E2M9X2

അധ്യായം 3

ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ
(TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

❖ *ഒരു ഗണിതജ്ഞന് ഒരു പ്രശ്നം എങ്ങനെ പരിഹരിക്കാമെന്നറിയാം, എന്നാൽ പരിഹരിക്കാനാവില്ല – മിൽനെ* ❖

3.1 ആമുഖം

ആര്യഭട്ട
(476-550)

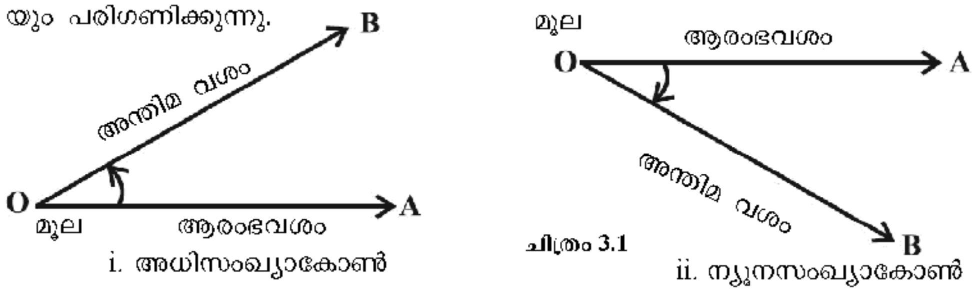
ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ അളവും, വശങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണ് ത്രികോണമിതി. ചരിവിന്റെയും, വിരിവിന്റെയും, തിരിവിന്റെയുമെല്ലാം അളവായിട്ടാണ് കോണളവുകൾ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നത് എന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ട്. ചരിത്രത്തിൽ ചരിവിന്റെ അളവുകൾ ആദ്യം വരുന്നത് ഭൂമിയിലെ പലതരം നിർമാണങ്ങളിലാണ്. തിരിവിന്റെ അളവുകൾ ആകാശ ഗോളങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിലും.

ഭൂമിയിലെ ആവശ്യങ്ങൾക്കു വേണ്ടിയാണ് ആദ്യകാല വാനശാസ്ത്രപഠനങ്ങൾ നടന്നത്. കൃഷിക്കു കാലാവസ്ഥയുമായും കാലാവസ്ഥക്കു സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഭൂമിയുടെ ഭ്രമണവുമായും ബന്ധമുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് ഭൂമിയിൽ ഭക്ഷ്യവസ്തുക്കളുടെ ഉൽപാദനത്തെക്കുറിച്ചു പഠിക്കണമെങ്കിൽ ഗ്രഹങ്ങളുടെയും നക്ഷത്രങ്ങളുടെയുമെല്ലാം സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കാനറിയണം. പ്രാചീന കാർഷിക സംസ്കാരങ്ങളിലെല്ലാം വാനശാസ്ത്രം ഒരു പ്രധാന പഠനവിഷയമാണ്. അതിനാകട്ടെ ഗണിതവും, വിശേഷാൽ ത്രികോണമിതിയും അത്യാവശ്യമാണ്.

മുൻ ക്ലാസുകളിൽ ഒരു ത്രികോണവും അതിന്റെ കോണുകളും വശങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ പരിചയപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഒരു പ്രത്യേക ന്യൂനകോണിനെ ആസ്പദമാക്കി അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിൽ പല രീതികളിൽ ഹരിച്ച് sin, cos, tan എന്നീ അളവുകൾ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇവ ഉപയോഗിച്ച് അകലം, ഉയരം, ചരിവിന്റെ അളവ് എന്നിവ കണക്കാക്കുവാനും മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൽ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വേറെയും അംശബന്ധങ്ങൾ ഉണ്ട്. അവയ്ക്കും ത്രികോണമിതിയിൽ പേരുകളുണ്ട്. ഒരു കോണിന്റെ sin, cos എന്നിവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾക്ക് യഥാക്രമം cosecant, secant എന്നിങ്ങനെയാണ് പേരുകൾ. അതുപോലെ tan വ്യുൽക്രമത്തിന് cotangent എന്നും പറയുന്നു. ഇവയെ ചുരുക്കത്തിൽ യഥാക്രമം cosec, sec, cot എന്നിങ്ങനെയാണ് എഴുതുന്നത്. ഇത്തരത്തിലുള്ള പുതിയ ആശയങ്ങളും, ത്രികോണമിതി അംശബന്ധത്തിൽ നിന്നും ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങൾ എന്ന ആശയത്തിലേക്കുള്ള പരിണാമം എന്നിവയാണ് ഇവിടെ പരാമർശിക്കുന്നത്.

3.2 കോണുകൾ (Angles)

ഒരു രശ്മി (Ray) അതിന്റെ നിശ്ചിതസ്ഥലത്തു നിന്നും എത്ര കറങ്ങി എന്നതിന്റെ അളവാണ് കോൺ. ഈ കറക്കത്തിന്റെ ദിശ അപ്രദക്ഷിണമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ കോണളവ് അധിസംഖ്യയായും കറക്കം പ്രദക്ഷിണമാണെങ്കിൽ ന്യൂനസംഖ്യയായും പരിഗണിക്കുന്നു.



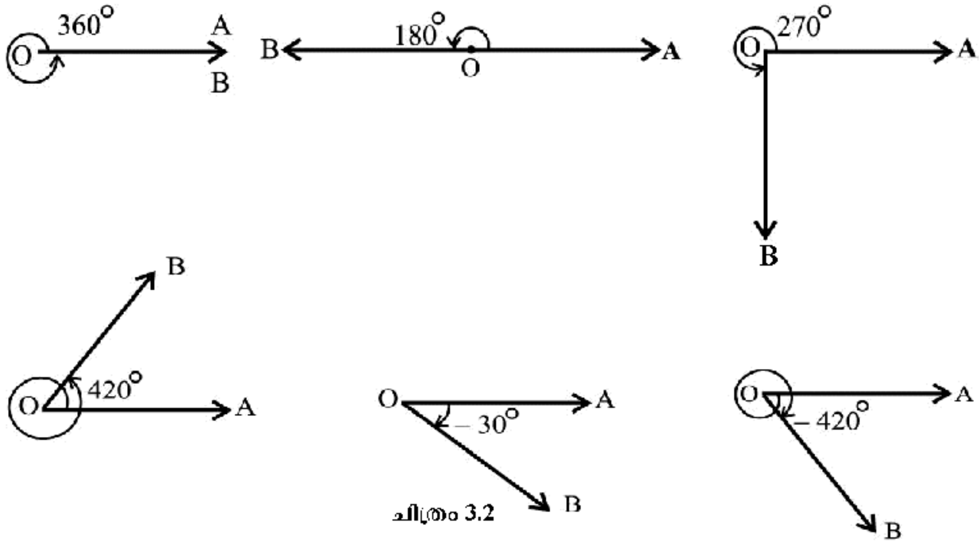
ചിത്രം 3.1

ഇനി കോണളക്കുവാനുള്ള രണ്ട് വ്യത്യസ്ത യൂണിറ്റുകൾ പരിചയപ്പെടാം.

