுடன் எதைக் கூட்டினால் 2^{11} கிடைக்கும்?
- 3^{10} னுடன் எதைக் கூட்டினால் 3^{11} கிடைக்கும்?
- 2 இன் சில அடுக்குகளின் அட்டவணை கீழேத் தரப்பட்டுள்ளது

2^1	2	2^6	64	2^{11}	2048
2^2	4	2^7	128	2^{12}	4096
2^3	8	2^8	256	2^{13}	8192
2^4	16	2^9	512	2^{14}	16384
2^5	32	2^{10}	1024	2^{15}	32768

இதைப் பயன்படுத்தி இவற்றின் பெருக்கல் பலன்களைக் காண இயலுமா?

- 16×64
- 64×256
- 32×512
- 128×256

வகுத்தல் விதி

ஒரே எண்ணின் இரண்டு அடுக்குகளுடைய பெருக்கல் பலனைக் கண்டுபிடித்தது போன்று வகுத்தல் பலன் கண்டுபிடிப்பதற்கும் ஏதேனும் சூத்திரம் உள்ளதா?

எடுத்துக்காட்டாக $4^5 \div 4^2$ எவ்வளவு?

பெருக்கல் விதியின் படி

$$4^5 = 4^2 \times 4^3$$

அப்படியானால் 4^5-ஐ 4^2 கொண்டு வகுத்தால் என்ன கிடைக்கும்?

$$4^5 \div 4^2 = 4^3$$

இதைப் போன்று $5^7 \div 5^3$ எவ்வாறு காண்பாய்?

5^7-ஐ 5^3 ன் பெருக்கலாக எவ்வாறு எழுதலாம்?

$$5^7 = 5^3 \times ....$$

இதிலிருந்து

$$5^7 \div 5^3 = ...$$

மேலும் $8^{23} \div 8^{16}$ என்றாலோ?

8^{23} கிடைப்பதற்கு 8^{16} னை எதைக் கொண்டு பெருக்க வேண்டும்?

அதற்கு 16 ஐ 23 ஆக மாற்றுவதற்கு எவ்வளவு கூட்ட வேண்டுமென்று கண்டுபிடித்தால் போதுமல்லவா?

$$23 - 16 = 7$$

எனில்

$$8^{23} = 8^{16} \times 8^7$$

மேலும் $8^{23} \div 8^{16}$ கண்டுபிடிக்கலாமல்லவா?

இதனையே பின்ன எண்களின் படிகளிலும் செய்யலாம்?

எடுத்துக்காட்டாக $\left(\frac{2}{3}\right)^{16}$ ஐ $\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$ ஆல் வகுத்தாலோ?

முன்பு செய்தது போல

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{16} = \left(\frac{2}{3}\right)^{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{7}$$

என்று எழுதினால்

இரண்டின் அடுக்குகளும் ஒற்றை எண்களும்

இரட்டை எண்களை எல்லாம் 2ன் அடுக்குகளின் தொகையாக எழுதலாமென்று கண்டோமல்லவா. ஒன்றைத் தவிர வேறு எந்த ஒற்றை எண்ணும் ஒரு இரட்டை எண்ணுடன் ஒன்று கூட்டியதாகும். எனவே ஒற்றை எண்களை இரண்டின் அடுக்கு களுடையவும் 1 னுடையவும் தொகை யாக எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக 25ஐ இவ்வாறு எழுதுவதற்கு முதலில்

$$25 = 24 + 1$$

என எழுதலாம். மேலும் முன்னர் செய்தது போல 24 ஐ 2 ன் அடுக்குகளின் தொகையாக எழுதலாம்.

$$24 = 16 + 8 = 2^4 + 2^3$$

அப்படியானால்

$$25 = 2^4 + 2^3 + 1$$

பொதுவாகக் கூறினால் எந்த எண்ணல் எண்ணையும் $1, 2, 2^2, 2^3$ என்பதைப்போன்ற சில எண்களின் தொகையாக எழுதலாம்.

கழித்தலும் வகுத்தலும்

ஓர் எண்ணின் மடங்குகளின் கூட்டல் தத்துவமே கழித்தலினுடையவும் தத்துவம் என கண்டீர் களல்லவா. கழித்தல் பெரிய எண்ணிலிருந்து இருக்க வேண்டும். இதற்கு சமமான தத்துவம் அடுக்குகளின் வகுத்தலிலும் உண்டு. வகுக்கப் படுவது பெரிய அடுக்கி லிருந்து மட்டுமே இருக்க வேண்டும்.

அதாவது m, n என்ற எண்ணல் எண்களில் $m > n$ ஆனால், எந்த எண் x எடுத்தாலும்

$$mx - nx = (m - n)x$$

மடங்குகளுக்கு பதிலாக அடுக்குகளானாலோ?

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

இந்த தத்துவத்தில் $x \neq 0$ எனவும் கூற வேண்டும். கூட்டலின் போது கூறப்பட்டதைப் போன்றே m, n இவை எண்ணல் எண்கள் இல்லாவிட்டாலும் இங்கு கூறிய கழித்தல் தத்துவம் சரியானதாகும்.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{16} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^{7}$$

என்று காணலாம்.

மேலும் ஒரு எண்ணின் ஏதேனும் அடுக்கை அதைவிட சிறிய ஒரு அடுக்கு கொண்டு வகுத்தால் என்ன கிடைக்குமென்று பொதுவாகப் பார்க்கலாம்.

எண்ணை x என எடுத்துக்கொள்வோம். செயல் வகுத்தலாக இருப்பதால் x பூஜியமாக இருத்தல் கூடாது. பெரிய படி m என்றும் சிறிய படி n என்றும் வைத்துக்கொள்வோம். இனி $x^m \div x^n$ எவ்வாறு காண்பாய்?

n ஐ m ஆக மாற்றுவதற்கு எவ்வளவு கூட்ட வேண்டும்.

$$x^m = x^n \times x^{m-n}$$

இதிலிருந்து

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

என காண முடியுமல்லவா. அதாவது

> x பூஜ்யம் அல்லாத எந்த எண் ஆனாலும், m, n இவை $(m > n)$ எந்த எண்ணல் எண்கள் ஆனாலும்
>
> $$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

பெருக்கல் விதியைப் போன்று இதை சாதாரண மொழியில் கூறலாமா?

மேலும் இந்த வினாக்களுக்கு விடை கண்டுபிடிக்கவும்.

- 2^5-ஐ 2^3 ஆல் வகுத்தால் 2ன் எந்த அடுக்கு கிடைக்கும்.
- $10^9 \div 10^4$ என்ற எண் எது?
- 2^{10} ன் பாதி 2ன் எந்த அடுக்காகும்?
- 2 ன் சில அடுக்குகளின் அட்டவணையை தயாரித்தோமல்லவா (பக்கம் 58) இதைப்பயன்படுத்தி இந்த வகுத்தல் பலன்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்?
  - $64 \div 16$
  - $512 \div 32$
  - $1024 \div 128$
  - $16384 \div 2048$
- $2^8 \times \frac{1}{2^3}$ எவ்வளவு?
- 7^6-ஐ எதைக் கொண்டுப் பெருக்கினால் 7^2 கிடைக்கும்.

வேறொரு வகுத்தல்

மேலே குறிப்பிட்ட வினாக்களில் கடைசி வினாவிற்கு முன்னால் உள்ள வினாவைப் பார்க்கவும்.

$$2^8 \times \frac{1}{2^3} = 2^8 \div 2^3 = 2^5$$

என்று கண்டீர்களல்லவா?

இதிலிருந்து

$$2^5 \div 2^8 = \frac{1}{2^3}$$

என்று கிடைக்குமல்லவா.

இதைப்போன்று மேலே உள்ள கடைசி வினாவிலிருந்து $7^2 \div 7^6$ கண்டுபிடிக்கலாமா?

$$7^6 \times \frac{1}{7^4} = 7^2$$

இதிலிருந்து

$$7^2 \div 7^6 = \frac{1}{7^4}$$

பொதுவாக கூறினால்

x பூஜ்யமல்லாத எந்த எண் ஆனாலும் m, n இவை $m < n$ ஆன எந்த இரண்டு எண்ணல் எண் ஆனாலும்

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$$

மேலும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வினாக்களுக்கு விடை கண்டுபிடிக்கவும்:

- சுருக்குக.
  - $\frac{2^5 \times 2^3}{2^4}$
  - $\frac{3^7}{3^2 \times 3^4}$
  - $\frac{5^2 \times 5^4}{5^5 \times 5^4}$
  - $\frac{8^2 \times 8^7}{8^6 \times 8^3}$
  - $\frac{4^3 \times 4^5}{4^2 \times 4^4}$
  - $\frac{10^4 \times 10^5}{10^6 \times 10^7}$
- 5^6-ஐ 5^{10} ஆல் வகுத்தால் $\frac{1}{5}$ ன் எந்த அடுக்கு கிடைக்கும்?
- 10^8-ஐ 10^{12} ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் எண்ணின் தசமவடிவம் எது?
- $\left(\frac{1}{2}\right)^5$-ஐ $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ ஆல் வகுத்தால் கிடைக்கும் எண்ணல் எண் எது?
- $(0.25)^6$-ஐ எந்த எண்ணல் எண்ணால் பெருக்கினால் $(0.25)^4$ கிடைக்கும்?

வகுத்தலும் கழித்தலும்

பின்ன எண்களையும் பயன்படுத்தினால் சிறிய எண்ணை பெரிய எண்ணாலும் வகுக்கலாம். பலன் பின்ன எண்ணாக மட்டுமே இருக்கும். அதனால் சிறிய அடுக்கை பெரிய அடுக்கைக் கொண்டு வகுப்பதைப் பற்றி சிந்திப்போம்.

$$m < n \text{ ஆனால் } \frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$$

இதற்கு சமமான ஒரு தத்துவம் மடங்குகளில் இல்லை. சிறிய எண்ணிலிருந்து பெரிய எண்ணைக் கழிப்பதற்கு தற்பொழுது முடியா தல்லவா?

சுருக்குப் பை கணக்கு

100 ஒரு ரூபாய் நாணயங்கள் பல சுருக்குப் பைகளில் கட்டி வைக்க வேண்டும். இதிலிருந்து 100 ரூபாய் வரையுள்ள எவ்வளவு ரூபாய் வேண்டும் என்றாலும் சுருக்குப் பையைத் திறக்காமலே எடுப்பதற்கு இயல வேண்டும். முடியுமா?

ஒரு சுருக்குப் பையில் ஒரே ஒரு நாணயம் மட்டும் இடுக. இனி 2ன் அடுக்குகளான 2, 4, 8 என்றிவ்வாறு நாணயங்கள் இட்டு சுருக்குப் பை உருவாக்க வேண்டும்.

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 64 - 1 = 63$$

மீதி வரும் $100 - 63 = 37$ நாணயங்கள் ஒரு சுருக்கு பையில் வைக்க வேண்டும்.

இனி தேவையுள்ள தொகை 68க்குக் குறைவாக இருந்தால் 2ன் அடுக்குகளும், வேண்டுமெனில் 1ம் பயன்படுத்தி எடுக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக 35 ரூபாய் வேண்டுமெனில்

$35 = 32 + 2 + 1$ என எடுக்கலாம்.

63 க்கு கூடுதலாக இருந்தால்?

எடுத்துக்காட்டாக 65 ரூபாய் கிடைப்பதற்கு முதலில் 37 ன் சுருக்குப் பை எடுக்க வேண்டும். இனி தேவையானது $65 - 37 = 28$ ரூபாய். இதை

$$28 = 16 + 8 + 4$$

என எடுக்கலாமல்லவா.

- 3ன் அடுக்குகளின் அட்டவணை தயாரிக்கவும். (3^{10} வரை) அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி இந்த செயல்களைச் செய்க.
  - 81×9
  - 729×81
  - $6561 \div 243$
  - 243×81
  - $2187 \div 9$
  - $59049 \div 729$

அடுக்கின் அடுக்கு

64 ஐ ஏதேனும் ஒரு எண்ணின் அடுக்காக எழுத முடியுமா? எவ்வாறெல்லாம் எழுதலாம்?

$$2^6 = 64$$
$$4^3 = 64$$
$$8^2 = 64$$
$$64^1 = 64$$

இதைப்போன்று 3^{12} ஐ பிற எண்களின் அடுக்காக எழுதலாமா?

$$3^{12} = 3^6 \times 3^6$$
$$= (729) \times (729)$$
$$= (729)^2$$

வேறொரு முறையிலும் எழுதலாம்.

$$3^{12} = 3^8 \times 3^4$$
$$= (3^4 \times 3^4) \times 3^4$$
$$= 81 \times 81 \times 81$$
$$= (81)^3$$

வேறொரு முறையும் உண்டு.

$$3^{12} = 3^6 \times 3^6$$
$$= (3^3 \times 3^3) \times (3^3 \times 3^3)$$
$$= 27 \times 27 \times 27 \times 27$$
$$= (27)^4$$

இனி வேறு ஏதேனும் முறையில் எழுத முடியுமா? முயற்சி செய்க.

மேலேத் தரப்பட்டுள்ளதில் $3^6 \times 3^6$ என்பதன் பொருள் என்ன?

இரண்டு 3^6 களை பெருக்கியதல்லவா? இதைச் சுருக்கி $(3^6)^2$ என்று எழுதலாம்.

மேலும் $(3^6)^2 = 3^6 \times 3^6$

$$= 3^{6+6}$$

$$= 3^{6\times 2}$$

$$= 3^{12}$$

இதைப் போன்று $3^4 \times 3^4 \times 3^4$ என்பதனை $(3^4)^3$ என்றெழுதலா மல்லவா? எனில்

$$(3^4)^3 = 3^4 \times 3^4 \times 3^4$$

$$= 3^{4+4+4}$$

$$= 3^{4\times 3}$$

$$= 3^{12}$$

இதைப்போன்று

$$(4^2)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2$$

$$= 4^{2\times 3}$$

$$= 4^6$$

$$(5^4)^6 = 5^{4\times 6}$$

$$= 5^{24}$$

இவ்வாறெல்லாம் எழுதலாம்.

தொடர்ந்து பின்ன எண்ணை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3$ என்பதன் பொருளென்ன?

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

அதாவது,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2+2+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

பொதுவாகக் கூறினால் x ஒரு எண்ணும் m, n இவை எண்ணல் எண்களும் ஆனால்

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \times x^m \times \dots \times x^m}_{n \text{ எண்ணிக்கை}}$$

$$= x^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \text{ எண்ணிக்கை}}}$$

$$= x^{nm}$$

$$= x^{mn}$$

செயல்திட்டம்

சில எண்ணல் எண்களைத் தொடர்ச்சியாக எண்ணல் எண்களின் தொகையாக எழுதலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$3 = 1+2$$

$$7 = 3+4$$

$$15 = 1+2+3+4+5 = 7+8$$

ஆனால் சில எண்ணல் எண்களை இவ்வாறு எழுத முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக 4 ஐ இவ்வாறு எழுத முடியாது.