3.2.1 ഡിഗ്രിഅളവ് (Degree Measure)

ഒരു രശ്മി അതിന്റെ നിശ്ചിതസ്ഥലത്തു നിന്നും കറങ്ങി വീണ്ടും ആരംഭിച്ച സ്ഥലത്തെത്തുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ഭ്രമണം പൂർത്തിയാക്കി എന്നു പറയാം. ഇങ്ങനെ ഒരു ഭ്രമണത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോണളവിനെ മൂല ആധാരമാക്കി, 360 തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു ഭാഗത്തെ ഒരു ഡിഗ്രി എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു ഡിഗ്രിയെ 60 മിനിറ്റായും ഒരു മിനിറ്റിനെ വീണ്ടും 60 സെക്കന്റായും വിഭജിച്ചിട്ടുണ്ട്.

അതായത്; $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$



ചിത്രം 3.2

ചിത്രം 3.2 ൽ 360°, 180°, 270°, 420°, – 30°, – 420° എന്നീ അളവുകൾ വരുന്ന കോണുകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

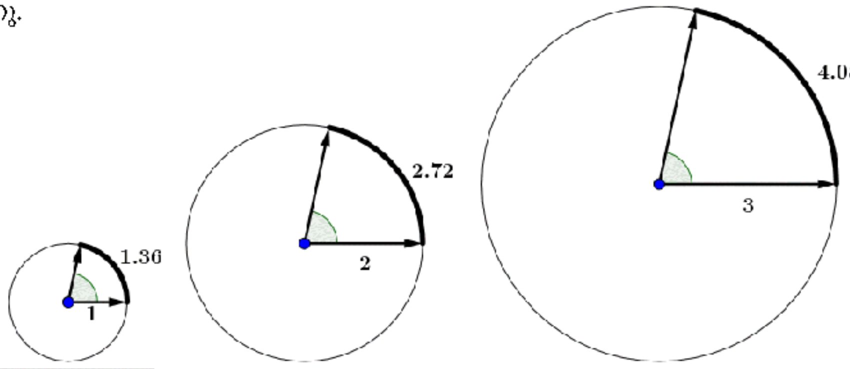
3.2.2 റേഡിയൻ അളവ് (Radian Measure)

ചിത്രം 3.3

ഒരു ക്ലോക്കിലെ മിനിറ്റ് സൂചി ഒരു മണിക്കൂറുകൊണ്ട് ഒരു ഭ്രമണം പൂർത്തിയാക്കുന്നു എന്ന് നമുക്കറിയാം. അപ്പോൾ ഈ സൂചിയിലെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഒരു മണിക്കൂറു കൊണ്ട് ഓരോ വൃത്തം ഉണ്ടാക്കുന്നു.

ഇവിടെ 10 മിനിറ്റ് കൊണ്ട് ഈ ബിന്ദുക്കൾ അതാതു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ് കറങ്ങുന്നത്. 30 മിനിട്ടാണ് സൂചി കറങ്ങിയതെങ്കിൽ ഈ ബിന്ദുക്കൾ കറങ്ങിയത് അതാത് വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗമാണ്. ഈ ആശയം മറ്റൊരുരീതിയിൽ മനസ്സിലാക്കാം.

ചിത്രത്തിൽ വ്യത്യസ്ത ആരമുള്ള വൃത്തങ്ങളിൽ ഒരേ അളവുള്ള കോൺ വരച്ചിരിക്കുന്നു.



$\frac{1.36}{2\pi \times 1} = 0.22$ $\frac{2.72}{2\pi \times 2} = 0.22$ $\frac{4.08}{2\pi \times 3} = 0.22$

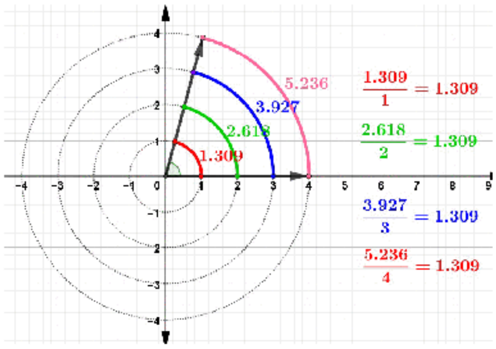
ചിത്രം 3.4

ഇവിടെ ചാപത്തിന്റെ നീളം വ്യത്യാസമാണെങ്കിലും അവ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ ഭാഗമായി കണക്കാക്കിയാൽ തുല്യമാണ്. അതായത് ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കോണളവിനകത്തുള്ള ചാപത്തിന്റെ നീളം അതാതു വൃത്തങ്ങളുടെ ചുറ്റളവിന്റെ ഒരേ ഭാഗമാണ്. ഒരു വൃത്തത്തിലെ നിശ്ചിത കോണളവിന് '$\frac{\text{ചാപത്തിന്റെ നീളം}}{\text{വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്}}$' ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായിരിക്കും.

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും അതിലെ ഒരു കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ചാപത്തിന്റെ നീളം l എന്നും പരിഗണിക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക.

$\dfrac{l}{2\pi r}$ = ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ

ഇവിടെ വ്യത്യസ്ത വൃത്തങ്ങൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചാപവും (l) ആരവും (r) മാത്രമാണ് മാറുന്നത്.



ചിത്രം 3.5

അതായത് $\dfrac{l}{r}$ = ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ എന്ന് ചുരുക്കത്തിൽ എഴുതാം.