தொடர்ச்சியான எண்ணகளை எண்களின் தொகையாக எழுதுவதற்கு முடியாத எண்களுக்கு ஏதேனும் தனித்தன்மை உள்ளதா?

20 வரை உள்ள எண்கள் எடுத்து பரிசோதனை செய்து பார்க்கவும்.

பூரண எண்கள்

6 ன் காரணிகள் 1, 2, 3, 6.

இவற்றில் 6 ஐ தவிர உள்ளவற்றின் தொகை

$$1+2+3=6$$

இனி 28 ன் காரணிகளைப் பார்க்கலாம்.

$$28=2^2\times 7$$

எனில் 28ன் காரணிகள்

1	2	2^2
7	2×7	$2^2\times 7$

இவற்றுள் 28ஐ தவிர உள்ளவற்றின் தொகை

$$1+2+2^2+7+(2\times 7)=7+7+14=28$$

மேலும்,

$$2^4\times 31=16\times 31=496$$

என்ற எண்களின் காரணிகளைப் பார்க்கவும்.

31 பகா எண் ஆனபடியால் காரணிகள்

1	2	2^2	2^3	2^4
31	2×31	$2^2\times 31$	$2^3\times 31$	$2^4\times 31$

இவற்றுள் முதல் வரிசையில் உள்ள காரணிகளின் தொகை

$$1+2+2^2+2^3+2^4=2^5-1=31$$

(வேறொரு தொகை என்ற பாகத்தைப் பார்க்கவும்)

இரண்டாவது வரிசையில் $2^4\times 31$ ஐ தவிர உள்ள காரணிகளின் தொகை

$$(1+2+2^2+2^3)\times 31=(2^4-1)\times 31$$
$$=(2^4\times 31)-31$$

எனில் $2^4\times 31$ ஐ தவிர பிற காரணிகள் எல்லாவற்றினுடையவும் தொகை

$$31+(2^4\times 31)-31=2^4\times 31=496$$

இத்தகைய எண்களை பூரண எண்கள் (perfect numbers) என்று கூறுவர்.

அதாவது,

> x என்ற எந்த எண்ணையும் m, n என்ற எந்த எண்ணல் எண்களையும் எடுத்துக்கொண்டால்
>
> $$(x^m)^n=x^{mn}$$

மேலும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளவற்றை ஒரே அடுக்குகளாக எழுதலாமல்லவா

- $(4^2)^3$
- $(3^3)^2\times 9^4$
- $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^4$
- $(2^3)^4\times 2^6$

கீழே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு எண்ணையும் பல்வேறு எண்களின் அடுக்குகளாக எழுதுக.

- 3^8
- 4^6
- 2^{15}
- 5^{12}

காரணிகள்

32 ன் காரணிகள் எவையெல்லாம்?

1, 2, 4, 8, 16, 32

1 ஐத் தவிர ஏனைய காரணிகள் எல்லாம் இரண்டின் அடுக்குகள் அல்லவா. அப்பொழுது 32ன் காரணிகள்

$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$

81 ன் காரணிகளோ?

$81=3^4$

எனில் காரணிகள்

$1, 3, 3^2, 3^3, 3^4$

இனி, 72ன் காரணிகள் எவை என கண்டுபிடிக்கலாம்.

$72=2^3\times 3^2$

காரணிகளை ஒழுங்காக எழுதிப் பார்க்கலாம்.

முதலில் 1ம் பிறகு 2ன் அடுக்குகளான காரணிகளையும் எழுதலாம்.

$1, 2, 2^2, 2^3$

இவை ஒவ்வொன்றினையும் 3 ஆல் பெருக்கினால் பிற நான்கு காரணிகள் கிடைக்கும்.

$3, 2\times 3, 2^2\times 3, 2^3\times 3$

கிடைக்கும்.

$3^2,\ 2 \times 3^2,\ 2^2 \times 3^2,\ 2^3 \times 3^2$

மேலும் வேறு ஏதேனும் காரணிகள் உள்ளனவா?

இதைப்போன்று 200ன் காரணிகள் எழுதினாலோ?

$200 = 8 \times 25 = 2^3 \times 5^2$

காரணிகளை வரிசைப்படுத்தி கீழேக் காண்பதுபோல் எழுதலாம் அல்லவா?

1	2	2^2	2^3
5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$
5^2	2×5^2	$2^2 \times 5^2$	$2^3 \times 5^2$

240 ன் காரணிகளானாலோ?

$240 = 16 \times 15$

$= 2^4 \times 3 \times 5$

காரணிகளை கீழேக் காண்பதுபோல் எழுதலாம்.

1	2	2^2	2^3	2^4
3	2×3	$2^2 \times 3$	$2^3 \times 3$	$2^4 \times 3$
5	2×5	$2^2 \times 5$	$2^3 \times 5$	$2^4 \times 5$
3×5	$2 \times 3 \times 5$	$2^2 \times 3 \times 5$	$2^3 \times 3 \times 5$	$2^4 \times 3 \times 5$

இதைப்போன்று கீழே உள்ள ஒவ்வொரு எண்ணினுடையவும் எல்லா காரணிகளையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

- 64
- 125
- 48
- 45
- 105

செய்து பார்ப்போம்

- $2^x = 128$ எனில் 2^{x+1} கண்டுபிடிக்கவும்.
- $3^x = 729$ எனில் 3^{x-1} கண்டுபிடிக்கவும்.
- $3^x,\ 3^{x+1},\ 3^{x-1},\ 3^x + 1$ இவற்றுள் இரட்டை எண் எது?
- 6^{10} .... கூட்டினால் ஒன்றாம் இடத்திலுள்ள இலக்கம் என்ன?
- $5^6 \times \frac{1}{5^x} = \frac{1}{5^{10}}$ என கிடைக்க வேண்டுமெனில் x எது?
- எளிதாக்கவும்
  - $\frac{3^5 \times 3^6}{3^5 \times 3^4}$
  - $\frac{4^7 \times 4^8}{(4^2 \times 4^3)^5}$
  - $\frac{(6^4)^2 \times (6^5)^3}{(4^2)^2 \times (6^4)^5}$

செயல்திட்டம்

32	$=$	2^5	காரணிகளின் எண்ணிக்கை	6
81	$=$	3^4	காரணிகளின் எண்ணிக்கை	5
72	$=$	$2^3 \times 3^2$	காரணிகளின் எண்ணிக்கை	12

இதைப் போன்று ஏதேனும் எண்களை பகாக் காரணிகளின் அடுக்குகளாக எழுதுக. அவற்றின் காரணிகளின் எண்ணிக்கையையும் எழுதுக.

காரணிகளின் எண்ணிக்கை கண்டுபிடித்தது எவ்வாறு?

அடுக்குகளாக வரும் எண்களுக்கும் காரணிகளின் எண்ணிக்கைக்கும் இடையே ஏதேனும் தொடர்புண்டா?

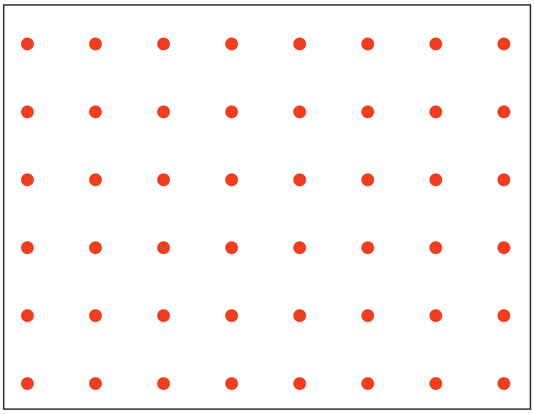
மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்படுத்த வேண்டியுள்ளது
• தொடர் பெருக்கலின் செயல்வடிவமாக அடுக்குகளாக்குவதைப் புரிந்து கொள் ளவும் விளக்கவும் இயலுதல்.			
• செயல்களைப் பயன்படுத்தி அடுக்கு விதிகளை உறுதிப்படுத்துதல்.			
• பிரச்சனைகளுக்குத் தீர்வு காண்பதற்கும் செயல்களை எளிதில் செய்வதற்கும் அடுக்கு விதிகளைப் பயன்படுத்துதல்.			
• பெரிய எண்களை விளக்குவதற்கு அடுக்குகளைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். இது போன்ற விளக்க முறைகளைச் சிறப்பாக எடுத்துரைத்தல்.			
• எண்ணல் எண்களையும் தசம எண் களையும் 10ன் அடுக்குகளைப் பயன் படுத்தி, இட மதிப்பை அடிப்படையாகக் கொண்டு விளக்குதல்.			
• அடுக்குகளுடன் தொடர்புடைய எண் தொடர்புகளை அறிவு பூர்வமாக உறுதி படுத்துதல்.			

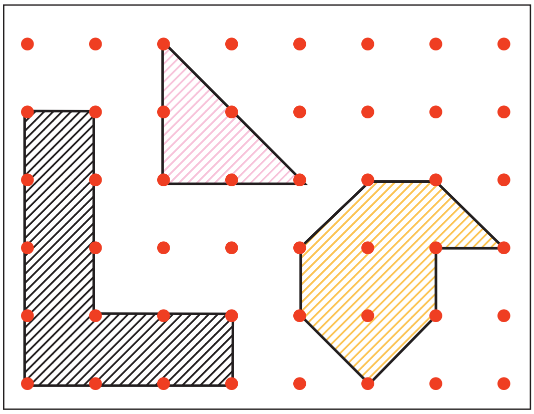
5

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

கீழேயுள்ள படத்தில் ஒரு செ.மீ இடைவெளியில் கிடைமட்டமாகவும் செங்குத்தாகவும் புள்ளிகள் போடப்பட்டுள்ளன.



கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் வண்ணம் பூசப்பட்டுள்ள வடிவங்களின் பரப்பளவு என்ன?



இனி மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள செவ்வகத்தின் உட்புறத்திலுள்ள புள்ளிகளைப் பல்வேறு முறைகளில் இணைத்து வடிவங்கள் வரைந்து பாருங்கள். ஒவ்வொன்றினுடையவும் பரப்பளவும் கண்டுபிடியுங்கள்.

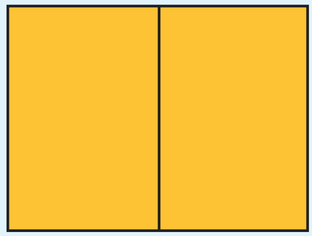
ஜியோஜிப்ராவில் grid உபயோகித்தும் இந்தச் செயல்பாட்டைச் செய்யலாம். Polygon tool உபயோகித்து gridஇல் கோடுகள் இணையும் புள்ளிகளில் கிளிக் செய்து பல்வேறு வடிவங்கள் வரையலாம்.

இவ்வாறு வரையக்கூடிய வடிவங்களின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடியுங்கள். விடை சரியா? என உங்களுக்குப் பரிசோதிக்கலாம். இதற்கு Area Tool உபயோகித்து வடிவத்தின் உள்ளே கிளிக் செய்தால் போதும்.

பாதியாக்கலாம்

4 சென்டிமீட்டர் நீளமும் 3 சென்டிமீட்டர் அகலமும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தை காகிதத்தில் வரைந்து வெட்டி எடுக்கவும்.

படத்தில் காட்டியிருப்பதைப் போன்று படத்தின் நடுவே ஒரு கோடு வரையவும்.



இப்போது இரு செவ்வகங்கள் கிடைத்தன. ஒவ்வொன்றினுடையவும் பரப்பளவு என்ன?

பாதியா எனக் கண்டுபிடிக்க மடித்துப் பார்த்தால் போதுமே?

அதாவது,

சிறிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவு = பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவின் பாதி

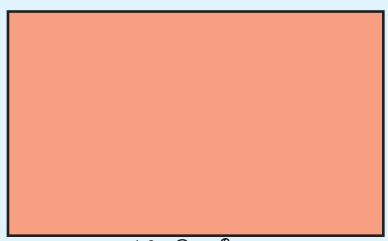
$$= \frac{1}{2} \times 12$$

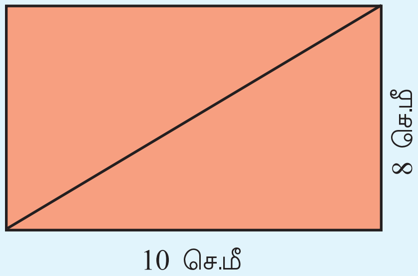
= 6 ச.செ.மீ

வேறு ஏதேனும் முறைகளில் பரப்பளவைப் பாதியாக்க முடியுமா?

வேறொரு பாதி

பக்கங்களின் நீளம் 10 சென்டிமீட்டரும், 8 சென்டிமீட்டரும் அளவுகள் உடைய செவ்வகம் வரைந்து வெட்டி எடுக்கவும்.





செவ்வகத்தின் எதிர் உச்சிகளை இணைத்து ஒரு கோடு வரையுங்கள்.

செவ்வகம் இரு முக்கோணங்களானது.

இவற்றின் பரப்பளவுகள் சமமாக இருக்குமா?

முன்பு செய்ததைப் போன்று மடித்துப் பார்த்தால் போதுமா?

இரு முக்கோணங்களையும் சேர்த்து வைத்துப் பாருங்கள்?

எனில், ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவும் எவ்வளவு?

ஒரு முக்கோணத்தின்

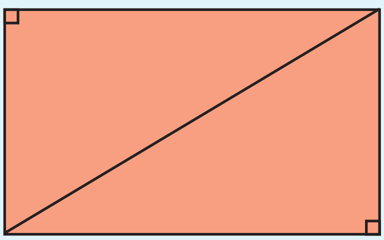
பரப்பளவு = செவ்வகத்தின் பரப்பளவின் பாதி

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 8$

$= 40$ ச.செ.மீ

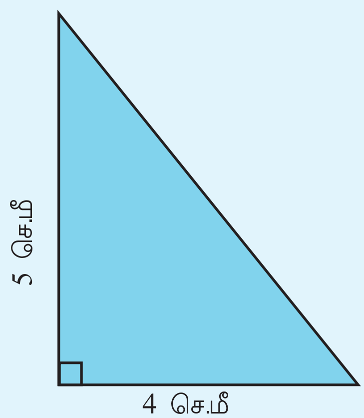
இவ்வாறு கிடைக்கக் கூடிய முக்கோணத்தின் கோணங்களை கவனித்தீர்களா?

ஒரு கோணம் செங்கோணமாக வரக்கூடிய முக்கோணத்தை



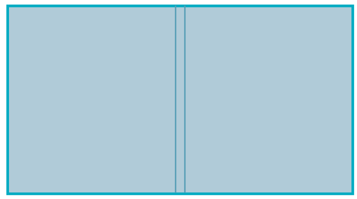
செங்கோண முக்கோணம் (right angled triangle) எனக் கூறலாம்.

படத்திலுள்ள செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?

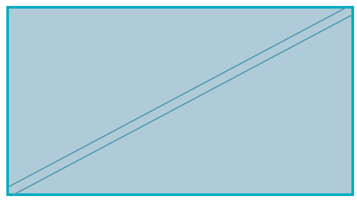


பல பாதிகள்

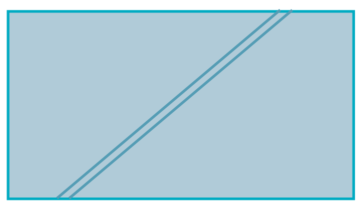
ஒரு செவ்வகத்தின் நடுவில் கிடைமட்டமாகவோ அல்லது செங்குத்தாகவோ வெட்டினால் பாதி பரப்பளவுள்ள செவ்வகங்களாக மாற்றலாம்.



எதிர் உச்சிகளை வெட்டினால் பாதி பரப்பளவுள்ள முக்கோணங்களாக்கலாம்.



நடுவில் சாய்வாக வரைந்தால்?

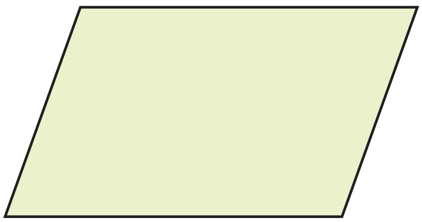


பாதி பரப்பளவு உள்ள இரு நாற்கரங்கள் கிடைத்ததல்லவா?

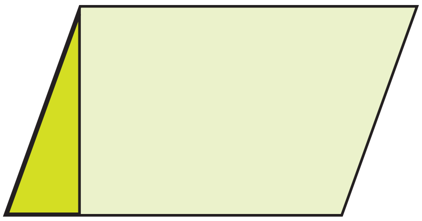
ஒரு ஜோடி எதிர்பக்கங்கள் மட்டும் இணையாக வரக்கூடிய இத்தகைய நாற்கரங்களுக்கு சரிவகம் (trapezium) என்று பெயர்.

இணைகரமும் செவ்வகமும்

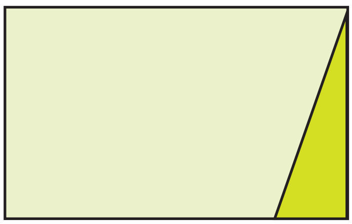
படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இணைகரத்தின் பரப்பளவை எவ்வாறு கணக்கிடலாம்?



இந்த இணைகரத்திலிருந்து கீழே காட்டியிருப் பதைப் போன்று ஒரு முக்கோணம் வெட்டி மாற்றுங்கள்.



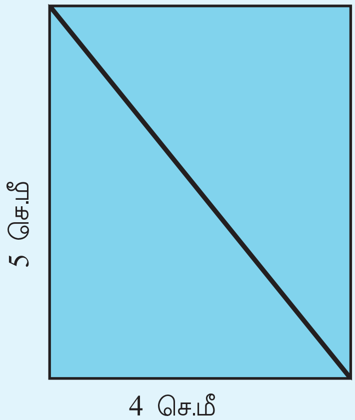
படத்தில் காட்டியிருப்பதுபோல் இந்த முக் கோணத்தை வலதுபுறம் சேர்த்து வைத்தால்?



இப்போது ஒரு செவ்வகம் கிடைத்துவிட்டது.

இதன் பரப்பளவும் இணைகரத்தின் பரப்பள வும் சமமாக இருக்குமல்லவா?

இதுபோன்று இரு செங்கோண முக்கோணங்களைக் காகிதத் தில் வெட்டியெடுத்துக் கீழே காட்டியிருப்பது போன்று சேர்த்து வைத்துப் பார்க்கவும்.



இந்தச் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு என்ன?

செங்கோணமுக்கோணத்தின் பரப்பளவு இதன் பாதி அல்லவா?

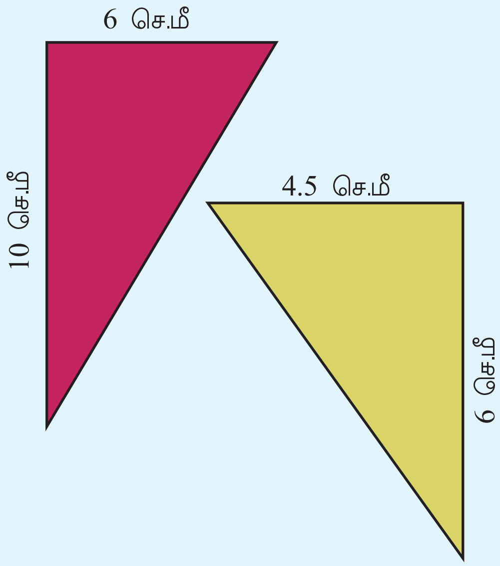
செங்கோண முக்கோணத்தின்
பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times 4 \times 5$
$= 10$ ச.செ.மீ

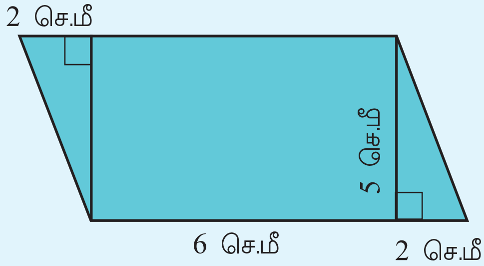
இதில் 4செ.மீ, 5செ.மீ என்பவை செங்கோண முக்கோணத் தின் செங்குத்தான பக்கங்களின் நீளங்களாகும்.

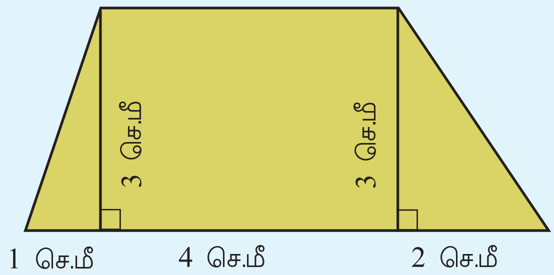
இப்போது எந்த ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவும் கண்டுபிடிப்பதற்கான வழிமுறை கிடைத்து விட்டது.

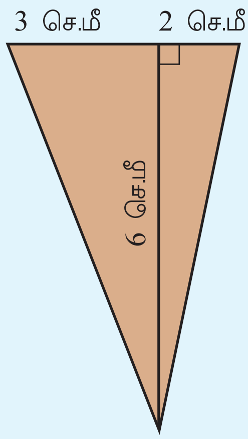
ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு செங்குத்து பக்கங்களின் பெருக்கற்பலனின் பாதியாகும்.

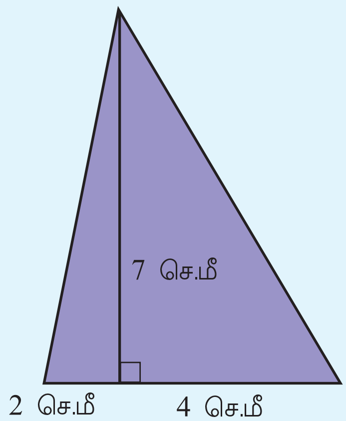
கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வடிவங்களின் பரப்பளவு கண்டுபிடிக்கவும்.







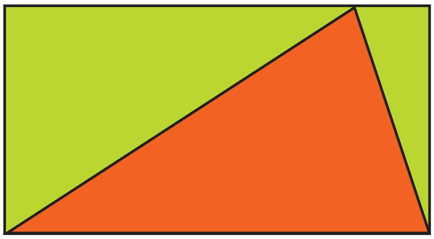




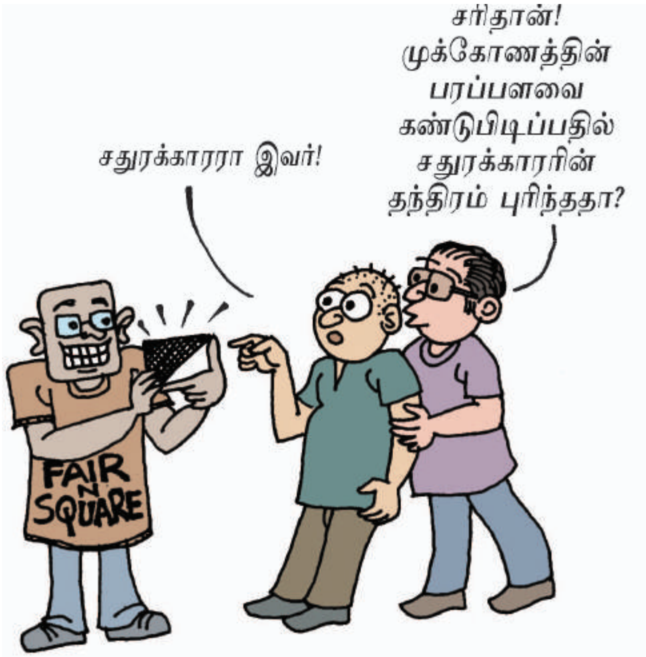
- ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு 96 சதுர சென்டிமீட்டர் ஆகும். செங்குத்துப் பக்கங்களில் ஒன்றின் நீளம் 16 சென்டிமீட்டர் எனில் மற்றொரு பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு?
- ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்கள் முறையே 12 சென்டிமீட்டர், 15 சென்டிமீட்டர் ஆகும். இதே பரப்பளவு உள்ள மற்றொரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செங்குத்துப் பக்கங்களில் ஒன்றின் நீளம் 18 சென்டி மீட்டர் ஆகும். எனில் மற்ற செங்குத்துப் பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு?

செவ்வகமும் முக்கோணமும்

படத்திலுள்ள சிவப்பு நிற முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, செவ்வகத்தின் பரப்பளவின் எவ்வளவு பாகம்?

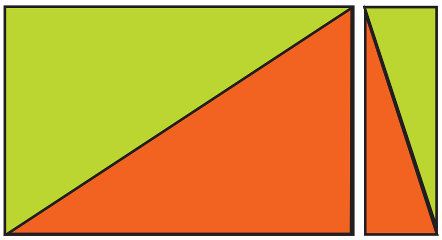


விடை அடுத்த பக்கத்தில் உண்டு. பக்கத்தை திருப்புவதற்கு முன் சற்று யோசித்து பாருங்கள்:



செவ்வகமும் முக்கோணமும்

செவ்வகத்தைக் கீழே காண்பதுபோல் இரண்டு சிறிய செவ்வகங்களாக மாற்றுவோமா?

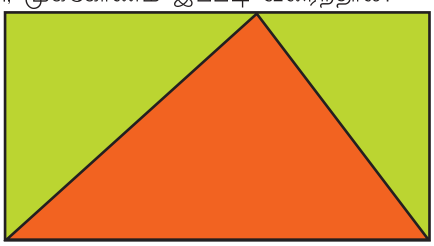


ஒவ்வொரு செவ்வகத்திலுள்ள சிவப்பு செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு அந்தச் செவ்வகத்தின் பரப்பளவின் பாதியாகும். எனவே இந்த இரணடு செங்கோண முக்கோணங்களின் பரப்பளவைக் கூட்டினால் பெரிய செவ்வகத்தின் பரப்பளவின் பாதி ஆகுமல்லவா?

இந்த இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களும் சேர்ந்ததுதானே முதல்படத்தில் காணப்படும் பெரிய முக்கோணம்.

எனவே முதல் படத்தில் சிவப்பு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு செவ்வகத்தின் பரப்பளவின் பாதி யாகும்.

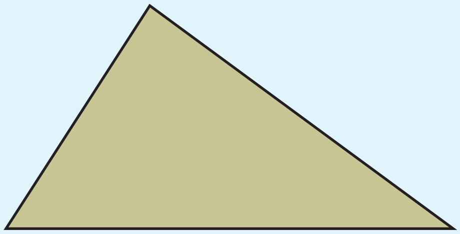
இனி, முக்கோணம் இப்படி வரைந்தால்?



ஜியோஜிப்ரா பயன்படுத்தி ஒரு செவ்வகம் வரைக. அதன் மேற்பாகத்தில் உள்ள கோட்டில் ஒரு புள்ளி வைக்கவும். Polygon கருவியைப் பயன்படுத்திப் படத்தில் காண்பதுபோல் ஒரு முக்கோணம் வரைக. அதற்குச் சிவப்பு நிறம் கொடுக்கவும். Area கருவியைப் பயன்படுத்தி முக்கோணத்தின் பரப்பளவு கண்டுபிடிக்கவும். மேற்பாகத்திலுள்ள புள்ளியின் இடத்தை மாற்றிப் பார்க்கவும். பரப்பளவில் என்ன மாற்றம் நடைபெறுகிறது?

பிற முக்கோணங்கள்

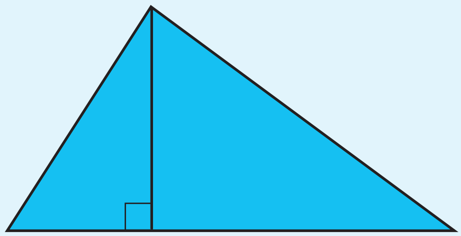
இந்த முக்கோணத்தைப் பாருங்கள்.



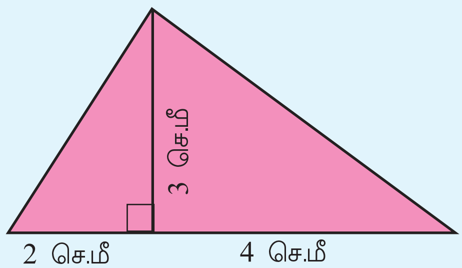
இதன் கோணங்கள் செங்கோணங்களல்ல.

பரப்பளவை எப்படிக் கண்டுபிடிக்கலாம்?

இதை இரண்டு செங்கோண முக்கோணங்களாக பிரிக்க லாமா?



முன்பு செய்த செயல்களை மீண்டும் ஒருமுறை செய்துபாருங் கள்.



அப்படியானால் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்க எந்தெந்தக் கோடுகளின் நீளத்தை அளக்கவேண்டும்?

$$\text{பரப்பளவு} = \left(\frac{1}{2}\times 2\times 3\right) + \left(\frac{1}{2}\times 4\times 3\right)$$

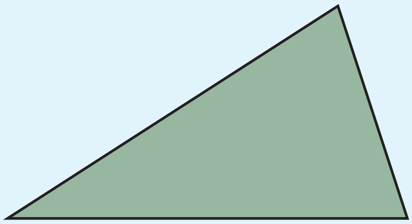
$$= 3 + 6$$

$$= 9 \text{ ச.செ.மீ}$$

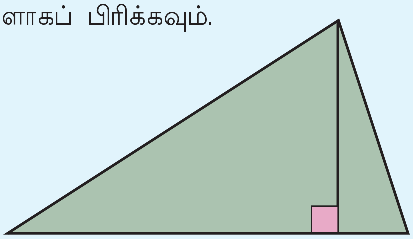
இவ்வாறு எந்த முக்கோணமாயினும் பரப்பளவு கண்டுபிடிக் கலாம்.