പ്രാചീന ഗ്രീസിലെയും ഭാരതത്തിലെയും ചില കണക്കുകൂട്ടലുകളിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന ഈ ആശയം ഇത്തരത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കപ്പെട്ടത് പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്. ഇതിനെ കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഒരു യൂണിറ്റ് ആരമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ ആരത്തിന് തുല്യമായ ചാപം ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ അളവ് ഒരു റേഡിയൻ.

കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് $= \dfrac{l}{r}$

ചുരുക്കി പറഞ്ഞാൽ കോണിനുള്ളിലെ ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് ഡിഗ്രി അളവ്. ഈ ചാപം ആരത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ് കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ്.

θ റേഡിയൻ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\theta = \dfrac{l}{r} \Rightarrow l = r\theta$ എന്ന് കാണാവുന്നതാണ്.

> a, b എന്ന number slider റുകൾ നിർമ്മിക്കാം. a : Min : 1, Max : 5, increment : 1; b : Min : 0, Max : 2pi. Circle with Center and Radius എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് ആധാരബിന്ദു (A) കേന്ദ്രമായി വരുന്ന യൂണിറ്റ് ആരമുള്ള വൃത്തം വരക്കാം. Intersect tool ഉപയോഗിച്ച് x അക്ഷത്തിന്റെയും വൃത്തത്തിന്റെയും സംഗമബിന്ദുക്കൾ കാണാം (B, C). Angle with given size എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദു C, ബിന്ദു B എന്നിവയിൽ click ചെയ്ത് കോൺ b കൊടുത്ത് C′ എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്താം. A, C, C′ എന്നീ ബിന്ദു ഉപയോഗിച്ച് Circlular Arc tool കൊണ്ട് ഒരു ചാപം നിർമ്മിക്കാം. ഇപ്പോൾ Algebra view ൽ, conic ൽ ചാപത്തിന്റെ നീളം (d) കാണാൻ കഴിയും. ഇതിന്റെ object properties എടുത്ത് നിറം, ഘനം മാറ്റുന്നത് നന്നാവും. ഒരു നിശ്ചിത കോണളവിന് വൃത്തത്തിലെ ചാപത്തിന്റെ നീളവും ആരത്തിന്റെ നീളവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $\left(\dfrac{d}{r}\right)$ കണ്ടെത്തുക. ആരം വർധിപ്പിച്ച് ഈ അംശബന്ധത്തിന്റെ സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കാം.

3.2.3 ഡിഗ്രിയും റേഡിയനും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

മേൽ വിശദീകരിച്ചതു പ്രകാരം

$$\Rightarrow \text{കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ്} = \frac{l}{2\pi r}\times 360 = \frac{360}{2\pi}\times\frac{l}{r}$$

$$= \frac{360}{2\pi}\times\theta \text{ റേഡിയൻ}$$

$$= \frac{180}{\pi}\times\theta \text{ റേഡിയൻ}$$

$$1\text{റേഡിയൻ} = \frac{180^\circ}{\pi}\times\ 57^\circ\ 16' \quad (\text{ഏകദേശം})$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0.01746\ (\text{ഏകദേശം})$$

പൊതുവായ ചില കോണുകളുടെ ഡിഗ്രി അളവും അവയുടെ റേഡിയൻ അളവും ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഡിഗ്രി	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
റേഡിയൻ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

സാധാരണരീതിയിൽ കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവിനെ θ° എന്നും റേഡിയൻ അളവിനെ θ എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$$\text{റേഡിയൻ അളവ്} = \frac{\text{ഡിഗ്രി അളവ്}}{180^\circ}\times\pi$$

$$\text{ഡിഗ്രി അളവ്} = \frac{\text{റേഡിയൻ അളവ്}}{\pi}\times 180^\circ$$

ഉദാഹരണം: 1

$40^\circ\ 20'$ ഡിഗ്രി അളവിനെ റേഡിയൻ അളവിലേക്ക് മാറ്റി എഴുതുക.

പരിഹാരം

$$40^\circ\ 20' = 40\ \frac{1}{3}^\circ = \frac{\pi}{180}\times\frac{121}{3}\text{ റേഡിയൻ} = \frac{121\pi}{540}\text{ റേഡിയൻ}$$

ഉദാഹരണം: 2

6 റേഡിയൻ അളവിനെ ഡിഗ്രി അളവിലേക്ക് മാറ്റി എഴുതുക.

പരിഹാരം

π റേഡിയൻ $= 180°$.

6 റേഡിയൻ $= \frac{6}{\pi} \times 180° \approx \frac{1080 \times 7}{22}$ ഡിഗ്രി $\left[\pi = \frac{22}{7}\right]$

$= 343\frac{7}{11}$ ഡിഗ്രി $= 343° + \frac{7 \times 60}{11}$ മിനിട്ട്

[$1° = 60'$ ആയതിനാൽ]

$= 343° + 38' + \frac{2}{11}$ മിനിട്ട് [$1' = 60''$]

$= 343° + 38' + 10.9'' = 343° 38' 11''$

6 റേഡിയൻ $\approx 343° \, 38' \, 11''$ (ഏകദേശം)

ഉദാഹരണം: 3

ഒരു വൃത്തത്തിലെ 37.4 സെ.മീ. നീളമുള്ള ചാപം 60° കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്നു എങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കാണുക.

പരിഹാരം

$l = 37.4$ സെ.മീ., $\theta = 60° = \frac{60°}{180} \times \pi$ റേഡിയൻ $= \frac{\pi}{3}$

വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, $r = \frac{l}{\theta}$, ആയതിനാൽ

$$r = \frac{37.4 \times 3}{\pi} = \frac{37.4 \times 3 \times 7}{22} = 35.7 \text{ സെ.മീ.}$$

ഉദാഹരണം: 4

ഒരു വാച്ചിലെ മിനിറ്റ് സൂചിക്ക് 1.5 സെ.മീ. നീളമുണ്ട്. 40 മിനിറ്റ് കഴിയുമ്പോൾ സൂചിയുടെ അറ്റം സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം എത്ര?

പരിഹാരം

$$l = r\theta = 1.5 \times \frac{4\pi}{3} \text{ സെ.മീ.} = 2\pi \text{ സെ.മീ.} = 2 \times 3.14 \text{ സെ.മീ.} = 6.28 \text{ സെ.മീ.}$$

ഉദാഹരണം: 5

2 വ്യത്യസ്ത വൃത്തങ്ങളിലേ ഒരേ നീളമുള്ള ചാപം കേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ യഥാക്രമം 65°, 110° ആണെങ്കിൽ അവയുടെ ആരങ്ങളുടെ അനുപാതം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\theta_1 = 65^\circ = \frac{65}{180}\times\pi = \frac{13\pi}{36}$$

$$\theta_2 = 110^\circ = \frac{110}{180}\times\pi = \frac{22\pi}{36} \text{ റേഡിയൻ}$$

$$l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2,$$

$$\frac{13\pi}{36}\times r_1 = \frac{22\pi}{36}\times r_2, \text{ i.e., } \frac{r_1}{r_2} = \frac{22}{13}$$

$$r_1 : r_2 = 22 : 13.$$

പരിശീലനപ്രശ്നം : 3.1

1. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡിഗ്രി അളവുകൾക്ക് സമാനമായ റേഡിയൻ അളവുകൾ കാണുക.

   (i) 25° (ii) $-47^\circ30'$ (iii) 240° (iv) 520°

2. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന റേഡിയൻ അളവുകൾക്ക് സമാനമായ ഡിഗ്രി അളവുകൾ കാണുക.

   (i) $\frac{11}{16}$ (ii) -4 (iii) $\frac{5\pi}{3}$ (iv) $\frac{7\pi}{6}$

3. ഒരു ചക്രം ഒരു മിനിട്ടിൽ 360 തവണ കറങ്ങുന്നു എന്ന് കരുതുക. എങ്കിൽ ഒരു സെക്കൻഡിൽ എത്ര റേഡിയൻ തിരിയുന്നു എന്ന് കാണുക.
4. 100 സെന്റീമീറ്റർ ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലെ 22 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ കണക്കാക്കുക.
5. 40 സെന്റീമീറ്റർ വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ 20 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു ഞാണുണ്ട്. ഈ ഞാണുണ്ടാക്കുന്ന ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ നീളം കാണുക.
6. രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വൃത്തങ്ങളിൽ ഒരേ നീളമുള്ള ചാപങ്ങൾ യഥാക്രമം 60°, 75° കേന്ദ്രകോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവയുടെ ആരങ്ങളുടെ അനുപാതം കാണുക.
7. 75 സെന്റീമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു പെൻഡുലത്തിന്റെ അറ്റം (i) 10സെ.മീ, (ii) 15സെ.മീ, (iii) 21 സെ.മീ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നു എങ്കിൽ അതിന് സമാനമായ കേന്ദ്രകോണുകളുടെ അളവ് റേഡിയനിൽ കാണുക.

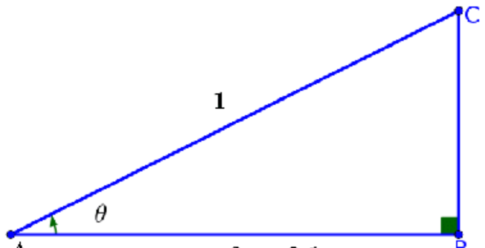
3.3 ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ (Trigonometric functions)

മുൻ ക്ലാസുകളിൽ ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധമായിട്ടാണ് കണക്കാക്കിയിരുന്നത്. ഇങ്ങനെ പറയുമ്പോൾ

കോണളവ് 90° ക്ക് അപ്പുറത്തേക്ക് വരുമ്പോൾ ഈ അളവുകൾ പ്രസക്തിയില്ലാത്തതായി അനുഭവപ്പെടും. ഇവിടെ ഒരു ബൃഹത്ത്കോണിന് എങ്ങനെയാണ് ത്രികോണമിതി അംശബന്ധങ്ങൾ നിർവചിക്കുന്നത്, അവയെ ഒരു രേഖീയ ഏകദങ്ങളായി നിർവചിക്കുന്നത് എങ്ങനെ, ഇവയുടെ ഗ്രാഫുകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ എന്നിവ വിശദീകരിക്കുന്നു.

3.3.1 sine, cosine ഏകദങ്ങൾ

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോൺ അടിസ്ഥാനമാക്കി sine, cosine എന്നീ ത്രികോണമിതീയ അംശബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് പത്താം ക്ലാസിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

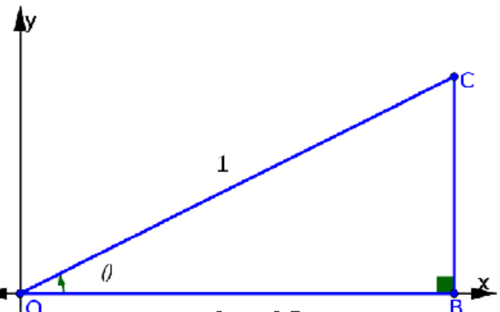


ചിത്രം 3.6

അതായത്; ΔABC ൽ

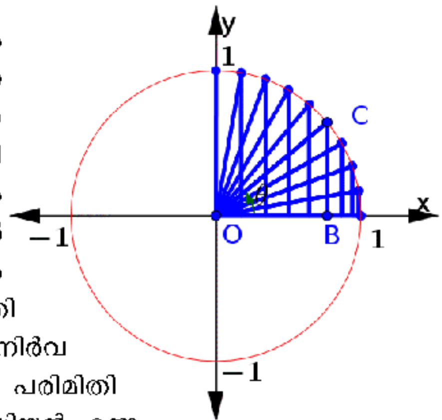
$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{1} = BC$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{1} = AB$$