முக்கோணத்தின் பரப்பளவு கண்டுபிடிப்பதற்கான பொதுவான வழிமுறை என்ன?

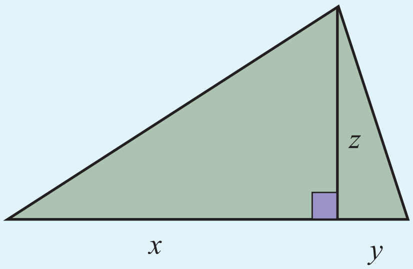
இந்த முக்கோணத்தைப் பாருங்கள்.



பரப்பளவு கண்டுபிடிப்பதற்கு முதலில் மேல்உச்சியிலிருந்து ஒரு செங்குத்துக்கோடு வரைந்து இரு செங்கோண முக் கோணங்களாகப் பிரிக்கவும்.



இனி சில நீளங்களை அளக்க வேண்டும். அவற்றைத் தற்போது எழுத்துகள் உபயோகித்து எழுதலாம்.



இனி பரப்பளவை எப்படி எழுதலாம்.

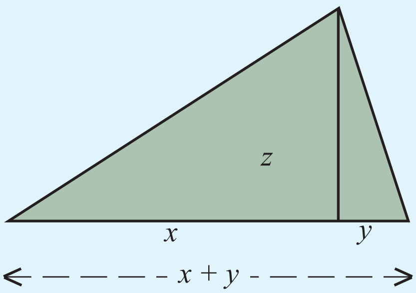
இரண்டு முக்கோணங்களின் பரப்பளவுகளின் தொகை

$$= \left(\frac{1}{2} \times x \times z\right) + \left(\frac{1}{2} \times y \times z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, xz + \frac{1}{2}\, yz$$

$$= \frac{1}{2}\, (x + y)\, z$$

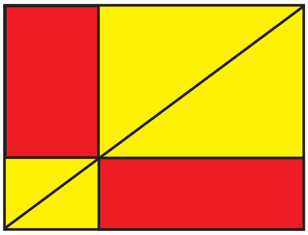
இதில் $x + y$ என்பது கீழே உள்ள பக்கத்தின் நீளம் அல்லவா?



ஜியோஜிப்ராவில் 3 அலகு இடைவெளி வருமாறு ஒரு ஜோடி இணைகோடுகள் வரையவும். கீழே உள்ள கோட்டில் 4 அலகு இடைவெளியில் D, F என இரு புள்ளி களைக் குறிக்கவும். மேலே உள்ள கோட்டில் G என்ற ஒரு புள்ளி அடையாளப்படுத்தவும். Polygon Tool உபயோகித்து முக்கோணம் DEF வரையவும். இந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு? உங்கள் விடை சரியா? என Area Tool உபயோகித்துப் பரிசோதித்துப் பார்க்கவும். இனி Gஇன் இடத்தை மாற்றிப் பாருங்கள். பரப்பளவு மாறுகிறதா?

செவ்வகத்தில் செவ்வகங்கள்

இந்த படத்திலுள்ள செவ்வகத்தைப் பாருங்கள்.

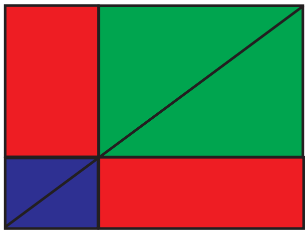


இதிலுள்ள சிவப்பு நிற செவ்வகங்களின் பரப் பளவுகளுக்கிடையே ஏதேனும் தொடர் புண்டா?

பக்கத்தைத் திருப்பி விடையைப் பார்க்குமுன் சற்றுச் சிந்தித்துப் பாருங்கள்.

செவ்வகத்தில் செவ்வகங்கள்

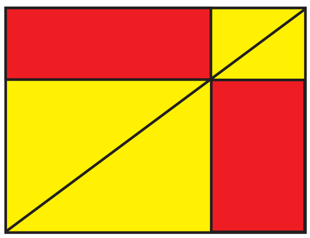
பெரிய செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டம் அதை ஒரே பரப்பளவுள்ள இரு செங்கோண முக்கோணங் களாகப் பிரிக்கிறது. இந்தச் செங்கோண முக்கோணங் கள் ஒவ்வொன்றும் அதனுள் ஒரு சிவப்பு



செவ்வக மும் இரண்டு சிறிய செங்கோண முக் கோணங்களும் சேர்ந்ததாகும்.

படத்தில் ஒரே நிறமுள்ள செங்கோண முக்கோணங் களின் பரப்பளவுகள் சமமல்லவா?

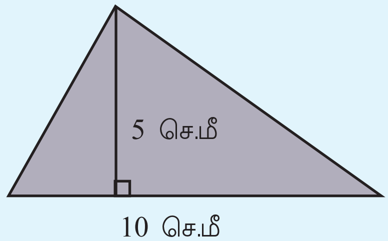
எனவே இரண்டு சிவப்புநிற செவ்வகங்களின் பரப்பளவுகள் சமம். மூலைவிட்டத்தின் வேறு ஏதேனும் பகுதியில் செவ்வகங்கள் வரைந்தாலோ?

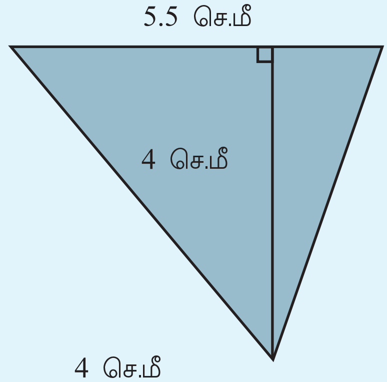


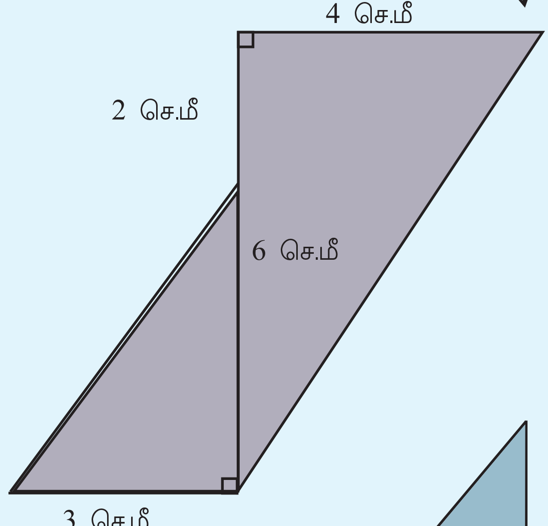
எனவே முக்கோணத்தின் பரப்பளவை எவ்வாறு எழுதலாம்?

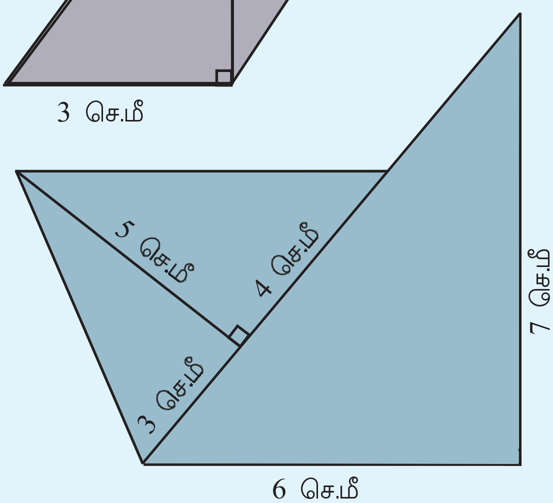
ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு, ஏதேனும் ஒரு பக்கம் அல்லது அப்பக்கத்திலிருந்து எதிர் உச்சிக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு இவற்றின் பெருக்கற்பலனின் பாதியாகும்.

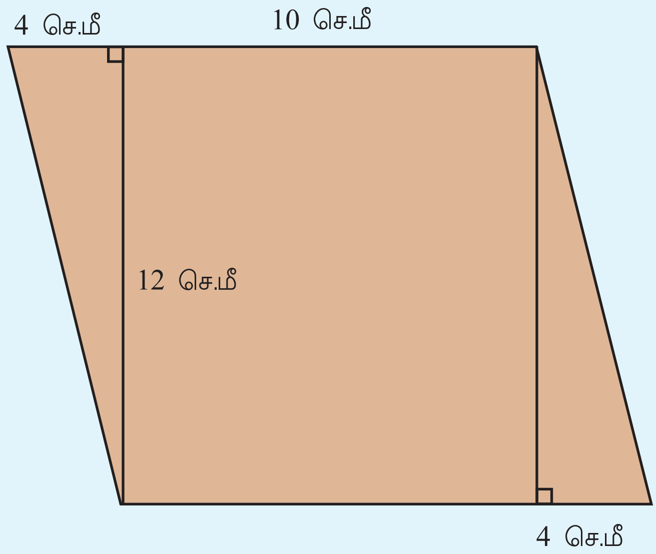
கீழே உள்ள முக்கோணங்களின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக் கவும்:





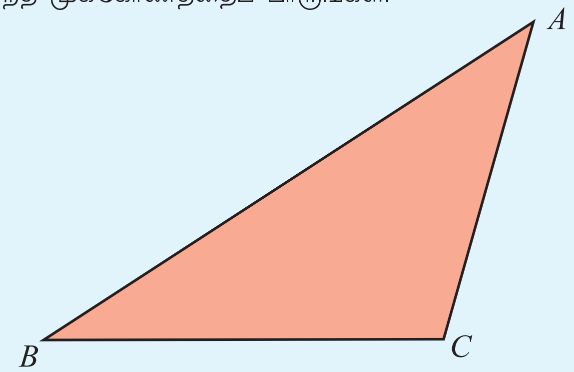






வேறொரு முக்கோணம்

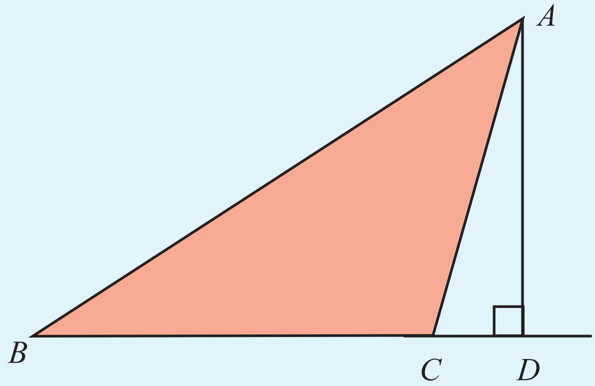
இந்த முக்கோணத்தைப் பாருங்கள்.



இதன் பரப்பளவை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

A யிலிருந்து BC க்குச் செங்குத்துக்கோடு வரைவது எப்படி?

BC யை வலப்புறமாக நீட்டினாலோ?

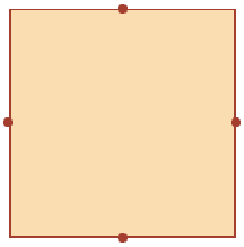


இனி ΔABC இன் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிப்பது எப்படி?

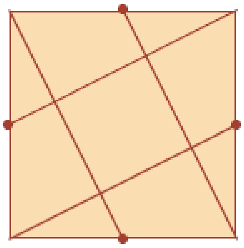
ΔABD யிலிருந்து ΔACD யை அகற்றினால் ΔABC கிடைக்கும் அல்லவா.

சதுரத்தின் பாகம்

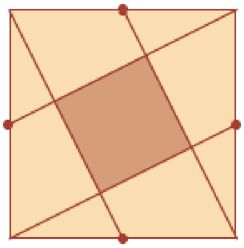
ஒரு சதுரம் வரைந்து அதன் பக்கங்களின் மையப்பகுதிகளில் புள்ளிகள் அடையாளப் படுத்துக.



இனி இப்புள்ளிகளையும் சதுரத்தின் மூலை களையும் கீழே காட்டியிருப்பது போல் இணைக்கவும்.



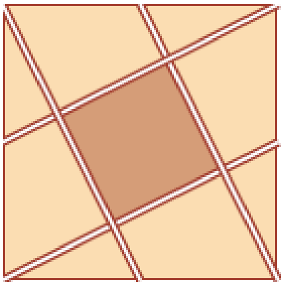
இப்போது நடுவில் ஒரு சதுரம் கிடைத்ததல்லவா?



இதன் பரப்பளவு பெரிய சதுரத்தின் பரப்பளவின் எத்தனை பாகம் ஆகும்?

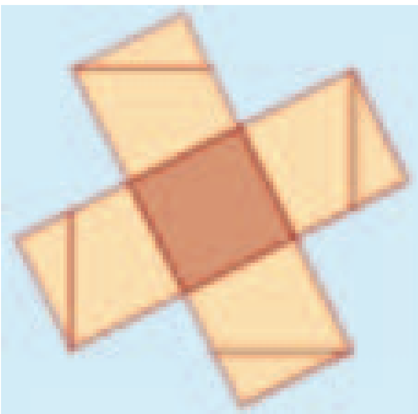
சதுரத்தின் பாகம்

இதுபோல் ஒரு படத்தைக் காகிதத்தில் வெட்டி யெடுக்கவும்.



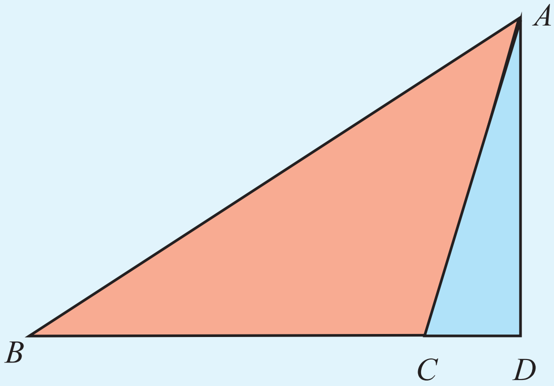
இனி இதிலுள்ள முக்கோணங்களைக் கீழ்க்காண் பதுபோல் இடம் மாற்றி வைக்கவும்.

இப்போது ஒரே அளவுள்ள ஐந்து சதுரங்கள் கிடைத் ததல்லவா?



இதிலிருந்து நடுவிலுள்ள சதுரம் பெரிய சதுரத் தின் $\frac{1}{5}$ பாகம் எனக் காணலாம்.

ΔABD ஒரு செங்கோண முக்கோணம் ஆகும்.



ΔABD யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times BD \times AD$

ΔACD யிம் செங்கோண முக்கோணம் அல்லவா.