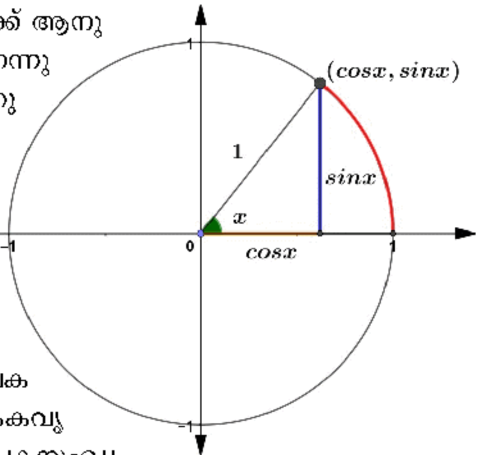
ചിത്രം 3.7

ഈ ത്രികോണത്തെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ സൂചകാക്ഷത്തിലേക്ക് മാറ്റി വരക്കാം. ഇവിടെ OB = a, BC = b യും ആയാൽ C എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (a, b) ആണ്. ഇവിടെ θ എന്ന കോണളവ് പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ എന്നു ലഭിക്കും. എങ്കിൽ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (cos θ, sin θ) ആയി മാറും. OC യുടെ നീളം ഒരു യൂണിറ്റായി നിലനിർത്തുകയും കോണളവ് (θ) വർധിപ്പിക്കുകയും ചെയ്താൽ C എന്ന ബിന്ദു ഒരു ഏകകവൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവായി കാണാം. θ യുടെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും വർധിച്ച് 90° എത്തുന്നതുവരെ ഈ രീതിയിൽ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടെത്താം പക്ഷെ 90° ക്ക് മുകളിലേക്ക് വരുമ്പോൾ മട്ടത്രികോണം ഇല്ലാതാകുകയും അംശബന്ധങ്ങൾ നിർവചിക്കാൻ കഴിയാതെ വരുകയും ചെയ്യും. ഈ പരിമിതി മറികടക്കാൻ മുൻപ് പഠിച്ച കോണളവിന്റെ റേഡിയൻ എന്ന



ചിത്രം 3.8

ആശയം ഉപയോഗപ്പെടുത്താം. ഇവിടെ θ ക്ക് ആനുപാതികമായ ചാപത്തിന്റെ നീളം x ആണെന്നു കരുതുക. കൂടാതെ ഏകക വൃത്തമായതു കൊണ്ട് θ ക്ക് തുല്യമായ കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് x ആകും. അങ്ങനെയെങ്കിൽ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ ($\cos x$, $\sin x$) സൂചകസംഖ്യയായി മാറും. ഇങ്ങനെ വരുമ്പോൾ x ന്റെ വില $\frac{\pi}{2}$ ന് മുകളിലേക്ക് വരുമ്പോഴും C ക്ക് ($\cos x$, $\sin x$) എന്ന സൂചക സംഖ്യ ലഭിക്കുന്നു. അതായത് ഈ ഏകകവൃത്തത്തിലെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിന്റെയും സൂചകസംഖ്യ ($\cos x$, $\sin x$) ആണ്. ഇനി ചാപം അളക്കുന്നത് x അക്ഷത്തിന്റെ അധിദിശയിൽ നിന്നും പ്രദക്ഷിണമായിയാണെങ്കിൽ കോണിന്റെ വില ന്യൂനസംഖ്യയാകുകയും ഏകകവൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യ ($\cos(-x)$, $\sin(-x)$) ആയി മാറുകയും ചെയ്യും.



ചിത്രം 3.9

ഇങ്ങനെ $\sin x$, $\cos x$ ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ x എന്ന സംഖ്യ 2π യെക്കാൾ വലുതോ -2π യെകാൾ ചെറുതോ ആണെങ്കിൽ വൃത്തം മുഴുവൻ ചുറ്റി എന്ന് കരുതണം. അതായത് $x \pm 2\pi$, $x \pm 4\pi$....... എന്നിവ വൃത്തത്തിലെ ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള ബിന്ദുവിനെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. അതായത് $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$,....... അങ്ങനെ വൃത്തത്തിലെ x നീളമുള്ള ചാപത്തിന്റെ അറ്റത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യ ($\cos x$, $\sin x$) എന്ന് കാണാം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ x ന്റെ ഓരോ രേഖീയ സംഖ്യാവിലകൾക്കും സമാനമായ sinc, cosinc ലഭിക്കുന്നതിനാൽ ഇവയെ രേഖീയ ഏകദമായി പരിഗണിക്കാൻ കഴിയും.

$f(x) = \sin x$; $f : R \to R$

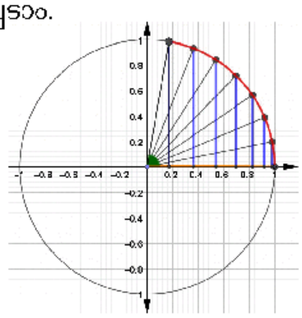
$g(x) = \cos x$; $g : R \to R$

ഇനി $\sin x$, $\cos x$ ന്റെ വിലകളുടെ സ്വഭാവം പരിചയപ്പെടാം.

ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശം

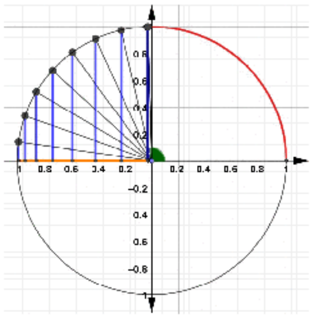
$\sin x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും വർധിച്ച് $x = \frac{\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ 1 ൽ എത്തുന്നു.

$\cos x$ ന്റെ വില 1 ൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് $x = \frac{\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ പൂജ്യമാകുന്നു.


ചിത്രം 3.10

രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശം

$\sin x$ ന്റെ വില 1 ൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് $x = \pi$ ആകുമ്പോൾ പൂജ്യമാകുന്നു.
$\cos x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് $x = \pi$ ആകുമ്പോൾ -1 ൽ എത്തുന്നു.

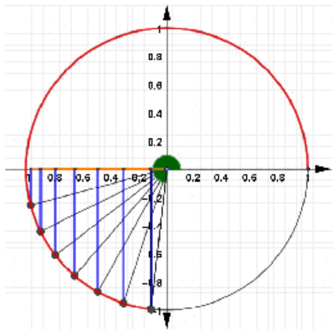


ചിത്രം 3.11

മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശം

$\sin x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് $x = \frac{3\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ -1 ൽ എത്തുന്നു.

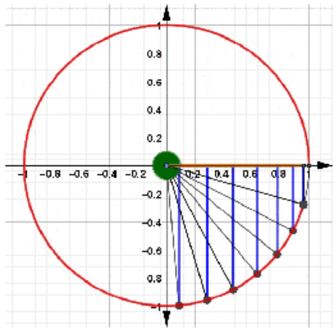
$\cos x$ ന്റെ വില -1 ൽ നിന്നും വർധിച്ച് $x = \frac{3\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ പൂജ്യത്തിൽ എത്തുന്നു.



ചിത്രം 3.12

നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശം

$\sin x$ ന്റെ വില -1 ൽ നിന്നും വർധിച്ച് $x = 2\pi$ ആകുമ്പോൾ പൂജ്യത്തിൽ എത്തുന്നു.
$\cos x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും വർധിച്ച് $x = 2\pi$ ആകുമ്പോൾ 1 ൽ എത്തുന്നു.



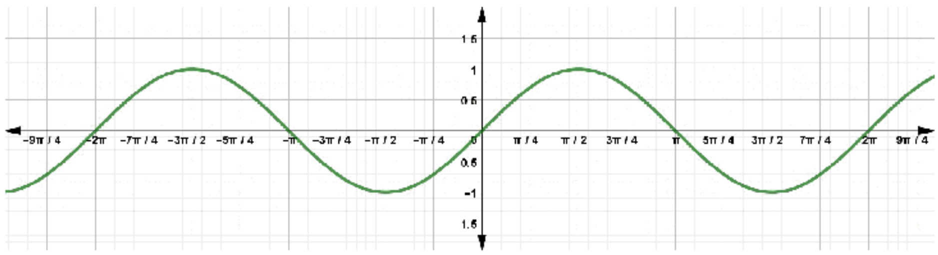
ചിത്രം 3.13

a [Min : 0, Max : 2pi, increment : $pi/20$] എന്ന number slider നിർമ്മിക്കുക. Circle with center and radius എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് ആധാരബിന്ദു (A) കേന്ദ്രമായി വരുന്ന ഒരു യൂണിറ്റ് ആരമുള്ള വൃത്തം വരക്കാം. Intersect tool ഉപയോഗിച്ച് x അക്ഷത്തിന്റെയും വൃത്തത്തിന്റെയും സംഗമബിന്ദുക്കൾ (B, C) കാണാം. Angle with given size എന്ന tool

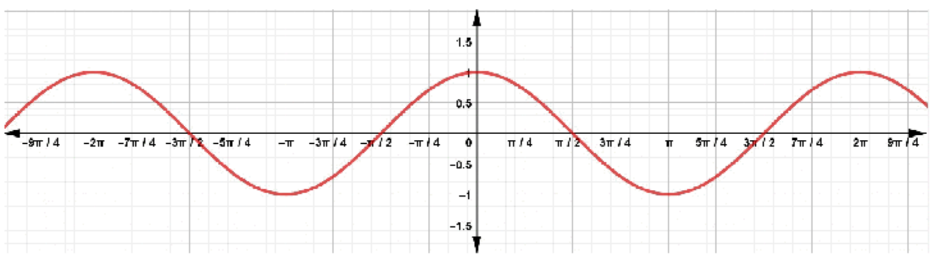
ഉപയോഗിച്ച് ബിന്ദു C, ബിന്ദു B എന്നിവയിൽ click ചെയ്ത് കോൺ α കൊടുത്ത് C' എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്താം. Perpendicular line എന്ന tool ഉപയോഗിച്ച് x അക്ഷത്തിന് ലംബമായി C' ലൂടെയുള്ള വര നിർമ്മിക്കാം. Intersect tool ഉപയോഗിച്ച് x അക്ഷത്തിന്റെയും ലംബവരയുടെയും സംഗമബിന്ദു (D) അടയാളപ്പെടുത്തിയതിനുശേഷം ലംബവര Hide ചെയ്യാം Polygon tool ഉപയോഗിച്ച് A, D, C', A ൽ click ചെയ്ത് ഒരു ത്രികോണം നിർമ്മിക്കാം. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബനീളം sin നും പാദനീളം cos മാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കും A, C' എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കും trace കൊടുക്കാം. ഇനി സ്ലൈഡറിന് Animation കൊടുത്താൽ sine, cosine എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ ഓരോ ചതുർത്ഥാംശത്തിലേ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.

ഇവിടെ sin x, cos x ന്റെ വിലകൾ -1 നും 1 നും ഇടക്കാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതായത് sin x, cos x ന്റെ രംഗം $[-1, 1]$ ആണ്. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഈ ഏകദങ്ങളെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ പുനർനിർണയിക്കാം.

sin : R $\rightarrow [-1, 1]$, sin x ന്റെ ഗ്രാഫ്



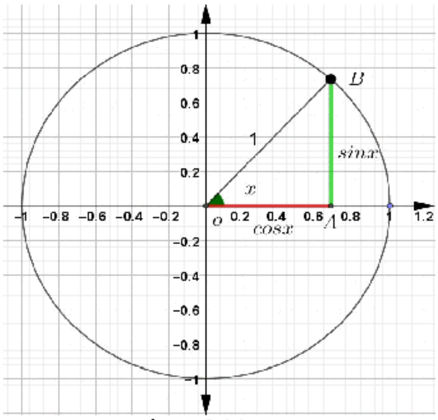
cos : R $\rightarrow$ [-1, 1], cos x ന്റെ ഗ്രാഫ് **ചിത്രം 3.14**



ചിത്രം 3.15

sine, cosine ഏകദങ്ങളുടെ പ്രത്യേകതകൾ

- ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം പരിശോധിക്കാം.



ചിത്രം 3.16

ΔOAB എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചുവടെ ചേർത്തിരക്കുന്ന സർവസമവാക്യങ്ങൾ നിർവചിക്കാം.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

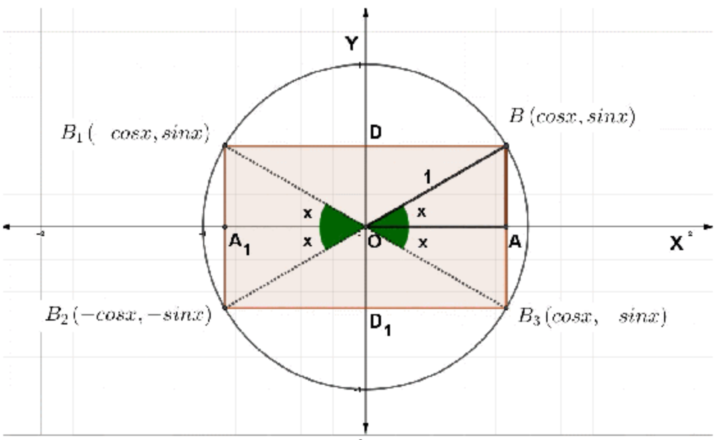
- x അക്ഷത്തിൽനിന്നും 'x' കോണളവിലുള്ള വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവായി B പരിഗണിക്കാം.

ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലെ B എന്ന ബിന്ദു ($\cos x$, $\sin x$) ആണ്. സമാന ബിന്ദുക്കളായ, B_1, B_2, B_3 എന്നിവ $B_1(-\cos x, \sin x)$, $B_2(-\cos x, -\sin x)$, $B_3(\cos x, -\sin x)$ എന്നിങ്ങനെ എടുക്കാൻ കഴിയും. ΔAOB, ΔA_1OB_1, ΔA_1OB_2, ΔAOB_3 എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സർവസമത്രികോണങ്ങളായതു കൊണ്ട് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ആശയങ്ങൾ വ്യക്തമാണ്.

$\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$

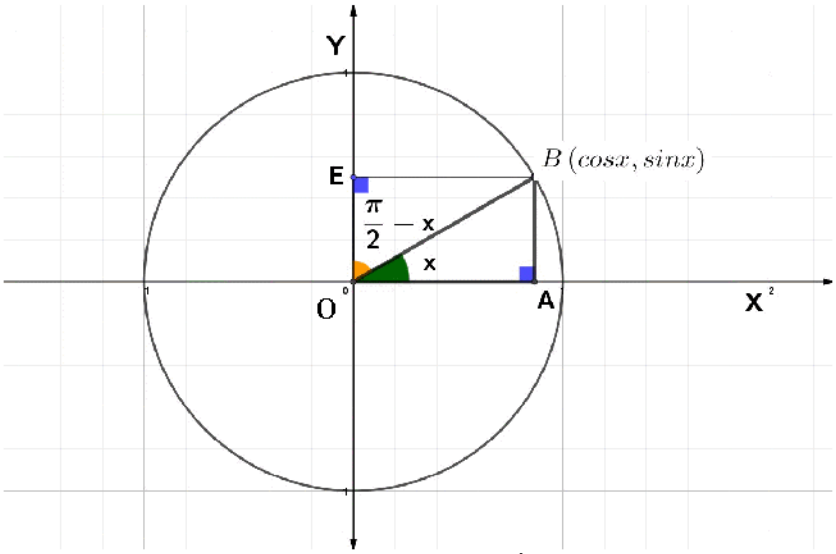
$\sin(\pi - x) = \sin x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$



ചിത്രം 3.17

- ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം പരിഗണിക്കാം.



ചിത്രം 3.18

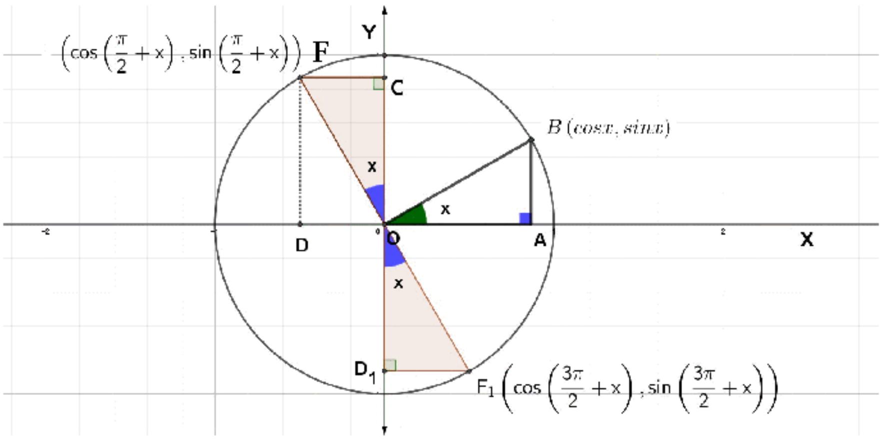
ഇവിടെ; AB = OE; OA = EB

അതായത്; sin$x$ = OE; cos$x$ = EB

മട്ടത്രികോണം ΔOEB എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{EB}{1}=EB=\cos x\ ;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{OE}{1}=OE=\sin x$$

- ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം പരിഗണിക്കാം.



ചിത്രം 3.19

ചിത്രത്തിൽ രണ്ട് മട്ടത്രികോണങ്ങളുണ്ട്

ഇതിൽ $\angle AOB = \angle COF; OB = OF; \angle C = \angle A = \frac{\pi}{2}$

അതു കൊണ്ട് ΔOAB, ΔOCF സർവസമത്രികോണങ്ങളാണ്.

എങ്കിൽ AB = CF = OD; OA = OC = DF

മുൻ വിശദീകരണ പ്രകാരം

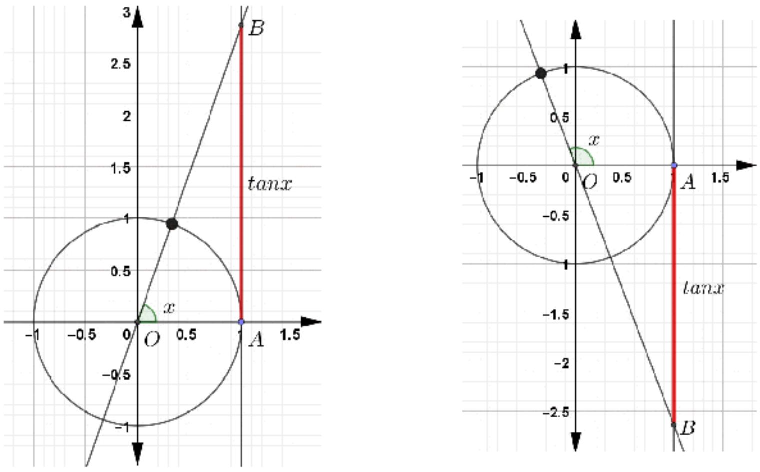
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = DF = OA = \cos x\,;\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -OD = -AB = -\sin x$$

ഇതുപോലെ ചിത്രത്തിലെ ΔOAB, ΔOD_1F_1 എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സർവസമ ത്രികോണങ്ങളാണ് എങ്കിൽ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\cos x\,;\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$

3.3.2 tangent, secant ഏകദങ്ങൾ

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ എന്ന നിർവചനം മുൻ ക്ലാസുകളിൽ മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. $\sin x$, $\cos x$ എന്നീ ഏകദങ്ങൾ നിർവചിച്ചതുപോലെ $\tan x$ സും നിർവചിക്കാൻ കഴിയും. പക്ഷെ x ന്റെ എല്ലാ വിലകൾക്കും $\tan x$ ന് വില ലഭിക്കുന്നില്ല. അതായത് $\cos x$ പൂജ്യമാകുന്ന x വിലകൾക്ക് (പൂജ്യം കൊണ്ടുള്ള ഹരണം നിർവചിച്ചിട്ടില്ലാത്തതു കൊണ്ട്) $\tan x$ നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. x ന്റെ വില $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ എന്നിങ്ങനെ യുള്ള $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒറ്റ സംഖ്യാഗുണിതമാണെങ്കിൽ, $\cos x = 0$ ആകും. അതുകൊണ്ട് ഇത്തരം സംഖ്യകൾ ഒഴിച്ചുള്ള രേഖീയസംഖ്യകൾക്കാണ് $\tan x$ എന്ന ഏകദം നിർവചിച്ചിട്ടുള്ളത്. അതായത് $\tan x$ ന്റെ മണ്ഡലം $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\right\}$ ആണ്.