ΔACD யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times CD \times AD$

இனி ΔABC யின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

ΔABC யின் பரப்பளவு

$= \Delta ABD$ யின் பரப்பளவு $- \Delta ACD$ ன் பரப்பளவு

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AD - \frac{1}{2} \times CD \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times (BD - CD) \times AD$$

படத்திலிருந்து

$$BD - CD = BC$$

ஆகையால்

ΔABC யின் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times (BD - CD) \times AD$

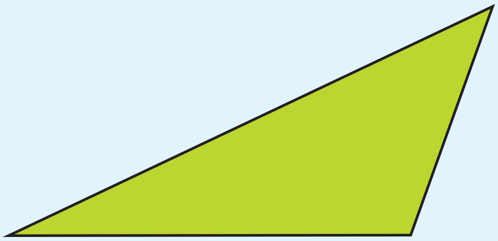
$$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

BC, AD இவை அளந்து பரப்பளவு கண்டுபிடியுங்கள்.

இதில் AD என்பது BC யிலிருந்து உள்ள உயரமாகும்.

எனவே, இத்தகைய முக்கோணங்களின் பரப்பளவு, ஒரு பக்கம் மற்றும் அதன் உயரம் இவற்றின் பெருக்கற்பலனின் பாதியாகும்.

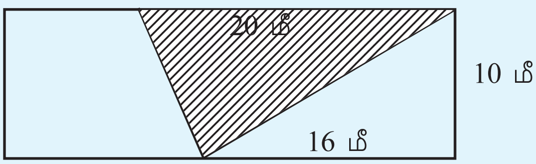
இந்த முக்கோணத்தைப் பாருங்கள்.



தேவையான நீளங்களை அளந்து இந்த முக்கோணத்தின் பரப்பளவைக் கண்டுபிடியுங்கள்.

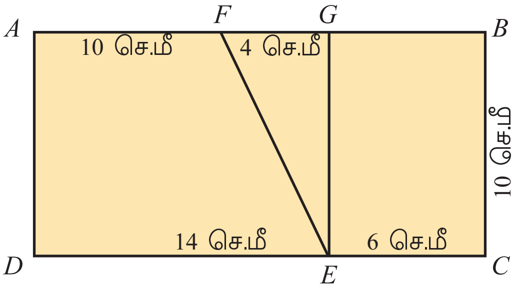
செய்து பார்ப்போம்

- செவ்வக வடிவிலான ஓர் இடத்தின் நீளம் 30 மீட்டர்; அகலம் 10 மீட்டர். இதனுள்ளே படத்தில் காட்டியிருப் பதைப் போன்று முக்கோண வடிவ இடம் வாழைபயிர் செய்வதற்காக ஒதுக்கப்பட்டுள்ளது.



- வாழை பயிர் செய்யக் கூடிய இடத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?
- வாழை பயிரிடப்படும் இடத்தோடு சேர்ந்துள்ள முக்கோண வடிவ இடத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?
- வாழை பயிரிடப்படும் இடத்தின் அருகிலுள்ள சரிவக வடிவ இடத்தின் பரப்பளவு எவ்வளவு?
- ΔABC யில் $\angle B = 90°$ BCயின் நீளம் 8 செ.மீட்டரும் பரப்பளவு 48 சதுர செ.மீட்டரும் ஆகும். இந்த முக்கோணத்தில் BC என்ற பக்கத்தின் நீளம் Dவரை 6 செ.மீ. நீட்டப்படுகிறது. ADயை இணைக்கும்போது கிடைக்கும் முக்கோணம் ΔADCயின் பரப்பளவு எவ் வளவு?

சரிவகமானால்



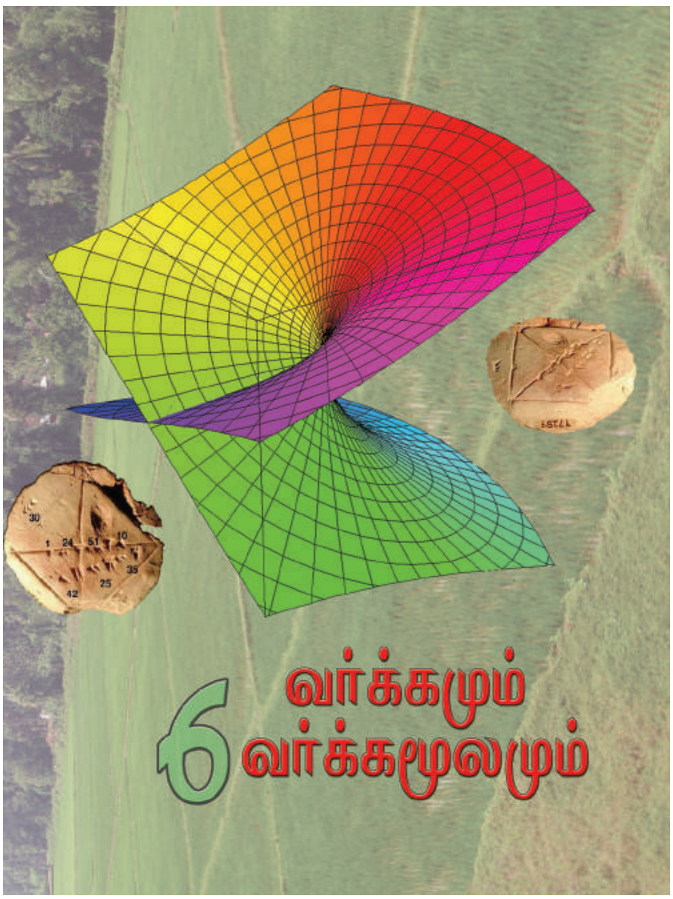
$ABCD$ ஒரு செவ்வகமாகும். EFG ஒரு செங்கோண முக்கோணமாகும். $AFED$, $ECBF$ ஆகிய சரிவகங் களின் பரப்பளவு எவ்வளவாக இருக்கும்?

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்படுத்த வேண்டியுள்ளது
• செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப் பளவைக் கண்டுபிடிக்கும் வழிமுறையை விவரித்தல்.			
• செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவு என்ற கருத்தைப் பயன்படுத்தி எந்த ஒரு முக் கோணத்தின் பரப்பளவையும் கண்டுபிடிக்க முடியும் என நிறுவுதல்.			
• செங்கோண முக்கோணத்தின் பரப்பளவுடன் தொடர்புடைய பிரச்சனைகளுக்குத்ே தீர்வு காணுதல்.			

6

வர்க்கமும் வர்க்கமூலமும்



முக்கோண எண்கள்

முக்கோண வடிவில் பொட்டுகள் அடுக்கப் பட்டிருப்பதைப் பாருங்கள்:

ஒவ்வொரு முக்கோணத்திலும் எத்தனை பொட்டுகள் உள்ளன?

$1, 3, 6, ..$

இந்த எண்களை முக்கோண எண்கள் (triangular Numbers) எனக் கூறலாம்.

முதல் முக்கோண எண் $= 1$.

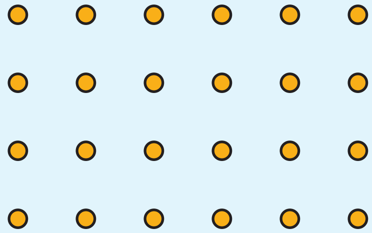
அடுத்த முக்கோண எண் $1 + 2 = 3$.

அதற்கு அடுத்த எண் $1 + 2 + 3 = 6$.

10-வது முக்கோண எண் என்ன?

நிரையும் நிரலும்

இந்த படத்தைப் பாருங்கள்.



நிரையும் நிரலுமாக செவ்வக வடிவில் பொட்டுகள் அடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மொத்தம் எத்தனை பொட்டுகள்?

பொட்டுகளை ஒவ்வொன்றாக எண்ணிப் பார்த்துதான் கண்டுபிடித்தீர்களா?

24 பொட்டுகளை வேறு ஏதேனும் முறையில் செவ்வக வடிவில் அடுக்க முடியுமா?

இவற்றில் ஏதேனும் சதுரம் உண்டா?

எத்தனை பொட்டுகளை மாற்றி சதுரம் உருவாக்க முடியும்?

சதுரம் உருவாக்கக் கூடிய எண்ணிக்கையின் சிறப்பு என்ன?

இவ்வாறு சதுரவடிவில் ஒழுங்குபடுத்தக் கூடிய எண்களே சதுர எண்கள்.

வர்க்கம்

36 என்ற எண்ணை இரு எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எந்தெந்த முறையில் எழுதலாம்?

$2 \times 18, 3 \times 12, 4 \times 9,$ என பல்வேறு முறையில் பிரித்தெழுதலாம்.

$36 = 6 \times 6$ எனவும் எழுதலாம்.

இதைச் சுருக்கி

$36 = 6^2$ என எழுதலாம்.

6 ஐ 6 ஆல் பெருக்குவது, அல்லது 6 இன் 2-ஆம் அடுக்கு 36.

இதனை வேறொரு முறையிலும் சொல்லலாம்.

6 இன் வர்க்கம் 36.

எனில் 5 இன் வர்க்கம் என்ன?

முழுவர்க்கங்கள்

1, 4, 9, 16, ... என்பவை எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்கள் ஆகும்.

இவற்றை முழுவர்க்கங்கள் எனக் கூறலாம்.

16 க்குப் பின் வரக்கூடிய (perfect squares) முழுவர்க்கம் எது?

20 ஒரு முழுவர்க்கமில்லை. ஏன்?

முழுவர்க்கங்களின் வரிசையை வேறொரு முறையில் பார்ப்போம்.

1 லிருந்து 4-ஐ அடைய 3ஐ கூட்ட வேண்டும்.

4 லிருந்து 9-ஐ அடைவதற்கோ?

இதை வேறு முறையிலும் கூறலாம்.

$$4 - 1 = 3$$
$$9 - 4 = 5$$
$$16 - 9 = 7$$

இவை அனைத்தும் ஒற்றை எண்கள் அல்லவா?

எனவே அடுத்தடுத்த முழுவர்க்கங்களின் வித்தியாசம் ஒற்றை எண்ணாகும்.

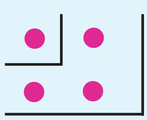
வேறு முறையிலும் கூறலாம்.

$$4 = 1 + 3$$
$$9 = 4 + 5 = 1 + 3 + 5$$
$$16 = 9 + 7 = 1 + 3 + 5 + 7$$

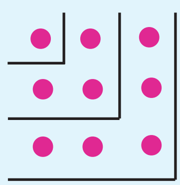
இவற்றில் எல்லாம் நாம் காண்பது என்ன?

ஒன்று முதலுள்ள ஒற்றை எண்களை தொடர்ச்சியாக கூட்டினால் முழுவர்க்கங்கள் கிடைக்கும்.

இதைப் பட வடிவிலும் பார்க்கலாம்.



$1 + 3 = 4$



$1 + 3 + 5 = 9$

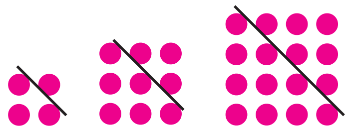
இவ்வாறு ஒற்றை எண்களைக் கூட்டி 20 வரையிலான எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்களை எழுதுவீர்களா?

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1 + 3 = 4$$
$$3^2 = 4 + 5 = 9$$
$$4^2 = 9 + 7 = 16$$

இவ்வாறு தொடர்ந்தால் போதும்.

சதுரமும் முக்கோணமும்

இந்த படங்களைப் பாருங்கள்:



ஒவ்வொரு சதுரமும் இரண்டு முக்கோணங்களாக பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

இதை எண்களாக எழுதிப் பார்ப்போம்:

$$4 = 1 + 3$$
$$9 = 3 + 6$$
$$16 = 6 + 10$$

இது தொடர்ந்து சரிதானா எனப் பார்க்கவும்.

என்ன கிடைத்தது?

1 ற்குப் பிறகு வரக்கூடிய முழுவர்க்கங்கள் (சதுர எண்கள்) எல்லாம் அடுத்தடுத்துள்ள இருமுக்கோண எண்களின் தொகையாகும்.

7-வது, 8-வது முக்கோண எண்களின் தொகை எவ்வளவு?

கூடுதலும் குறைவும்

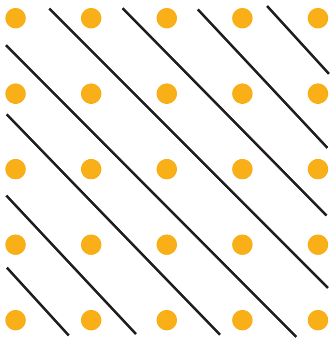
$$1 = 1$$

$$4 = 1 + 2 + 1$$

$$9 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$$

$$16 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$$

இதே முறையில் பிற முழுவர்க்கங்களையும் எழுதிப் பாருங்கள்.



1 முதல் தொடர்ந்து வரக்கூடிய சில ஒற்றை எண்களின் தொகை, எண்களின் எண்ணிக்கை இவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன?

1 முதல் தொடர்ந்து வரக்கூடிய 30 ஒற்றை எண்களின் தொகை என்ன?

பத்தின் விளையாட்டு

10 இன் வர்க்கம் 100 ஆகும். 100ன் வர்க்கம் என்ன?

1000 இன் வர்க்கத்தில் 1-ற்குப்பின் எத்தனை பூஜியங்கள் காணப்படும்?

10000 இன் வர்க்கத்தில் எத்தனை பூஜியங்கள்?

வர்க்கமாக மாற்றும் போது பூஜியங்களின் எண்ணிக்கையில் ஏற்படும் மாற்றம் என்ன?

10, 100, 1000, 10000, ... போன்ற எண்களின் முழுவர்க்கங்களை எவ்வாறு கண்டுபிடிக்கலாம்?

இலட்சம் ஒரு முழுவர்க்கமாகுமா?

பத்து லட்சமானால்?

இனி 20, 200, 2000 இவற்றின் வர்க்கங்களைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

400000000 ஒரு முழுவர்க்கமாகுமா?

ஒரு பூஜியம் கூட சேர்த்தாலோ?

இனி சில வினாக்கள் மனக்கணக்காக செய்வீர்கள் அல்லவா?

- கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களின் வர்க்கம் கண்டுபிடிக்கவும்.
  - 30
  - 400
  - 7000
  - 6×10^{25}
- கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களில் முழுவர்க் கங்களைக் கண்டுபிடிக்கவும்.
  - 2500
  - 36000
  - 1500
  - 9×10^{7}
  - 16×10^{24}

அடுத்த வர்க்கம்

21 இன் வர்க்கம் என்ன?

பெருக்குவதற்கு முன்.

20 இன் வர்க்கம் 400 அல்லவா? எனில் 21 இன் வர்க்கம் கிடைக்க 400 உடன் ஒரு ஒற்றை எண்ணைக் கூட்டினால் போதும்.

எந்த ஒற்றை எண்?

முதலிலிருந்து பார்ப்போம்.

$$2^2 = 1^2 + 3 = 1^2 + (1 + 2)$$

$$3^2 = 2^2 + 5 = 2^2 + (2 + 3)$$

$$4^2 = 3^2 + 7 = 3^2 + (3 + 4)$$

$$5^2 = 4^2 + 9 = 4^2 + (4 + 5)$$

என்றெல்லாம் எழுதலாம் அல்லவா? இந்த முறையில் தொடர்ந்தால் 21^2 ஐ எப்படி எழுதலாம்?

$$21^2 = 20^2 + (20 + 21)$$

அதாவது

$$21^2 = 400 + 41 = 441$$

இனி முன்னர் செய்தது

$$22^2 = 441 + 43 = 484$$

எனத் தொடரலாம்.

101 இன் வர்க்கம் எப்படி கண்டுபிடிக்கலாம்?

$$100^2 = 10000$$

இனி எதைக் கூட்ட வேண்டும்?

$$100 + 101 = 201$$

அப்படியானால்

$$101^2 = 10000 + 201 = 10201$$

- இது போன்று கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களின் வர்க்கம் கண்டுபிடிக்கவும்.
    - 51
    - 61
    - 121
    - 1001
- 90 முதல் 100 வரையுள்ள எண்ணல் எண்களின் வர்க்கம் கண்டுபிடிக்கவும்.

பின்னமும் வர்க்கமும்

ஒரு பின்ன எண்ணை அதே எண்ணால் பெருக்கி கிடைப்பதையும் வர்க்கம் என கூறலாம்.

$\frac{3}{4}$ ன் வர்க்கம் என்ன?

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3\times3}{4\times4} = \frac{9}{16}$$

அதாவது

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \frac{3^2}{4^2}$$

எனவே ஒரு பின்ன எண்ணின் வர்க்கம் கண்டுபிடிக்க பகுதி, தொகுதி இவற்றின் வர்க்கங்கள் தனித்தனியே கண்டுபிடித்தால் போதும்.

வர்க்கங்களின் வித்தியாசம்

$$2^2 = 1^2 + (1 + 2)$$

$$3^2 = 2^2 + (2 + 3)$$

$$4^2 = 3^2 + (3 + 4)$$

எனப் பார்த்தீர்கள் அல்லவா?

இதை வேறு முறையிலும் எழுதலாம்.

$$2^2 - 1^2 = 1 + 2$$

$$3^2 - 2^2 = 2 + 3$$

$$4^2 - 3^2 = 3 + 4$$

பொதுவாக கூறினால், அடுத்தடுத்த இரு எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் அந்த எண்களின் தொகையாகும்.

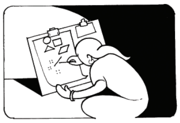
இனி இந்த கணக்குகளைப் பாருங்கள்.

$$3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

$$4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

ஒன்றுவிட்ட எண்களின் வர்க்கங்களின் வித்தி யாசம் எண்களின் தொகை இவற்றிற்கிடையே உள்ள தொடர்பு என்ன?



செயல்திட்டம்

கடைசி இலக்கம்

1 முதல் 10 வரையுள்ள எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்களின் கடைசி இலக்கம் மட்டும் பாருங்கள்.

1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1, 0

இனி 11 முதல் 20 வரையுள்ள எண்களின் வர்க்கங்களின் கடைசி இலக்கம் பாருங்கள்.

இதே வரிசை தானா?

வேறொன்றைப் பார்க்கலாம்.

ஏதேனும் முழுவர்க்கத்தின் கடைசி இலக்கம் 2 ஆகுமா? கடைசி இலக்கமாக வராத எண்கள் எவை?

எனில் 2637 என்ற எண் ஒரு முழுவர்க்கமா?

ஒரு எண் முழுவர்க்கமல்ல என உறுதிசெய்ய கடைசி இலக்கம் மட்டும் பார்த்தால் போதும்.

கடைசி இலக்கம் மட்டும் பார்த்து ஒரு எண் முழுவர்க்கம் என கூற இயலுமா?

இனி இவ்வினாக்களை மனக்கணக்காக செய்வீர்களா?

- கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களின் வர்க்கம் கண்டு பிடிக்கவும்.
  - $\frac{2}{3}$
  - $\frac{1}{5}$
  - $\frac{7}{3}$
  - $1\frac{1}{2}$
- கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களில் பின்னஎண் களின் வர்க்கங்கள் எவை?
  - $\frac{4}{15}$
  - $\frac{8}{9}$
  - $\frac{16}{25}$
  - $2\frac{1}{4}$
  - $4\frac{1}{9}$
  - $\frac{8}{18}$

தசம வர்க்கங்கள்

0.5 இன் வர்க்கம் என்ன?

$5^2 = 25$ என்பது தெரியும். 0.5×0.5 என்ற பெருக்கற்பலனில் எத்தனை தசம இடங்கள் காணப்பட வேண்டும்? ஏன்?

$0.5 = \frac{5}{10}$ என்று கூறலாம்.

இதுபோன்று 0.05 இன் வர்க்கம் கண்டுபிடிக்கலாமா?

சில எண்ணல் எண்களின் வர்க்கங்கள் கண்டுபிடித்தீர்கள் அல்லவா. இதைப் பயன்படுத்தி 1.5 இன் வர்க்கம் என்ன எனக் கூறலாமா?

0.15 இன் வர்க்கம் என்ன?

இந்த வினாக்களையும் மனக்கணக்காக செய்யலாம் அல்லவா.

- கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களின் வர்க்கம் கண்டுபிடிக்கவும்.
  - 1.2
  - 0.12
  - 0.013
- கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களில் முழுவர்க்கமாக வரக்கூடிய எண்கள் எவை?
  - 2.5
  - 0.25
  - 0.0016
  - 14.4
  - 1.44

வர்க்கங்களின் பெருக்கல்

$5^2 \times 4^2$ இன் மதிப்பு என்ன?

$5^2 \times 4^2 = 25 \times 16 =$ ....

இதை மேலும் எளிதாகச் செய்யலாம்.

$$\begin{aligned} 5^2 \times 4^2 &= 5 \times 5 \times 4 \times 4 \\ &= (5 \times 4) \times (5 \times 4) \\ &= 20 \times 20 \\ &= 400 \end{aligned}$$

இதுபோன்று கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள செயல்களை மனக் கணக்காகச் செய்து விடை கூறுவீர்களா?

- $5^2 \times 8^2$
- $2.5^2 \times 4^2$
- $(1.5)^2 \times (0.2)^2$

இங்கே நாம் பயன்படுத்திய விதி என்ன?

இரு எண்களின் வர்க்கங்களின் பெருக்கற்பலனும், அந்த எண்களின் பெருக்கற்பலனின் வர்க்கமும் சமமாகும்.

இயற்கணிதத்தில் கூறினால்?

x, y எந்த எண்களானாலும்

$$x^2y^2 = (xy)^2$$

இரண்டு எண்களுக்குப் பதிலாக மூன்று எண்கள் ஆகுமாயின்?

வர்க்க காரணிகள்

30 ஐ பகா எண்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதுவது எப்படி?

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

எனில் 900 என்ற எண்ணை எவ்வாறு காரணிப்படுத்தலாம்?

$$900 = 30^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

இதுபோன்று $24 = 2^3 \times 3$ என்பதையும் $24^2 = 576$ என்பதையும் உபயோகித்து

$$576 = 24^2 = (2^3 \times 3)^2 = (2^3)^2 \times 3^2 = 2^6 \times 3^2$$

என காரணிப்படுத்தலாம் அல்லவா.

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு எண்ணையும் அதன் வர்க்கத்தையும் பகா எண்களின் அடுக்குகளின் பெருக்கற் பலனாக எழுதுவீர்களா?

- 35
- 45
- 72
- 36
- 49

வர்க்கங்களின் பகா காரணிகளின் அடுக்குகளுக்கு ஏதேனும் தனித்தன்மை உள்ளதா?

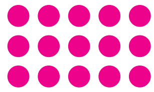
மறுதலையாகக் கூறினால்

ஒரு சதுரம் வரையவும். அதன் பரப்பளவு 9 சதுர சென்டிமீட்டராக இருக்க வேண்டும். எப்படி வரையலாம்?

சதுரத்தின் பரப்பளவு பக்கத்தின் வர்க்கம் அல்லவா?

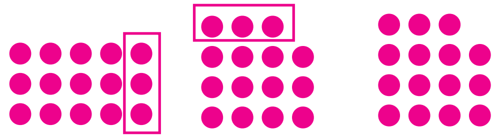
செவ்வகமும் சதுரமும்

படத்தைப் பாருங்கள்:

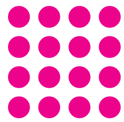


செவ்வக வடிவில் சில பொட்டுகள். இவற்றை வேறு முறையில் அடுக்கலாமா? ஒரு சதுரம் உருவாக்கலாமா?

இப்படி மாற்றிப் பாருங்கள்.



சதுரமாக மாற்றுவதற்கு இனி எத்தனைப் பொட்டுகள் வேண்டும்?



முதல் செவ்வகத்தில் எத்தனைப் பொட்டுகள் இருந்தது?

தற்பொழுது சதுரத்தில் எத்தனைப் பொட்டுகள் இருக்கிறது?

$$4^2 = (3 \times 5) + 1$$

இந்த உத்தி எல்லா செவ்வகங்களுக்கும் பொருந்துமா?

இங்கு பயன்படுத்திய எண்கள் 3, 4, 5 என்பவை அல்லவா?

இது பொருந்த வேண்டுமெனில் முதல் செவ்வகத்தின் நிரையிலும் நிரலிலும் உள்ள பொட்டுகளின் எண்ணிக்கை எப்படி இருக்க வேண்டும்?

இதை எண்களாக எழுதினால்?

$$2^2 = (1 \times 3) + 1$$
$$3^2 = (2 \times 4) + 1$$
$$4^2 = (3 \times 5) + 1$$

இதைத் தொடர்ந்து எழுதிப் பாருங்கள்.

முழுவர்க்கத்தின் வர்க்கமூலம்

784 ஒரு முழுவர்க்க எண்ணாகும், இதன் வர்க்கமூலம் என்ன?

784 என்ற எண் 400, 900 ஆகிய முழுவர்க்கங்களுக்கு இடையேயாகும். 400-ன் வர்க்க மூலம் 20 எனவும், 900-ன் வர்க்கமூலம் 30 எனவும் நமக்குத் தெரியும்.

எனவே 784 ன் வர்க்கமூலம் 20க்கும் 30 க்கும் இடையே ஆகும். 784ன் ஒன்றாம் இலக்கத்தில் 4 வருவதால் அதன் வர்க்கமூலத்தின் ஒன்றாம் இலக்கத்தில் 2 அல்லது 8 வரும். அதாவது $\sqrt{784}$ என்பது 22 அல்லது 28 ஆகும்.

784 என்ற எண் 400ஐ விட 900ன் அருகில் உள்ளது. எனவே $\sqrt{784} = 28$ ஆகும். இனி 28ன் வர்க்கம் கண்டுபிடிக்கவும்.

இதுபோன்று 1369, 2116, 2209 ஆகிய எண்களின் வர்க்கமூலம் கண்டுபிடிக்கவும்.

ஆகவே, பரப்பளவு 9 சதுரசென்டிமீட்டராக வேண்டுமெனில் பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

இதுபோன்று 169 சதுர சென்டிமீட்டர் பரப்பளவுள்ள சதுரம் வரைய வேண்டுமெனில் பக்கத்தின் நீளம் எவ்வளவு இருக்க வேண்டும்?

அதற்கு 169 எந்த எண்ணின் வர்க்கம் என்பதைக் கண்டு பிடிக்க வேண்டும். முன்பு தயாரித்த வர்க்க அட்டவணையைப் பார்த்தால் $13^2 = 169$ எனப் பார்க்கலாம். எனவே 13 சென்டிமீட்டர் அளவுள்ள சதுரம் வரைந்தால் போதும்.

இங்கே ஒரு எண் எந்த எண்ணின் வர்க்கம் எனக் கண்டு பிடித்தோம். இந்தச் செயலை வர்க்கமூலம் கண்டுபிடித்தல் எனக் கூறலாம்.

அதாவது 13 இன் வர்க்கம் 169 என்பதை மறுதலையாகக் கூறினால், 169 இன் வர்க்கமூலம் 13 ஆகும். (169 is the square of 13 and 13 is the square root of 169)

13 ன் வர்க்கம் 169 என்பதை

$$13^2 = 169$$

என சுருக்கி எழுதுவதுபோல 169 இன் வர்க்கமூலம் 13 என்பதை

$$\sqrt{169} = 13$$

எனச் சுருக்கி எழுதலாம்.

(வர்க்கமூலம் கண்டுபிடித்தல் என்ற செயலை $\sqrt{}$ என்ற குறியீடு உபயோகித்துக் குறிப்பிடலாம்)

இதுபோன்று 5 இன் வர்க்கம் 25 என்பதை 25 இன் வர்க்க மூலம் 5 எனவும் கூறலாம். சுருக்கி எழுதினால்

$$5^2 = 25$$

$$\sqrt{25} = 5$$

பொதுவாகக் கூறினால்,

> x, y ஆகிய இரண்டு எண்களில் $x^2 = y$ எனில் $\sqrt{y} = x$

இனி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களின் வர்க்கமூலம் கண்டுபிடிக்கவும். (வர்க்க அட்டவணை பயன்படுத்தலாம்)

- 100
- 256
- $\frac{1}{4}$
- $\frac{16}{25}$
- 1.44
- 0.01

வர்க்கமூலக் காரணி

1225 இன் வர்க்கமூலம் எப்படிக் கண்டுபிடிக்கலாம்?

வர்க்கங்களின் பெருக்கற்பலனும் வர்க்கமானதால் 1225 ஐ வர்க்கங்களின் பெருக்கற்பலனாக எழுதினாலும் போதும். அதற்கு 1225ஐ பகா எண்களின் காரணிகளாக எழுதிப் பாருங்கள்.

$$1225 = 5^2 \times 7^2$$

வர்க்கங்களின் பெருக்கற்பலன், பெருக்கற்பலனின் வர்க்க மானதால்

$$5^2 \times 7^2 = (5 \times 7)^2 = 35^2$$

எனவே

$$1225 = 35^2$$

இதிலிருந்து

$$\sqrt{1225} = 35$$

வேறு ஒரு எடுத்துக்காட்டைப் பாருங்கள்: $\sqrt{3969}$ கண்டு பிடிக்கவும்.

முன்பு செய்ததைப் போன்று 3969ஐ பகா எண்களின் காரணிகளாக எழுதுங்கள்.

$$3969 = 3^2 \times 3^2 \times 7^2$$
$$= (3 \times 3 \times 7)^2$$

இதிலிருந்து $\sqrt{3969} = 3 \times 3 \times 7 = 63$

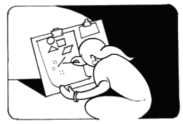
எனக் கிடைக்கும்.

இனி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களின் வர்க்கமூலம் கண்டுபிடியுங்கள்.

- 256
- 2025
- 441
- 9216
- 1089
- 15625
- 1936
- 3025
- 12544

செய்து பார்ப்போம்

- சதுர வடிவிலான ஓர் இடத்தின் பரப்பளவு 1024 சதுர மீட்ட ராகும். இதன் ஒரு பக்கத்தின் நீளம் எத்தனை மீட்டர்?
- ஒரு அரங்கில் 625 நாற்காலிகள் நிரையாகவும், நிரலாகவும் அடுக்கப்பட்டுள்ளது. நிரைகளுடையவும் நிரல்களுடையவும் எண்ணிக்கை சமமாகும். இதில் ஒரு நிரையிலும் ஒரு நிரலிலுமுள்ள அனைத்து நாற்காலி களையும் அகற்றினர். எனில் எத்தனை நாற்காலிகள் அகற்றப் பட்டது? மீதி எத்தனை நாற்காலிகள் உள்ளன?
- 1 முதல் தொடர்ச்சியாக சில ஒற்றை எண்களை கூட்டிய போது 5184 கிடைத்தது. எதுவரையிலான ஒற்றை எண் கள் கூட்டப்பட்டது?
- தொடர்ச்சியான இரண்டு எண்ணல் எண்களையும் அவற் றின் முதலாவது எண்ணின் வர்க்கத்தையும் கூட்டியபோது 5329 கிடைத்தது. எண்கள் எவை?



செயல்திட்டம்

இலக்கங்களின் தொகை

16 ஒரு முழுவர்க்கம் அல்லவா? இதன் இலக்கங் களான 1 யும் 6 யும் கூட்டினால் 7 கிடைக்கும்.

அடுத்த முழுவர்க்கமான 25 இன் இலக்கங்களைக் கூட்டினால் 7 கிடைக்கும்.

36 இன் இலக்கங்களைக் கூட்டினால் 9 கிடைக்கும்.

7 இன் வர்க்கமான 49 இன் இலக்கங்களைக் கூட்டி னால் 13; இதன் இலக்கங்களை மீண்டும் கூட்டி னால் 4.

இவ்வாறு 1 முதல் உள்ள முழுவர்க்கங்களின் இலக்கங்களின் தொகையை எழுதிப் பாருங்கள். (தொகை ஓரிலக்க எண் வருவது வரை தொடர வேண்டும்).

முழுவர்க்கத்தின் இவ்வாறுள்ள இலக்கங்களின் தொகையின் சிறப்பியல்பு என்ன?

3324 ஒரு முழுவர்க்கமா?

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்படுத்த வேண்டியுள்ளது
• சதுர எண்களின் சிறப்புகளை விளக்குதல்.			
• சதுர எண்கள் முக்கோண எண்கள் இடையிலான தொடர்பை விளக்குதல்.			
• வர்க்கம், வர்க்கமூலம் ஆகியவற்றை எடுத்துக் காட்டுடன் விளக்குதல்.			
• ஓர் எண்ணின் வர்க்கம் கண்டுபிடித்தல்.			
• வர்க்க எண்களின் சிறப்புகளை அறிவுப் பூர்வமாக நிறுவுதல்.			
• வாய்மொழிக் கூற்றுகளை '$\sqrt{\ }$' என்ற குறியீடு உபயோகித்தும், மறுதலையாகவும் கூறுதல்.			
• ஒரு முழுவர்க்கத்தின் வர்க்கமூலம் கண்டு பிடிக்கும் முறைகளை விளக்குதல்.			
• முழுவர்க்கத்தின் சிறப்பியல்புகளை எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குதல்.			
• வர்க்கமூலம், எண் தொடர்புகள் ஆகியவை உபயோகித்து நடைமுறை பிரச்சனை களுக்குத் தீர்வு காணுதல்.			

7

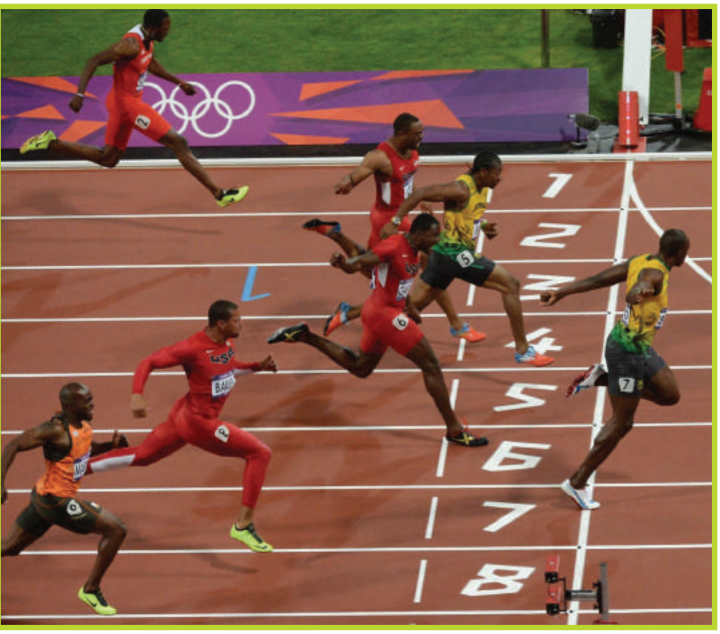
வேகத்தின் கணிதம்

ஒலிம்பிக்

2012 லண்டன் ஒலிம்பிக்கில் 100 மீட்டர் ஓட்டப் பந்தயத்தில் முதல் 5 இடங்களைப் பிடித்தவர்கள் எடுத்துக்கொண்ட நேரத்தைப் பாருங்கள்.

வரிசை எண்	பெயர்	நேரம் (வினாடி)
1.	உசைன் போல்ட்	9.63
2.	யோகான் பிளேக்	9.75
3.	ஜஸ்டின் காற்றலின்	9.79
4.	டைசன் கே	9.80
5.	ரியான் பெய்லி	9.88

100 மீட்டர் தூரம் ஓடுவதற்கு நீங்கள் எடுத்துக் கொள்ளும் நேரம் எவ்வளவு?



திறமைசாலி யார்?

“பள்ளியில் மிகவேகமாக ஓடும் மாணவரைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். என்ன வழி?”

ஆசிரியர் கேட்டார்.

“அனைவரும் 100 மீட்டர் தூரம் ஓடினால் போதாதா?

என்று ராஜி கேட்டாள்.

“அனைவரும் 1 நிமிடம் ஓடினாலும் போதுமே.”

என்று ரகு கூறினான்.

எல்லோரும் மைதானத்திற்குச் சென்றனர்.

முதலில் அனைவரும் 100 மீட்டர் தூரம் ஓடினர்.

சிறந்த ஓட்டவீரர்கள் இவர்களே.

வரிசை எண்	பெயர்	நேரம் (வினாடி)
1.	சாம்	16 வினாடி
2.	ஜோய்	18 வினாடி
3.	ரகு	18 வினாடி
4.	முஸ்தபா	17 வினாடி

போட்டியில் வெற்றி பெற்றது யார்?

ரகு கூறியதைப் போன்று போட்டியை எளிதாக நடத்த முடியுமா?

விளையாட்டுவிழா

கோழிக்கோட்டில் வைத்து நடைபெறக்கூடிய விளையாட்டு விழாவில் பங்கேற்க ரகுவும், நண்பர்களும் பேருந்தில் பயணம் செய்தனர். காலை 7 மணிக்குப் பயணம் ஆரம்பித்தனர். 150 கி.மீ பயணம் செய்து 10 மணிக்குச் சென்றடைந்தனர். முழுநேர பயணத்திலும் வாகனம் ஒரே வேகத்தில்தான் செல்லவேண்டும் என்ற நிபந்தனை உள்ளதா?

முதல் ஒரு மணி நேரத்தில் 40 கிலோமீட்டர் அடுத்த ஒரு மணி நேரத்தில் 60 கிலோ மீட்டர், கடைசி ஒரு மணி நேரத்தில் 50 கிலோ மீட்டர்.

இப்படியான சூழ்நிலைகளில் சராசரி கணக்கிடுவது நினைவில் இருக்கிறதா?

இங்கு மொத்தம் பயணம் செய்த தூரம் 150 கி.மீ அல்லவா?

பயணம் செய்ய எடுத்துக்கொண்ட நேரம் எவ்வளவு?

ஒரு மணி நேரத்தில் பயணம் செய்த சராசரி தூரம் $\frac{150}{3}$ = 50 கி.மீ என கூறலாம்.

இதனை வேறொரு முறையிலும் கூறலாம். பேருந்தின் சராசரி வேகம் மணிக்கு 50 கிலோமீட்டர். இதை 50 கி.மீ/ மணி என எழுதலாம்.

சராசரி வேகம்

மாநில விளையாட்டு விழாவில் பங்கேற்க சலீனாவும் பீனாவும் கோழிக்கோடு வந்தனர். ஜீப்பில் பயணம் செய்த சலீனா 90 கி.மீ தூரம் பயணம் செய்ய 2 மணி நேரமானது. காரில் சென்ற பீனா 150 கி.மீ தூரம் பயணம் செய்ய 3 மணி நேரமானது. எனில் எந்த வாகனத்தின் வேகம் அதிகம்?

ஜீப்பில் பயணம் செய்த தூரம் எவ்வளவு? 90 கி.மீ.

அதற்கு எடுத்துக்கொண்ட நேரம் என்ன? 2 மணி நேரம் ஜீப்பின் சராசரி வேகம் எவ்வளவு?

$$\frac{90}{2} = 45 \text{ கி.மீ / மணி}$$

இதுபோன்று காரின் சராசரி வேகம் கண்டுபிடிக்கலாமா? கார் பயணம் செய்தது 150 கி.மீ தூரம் அல்லவா?

எடுத்துக்கொண்ட நேரம் எவ்வளவு?

காரின் சராசரி வேகம் = ...

எந்த வாகனத்தின் சராசரி வேகம் அதிகம்?

இவற்றைச் செய்து பார்க்கவும்.

- சுதீர் பயணம் செய்த ரயில் 3 மணி நேரத்தில் 240 கி.மீ தூரம் கடந்து திருவனந்தபுரத்தை அடைந்தது. ரமேஷ் பயணம் செய்த ரயில் 120 கி.மீ. தூரத்தை 2 மணி நேரத்தில் கடந்தது எனில் எந்த ரயிலின் சராசரி வேகம் அதிகம் எவ்வளவு?
- ரயிலில் 360 கி.மீ தூரம் பயணம் செய்ய 4 மணி 30 நிமிடம் ஆனது. ரயிலின் சராசரி வேகம் எவ்வளவு?

வேறொரு கணக்கைப் பார்ப்போம்.

52 கி,மீ / மணி சராசரி வேகத்தில் பயணம் செய்யும் ஒரு பேருந்தில் 6 மணி நேரத்தில் எவ்வளவு தூரம் பயணம் செய்யலாம்?

சராசரி வேகம் 52 கி.மீ/மணி. எனவே 6 மணி நேரத்தில் பயணம் செய்யக்கூடிய தூரம்

$$= 52 \times 6 = 312 \text{ கி.மீ}$$

இதே வேகத்தில் 520 கி.மீ தூரம் பயணம் செய்ய தேவைப்படும் நேரம் எவ்வளவு?

- ஜோயியின் பயண விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. காலியான கட்டங்களை நிரப்பவும்.

பயணித்த வாகனம்	பயணம் செய்த தூரம்	நேரம்	சராசரி வேகம்
புகைவண்டி	....	4 மணி நேரம்	60 கி.மீ./மணி
கார்	120 கி.மீ	2 மணிநேரம்	....
விமானம்	5040 கி.மீ.	....	840 கி.மீ/மணி

- சியாமாவுக்கு 2 மணிக்கு தேர்வு தொடங்குகிறது. 50 கி.மீ தூரம் பேருந்திலும், 175 கி,மீ தூரம் ரயிலிலும் பயணம் செய்து தேர்வு மையத்தை அடைய வேண்டும். பேருந்தின் சராசரி வேகம் 20 கி.,மீ/மணி, ரயிலின் சராசரி வேகம் 50கி.மீ/மணி ஆகும். 1 மணி நேரத்திற்கு முன்பு தேர்வு மையத்தை அடைய வேண்டுமெனில் சியாமா எத்தனை மணிக்கு வீட்டிலிருந்து புறப்பட வேண்டும்.?

நேரம் குறைப்பதற்கு

காலை 6 மணிக்கு எர்ணாகுளத்திலிருந்து புறப்பட்ட பேருந்து மதியம் 12 மணிக்கு திருவனந்தபுரத்தை வந்தடைந்தது. பேருந்தின் சராசரி வேகம் 40கி,மீ/ மணி ஆகும். பேருந்து அதே நேரம் புறப்பட்டு 1 மணி நேரம் முன்னரே வந்தடைய வேண்டுமெனில் சராசரி வேகம் எவ்வளவு அதிகரிக்க வேண்டும்?

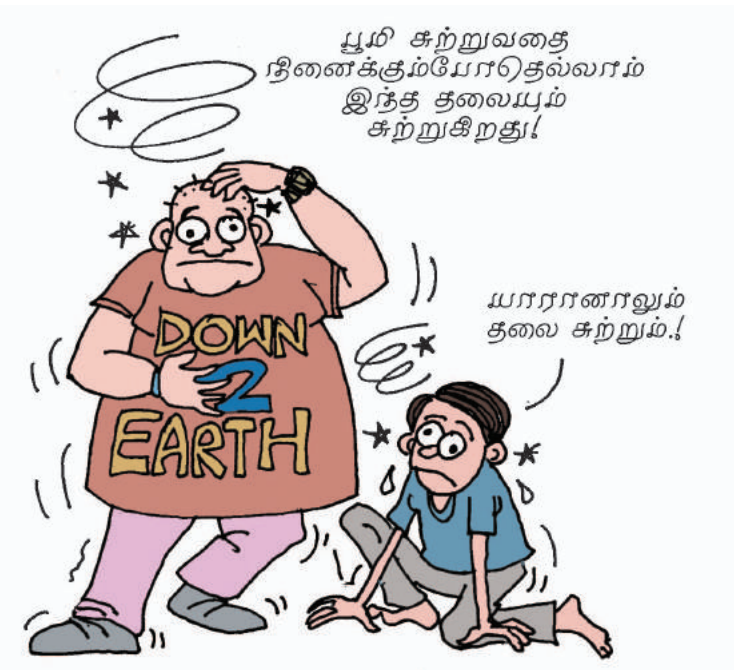
மொத்தம் பயணம் செய்யும் தூரம் எவ்வளவு?

1 மணி நேரம் குறைத்தால் பயணத்திற்கு வேண்டிய நேரம் என்ன?

1 மணி நேரம் முன்னரே வந்தடைய சராசரி வேகம் எவ்வளவாக இருக்கும்?

பூமியின் வேகம்

நாம் எப்போதாவது அசையாமல் இருந்த துண்டா? நம் அனைவரையும் தாங்கும் பூமி தொடர்ந்து சுற்றிக் கொண்டே இருக்கிறது. பூமி தானாக சுற்றுவது தோராயமாக 1700 கி.மீ/மணி வேகத்திலாகும். சூரியனைச் சுற்றுவது தோராயமாக 10,000 கி.மீ / மணி வேகத்திலாகும்.



ரயில் நிலையத்திற்கு

அபு காலை 7 மணிக்கு பேருந்தில் ஏறினான். சாதாரணமாக பேருந்து, சராசரி 30கி.மீ/மணி வேகத்தில் பயணம் செய்து 11 மணிக்கு ரயில் நிலையத்தை வந்தடைவது வழக்கம். ஆனால் அன்று மழைகாரணமாக பேருந்து சராசரி 20கி.மீ/மணி வேகத்தில் பயணம் செய்தது. அபு 9 மணிக்கு பேருந்திலிருந்து இறங்கி பின் ஒரு காரில் பயணம் செய்து 11 மணிக்கு ரயில் நிலையத்தை அடைந்தான் எனில் காரின் சராசரி வேகம் எவ்வளவு?

ரயில் நிலையத்துக்கான மொத்த தூரம் எவ்வளவு?

முதல் 2 மணி நேரத்தில் பயணம் செய்த தூரம் எவ்வளவு?

எனில் காரில் பயணம் செய்த தூரம் எவ்வளவு?

அதற்கு எடுத்துக்கொண்ட நேரம் எவ்வளவு?

இனி காரின் சராசரி வேகம் கண்டுபிடிப்பீர்கள் அல்லவா?

வேகத்தின் சராசரியும், சராசரி வேகமும்

ஒரு வாகனம் பயணத்தின் முதல் 120கி.மீ தூரம் சராசரி 30கி.மீ/மணி வேகத்திலும் அடுத்த 120 கி.மீ தூரம் 20 கி.மீ/மணி வேகத்திலும் பயணம் செய்தது. மொத்த பயணத்தின் சராசரி வேகம் எவ்வளவு?

வேகங்களின் சராசரியை எடுத்தால்

$$\frac{30+20}{2} = 25 \text{ கி.மீ/மணி}$$

இது சரியா?

சரியான முறை என்ன?

சராசரி வேகம் கணக்கிட மொத்தம் பயணம் செய்த தூரத்தை எடுத்துக்கொண்ட நேரத்தால் வகுக்க வேண்டும் அல்லவா?

30.கி.மீ/மணி என்ற சராசரி வேகத்தில் 120 கி.மீ தூரம் பயணம் செய்ய வேண்டிய நேரம் $\frac{120}{30} = 4$ மணி நேரம்

20 கி.மீ/மணி வேகத்தில் 120 கி.மீ தூரம் பயணம் செய்ய வேண்டிய நேரம்

$$= \frac{120}{20} = 6 \text{ மணி நேரம்}$$

நேரத்தின் மதிப்பு

சாதாரணமாக நாம் நேரத்தைக் கணக்கிட பயன்படுத்தும் மிகச்சிறிய அலகு வினாடி அல்லவா? வினாடியை விட சிறிய அலகுகளும் பயன்படுத்துவது உண்டு. மைக்ரோ வினாடியும் நானோ வினாடியும் இதற்கு எடுத்துக் காட்டுகளாகும். 1 வினாடியின் பத்துலட்சத்தின் ஒரு பாகம் மைக்ரோ வினாடி மைக்ரோ வினாடியின் $\frac{1}{1000}$ பாகம் நானோ வினாடி.

பி.டி.உஷா ஒலிம்பிக்கில் பதக்கம் இழந்தது வினாடியின் எத்தனை பாகம் எனத் தெரியுமா?

மொத்தம் பயணம் செய்ய எடுத்துக்கொண்ட நேரம் 4 + 6 = 10 மணி நேரம்

மொத்த பயணம் செய்த தூரம் = 240 கி.மீ

சராசரி வேகம் = 24 கி.மீ / மணி

புகை வண்டியும் பேருந்தும்

ரஹீம் 350 கி.மீ தூரம் புகைவண்டியிலும் 150 கி,மீ தூரம் பேருந்திலும் பயணம் செய்தான். புகைவண்டியின் சராசரி வேகம் 70 கி,மீ/ மணி ஆகும். பேருந்தில் பயணம் செய்தது 5 மணி நேரம் எனில் மொத்த பயணத்தின் சராசரி வேகம் என்ன?

ரத்ன கிரிக்கு

பவிள மலையிலிருந்து 360 கி,மீ தொலைவில் இருக்கிறது. ரத்னகிரி, கோபிகாவும் குடும்பமும் பவிளமலையிலிருந்து ரத்னகிரிக்கு ஒரு காரில் 60 கி,மீ/ மணி சராசரி வேகத்தில் பயணம் செய்தனர். திரும்பி வரும்போது காரின் சராசரி வேகம் 40 கி,மீ/மணி ஆகும். மொத்த பயணத்தின் சராசரி வேகம் என்ன?

இந்த கணக்கில் 360கி,மீ தூரத்திற்கு பதிலாக 180 கி,மீ தூரம் பயணம் செய்திருந்தால்?

மொத்த பயணத்தின் சராசரி வேகம் மாறுமா?

தூரத்தைக் கூறாமல்

பாபு நண்பனைப் பார்க்க மானந்தவாடிக்குச் சென்றான். பேருந்தில் பயணம் செய்தான். பேருந்தின் சராசரி வேகம் 40 கி,மீ/ மணி திரும்பி ஒரு காரில் வந்தான். காரின் சராசரி வேகம் 60கி,மீ/மணி எனில் மொத்த பயணத்தின் சராசரி வேகம் என்ன?

பயணம் செய்த தூரத்தின் சராசரி வேகம் கண்டுபிடிக்க வேண்டுமெனில் மொத்தம் பயணம் செய்த தூரத்தை நேரத்தால் வகுக்க வேண்டும். தூரம் எவ்வளவு என தெரியாது.

தூரம் எதை எடுத்தாலும் சராசரி வேகம் மாறுவதில்லை என கண்டோம் அல்லவா?

தூரம் 120 கி,மீ என கருதவும்.

மொத்தம் பயணம் செய்த தூரம் 240 கி,மீ.

முதல் பயணத்தின் நேரம் என்ன? $\frac{120}{40}$ = 3 மணி நேரம்

பல்வேறு உயிரினங்கள் பயணிக்கும் வேகத்தைப் பாருங்கள்.

வ எண்	பெயர்	கி.மீ/மணி
1	சிறுத்தை	112
2	குதிரை	70
3	நரி	65
4	சிங்கம்	80
5	யானை	40
6	வரிக்குதிரை	64

திரும்பிவர எடுத்துக் கொண்ட நேரம் $\frac{120}{60} = 2$ மணி நேரம்

எனில், மொத்த பயணத்தின் சராசரி வேகம்

$$= \frac{240}{5} = 48 \text{ கி.மீ/மணி}$$

இனி தூரம் 240 கி.மீ ஆனால்?

மொத்த பயணத்தின் சராசரி வேகம் கண்டுபிடிக்கலாம் அல்லவா?

சைக்கிள் பயணம்

- ஜோணி தனது மாமா வீட்டுக்கு 15 கி.மீ/மணி வேகத்தில் சைக்கிளில் சென்றான். 10 கி.மீ/மணி வேகத்தில் திரும்பி வந்தான். மொத்த பயணத்தின் சராசரி வேகம் என்ன?

வினாடியில் ஆனால்?

ஒரு வாகனம் சராசரியாக 72 கி,மீ/மணி வேகத்தில் பயணம் செய்கிறது. எனில் ஒரு வினாடியில் இந்த வாகனம் சராசரியாக எவ்வளவு தூரம் பயணம் செய்யும்?

1 மணி நேரம் என்பது 60 நிமிடம். 1 கி.மீ என்பது 1000 மீட்டர். எனவே 60 நிமிடத்தில் சராசரி 72000 மீட்டர் பயணம் செய்யும்.

1 நிமிடத்தில் பயணம் செய்த தூரம் $= \frac{72000}{60} = 1200$ மீட்டர்

1 வினாடியில் பயணம் செய்த தூரம் $= \frac{1200}{60} = 20$ மீட்டர்

வாகனத்தின் சராசரி வேகம் 20 மீட்டர்/வினாடி என கூறலாம்.

15 மீட்டர்/வினாடி வேகத்தில் செல்லக்கூடிய ஒரு வாகனத்தின் வேகம் ஒரு மணி நேரத்தில் எவ்வளவு இருக்கும் என கண்டுபிடித்து பாருங்கள்.

பின்வருவனவற்றைச் செய்து பாருங்கள்.

- ஒரு புகைவண்டி 36 கி,மீ/ மணி வேகத்தில் பயணம் செய்கிறது. 3 நிமிடநேரத்தில் இந்த புகைவண்டி எவ்வளவு தூரம் பயணம் செய்யும்?
- 180 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு புகைவண்டி ஒரு கம்பத்தை கடந்து செல்ல 9 வினாடி தேவை எனில் புகை வண்டியின் வேகம் ஒரு மணி நேரத்தில் எவ்வளவு?

அதிக வேகம்

90 கி.மீ./மணி வேகத்தில் செல்லக்கூடிய ஒரு வாகனம் 1 நிமிடத்தில் எவ்வளவு தூரம் செல்லும்?

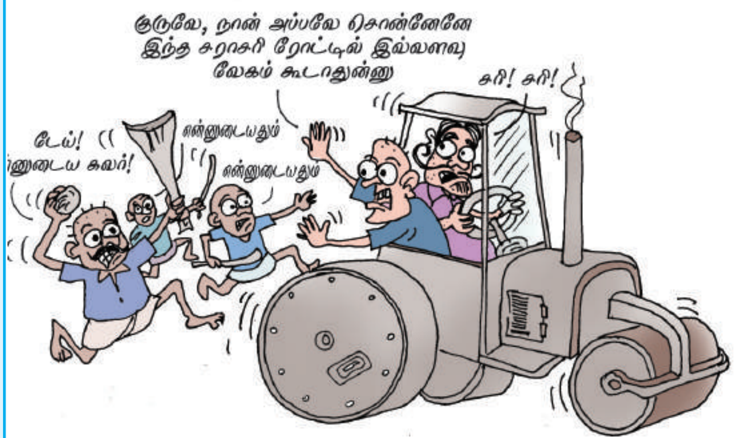
$\frac{90}{60} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ கி.மீ

ஒரு வினாடியில்?

$1\frac{1}{2}$ கி,மீ என்பது 1500 மீட்டர் அல்லவா?

$\frac{1500}{60} = \frac{75}{3} = 25$ மீ

எனில் வாகன ஓட்டுநர் பிரேக் மிதிக்க ஒரு வினாடி தாமதித்தால்? வாகனம் 25 மீட்டர் தூரம் சென்றிருக்கும்.



சாலை விபத்துக்கள்

நாள்தோறும் ஏராளம் சாலை விபத்துக்கள் நடைபெறுகிறது. இதன் முக்கிய காரணம் அதிக வேகமும் கவனக்குறைவான ஓட்டுதலும் ஆகும். எத்தனை! எத்தனை உயிர்கள் சாலை விபத்து களில் பலியாகிறது. அதிக வேகத்தை கட்டுப் படுத்த பெரிய வாகனங்களில் 'வேகக் கட்டுப் பாட்டு கருவி' பொருத்த வேண்டும் என நிபந்தனை உள்ளது. இது பொருத்தப்பட்டுள்ள வாகனங்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட வேகத்திற்கு அதிகமாகச் செல்ல இயலுவதில்லை.

நாம் ஒவ்வொருவரும் சாலை விதிகளைப் பின்பற்ற தயாரானால் விபத்துக்களைக் குறைக்க இயலும்.

செய்து பார்ப்போம்

- ஒரு கார் முதல் 15 நிமிடம் 36 கி,மீ/மணி சராசரி வேகத்திலும் அடுத்த 15 நிமிடம் 60 கி,மீ/மணி சராசரி வேகத்திலும் பயணம் செய்தது. எனில் கார் பயணம் செய்த தூரத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.
- ராமுவும் சலீமும் அயலகத்தார். இருவரும் தங்கள் சொந்த வாகனங்களில் திருவனந்தபுரம் சென்றனர். ராமுவின் கார் போகும்போது 30 கி,மீ/மணி வேகத் திலும் திரும்பி வரும்போது 50 கி,மீ/மணி சராசரி வேகத்திலும் பயணம் செய்தது. சலீமின் கார் போகும்போதும் வரும்போதும் 40 கி,மீ/மணி வேகத்தில் பயணித்தது. இருவரும் ஒரே தூரம் பயணம் செய்தனர். எனில் குறைவான நேரத்தில் பயணம் செய்தது யார்?
- ஒரே திசையில் இணையான தடங்களில் பயணிக்கும் இரண்டு புகைவண்டிளின் வேகம் முறையே 50 கி.மீ/ மணி ஆகும். முதல் புகைவண்டி புறப்பட்டு இரண்டு மணி நேரத்திற்குப் பிறகு இரண்டாவது புகைவண்டி புறப்பட்டது. எவ்வளவு தூரம் கடந்து இரு புகைவண்டி களும் ஒன்றையொன்று சந்தித்தன?
- 125 கி,மீ. நீளமுள்ள புகைவண்டி 90 கி.மீ./ மணி வேகத்தில் செல்கிறது. இந்தப் புகைவண்டி 175 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு பாலத்தைக் கடந்து செல்ல எவ்வளவு நேரம் வேண்டும்?

மீள்பார்வை

கற்றல் அடைவுகள்	என்னால் இயலும்	ஆசிரியர் உதவியுடன் இயலும்	இன்னும் மேம்படுத்த வேண்டியுள்ளது
• வாழ்க்கைச் சூழல்களில் சராசரி வேகம் என்ற கருத்தை நடைமுறைப்படுத்தி பிரச்சனைக்குத் தீர்வு காணுதல்.			
• தூரம், நேரம், வேகம் இவற்றிற்கும் இடையேயுள்ள தொடர்புகளை நிறுவுதல்.			
• அலகுகளை சூழ்நிலைகளுக்கு பொருத்த மாக மாற்றி பிரச்சனைகளுக்குத் தீர்வு காணுதல்.			