ഇനി tan x ന്റെ വിലകളുടെ സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കുവാൻ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം ഉപയോഗിക്കാം.

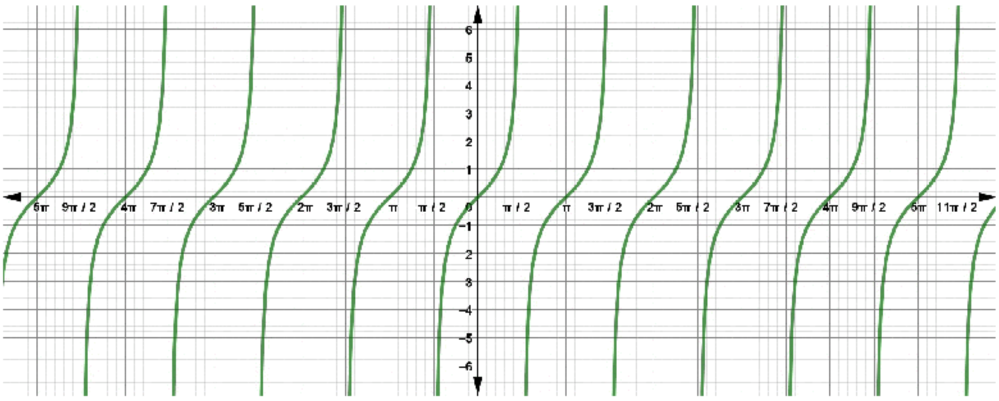


ചിത്രം 3.20

ചിത്രത്തിൽ ΔOAB ഒരു മട്ടത്രികോണമായതുകൊണ്ട് $\tan x = \frac{AB}{OA} = AB$. എങ്കിൽ B എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചക സംഖ്യകൾ (1, tan x) എന്ന് കാണാം. ഇവിടെ x ന്റെ വില പൂജ്യമാകുമ്പോൾ tan x ന്റെ വില പൂജ്യമാകുകയും x ന്റെ വില വർധിക്കുന്നത് അനുസരിച്ച് tan x ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും വേഗത്തിൽ അധിസംഖ്യയിലേക്ക് വർധിക്കുകയും ചെയ്യും. x ന്റെ വില $\frac{\pi}{2}$ നെക്കാൾ കൂടുതൽ ആകുമ്പോൾ, tan x ന്റെ വില വളരെ ചെറിയ ന്യൂനസംഖ്യയിൽ നിന്നും വേഗത്തിൽ വർധിക്കുന്നതായും ചിത്രത്തിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാം. അതായത് $x = \frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഇടതും വലതും tan x വൈരുധ്യമുള്ള സ്വഭാവമാണ്. ഈ സ്വഭാവം $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ എല്ലാ ഒറ്റ സംഖ്യാഗുണിതങ്ങൾക്കും ഉള്ളതായി കാണാം. അതായത് tan x എന്ന ഏകദത്തിന്റെ രംഗം ഒരു രേഖീയ സംഖ്യാഗണമായി നിർവചിക്കാം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ tan x എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർവചിക്കാം.

$$\tan : R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in Z\right\} \to R$$

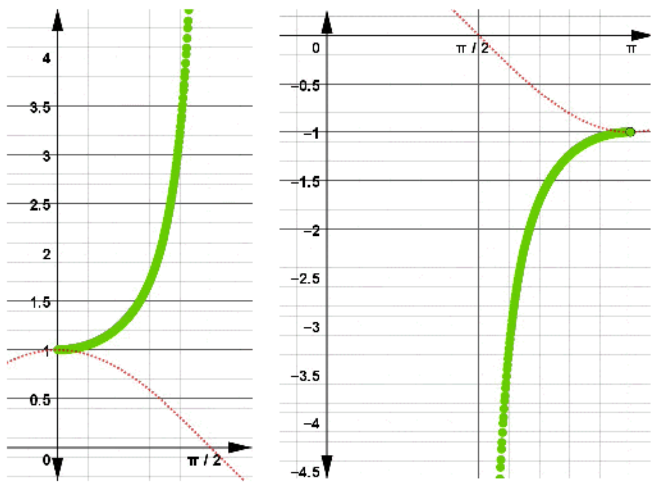
$\tan x$ ന്റെ ഗ്രാഫ്.



ചിത്രം 3.21

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ആയതുകൊണ്ട് $\cos x$ പൂജ്യമാകുന്ന x വിലകൾക്ക് നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. അതായത് $\tan x$ ന്റെ കാര്യത്തിൽ വിശദീകരിച്ചതുപോലെ ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $R - \left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in Z\right\}$ ആണ്. ഇനി $\sec x$ ന്റെ വിലകളുടെ സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കാം. $\cos x$ ന്റെ വ്യുൽക്രമമായതുകൊണ്ടും $\cos x$ ന്റെ രംഗം $[-1, 1]$ ആയതുകൊണ്ടും $\sec x$ ന്റെ വില $(-1, 1)$ ഇടയിൽ വരില്ല.

$\cos 0 = 1$ ൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ ൽ എത്തുമ്പോൾ അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം $\sec x$, 1 ൽ നിന്നും വളരെ വേഗത്തിൽ വർധിക്കുന്നതായി ചിത്രം 3.22 നിന്നും മനസ്സിലാക്കാം. അതുപോലെ $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ ൽ നിന്നും $\cos\pi = -1$ ൽ എത്തുമ്പോൾ $\sec x$ ന്റെ വില വളരെ ചെറിയ ന്യൂനസംഖ്യ



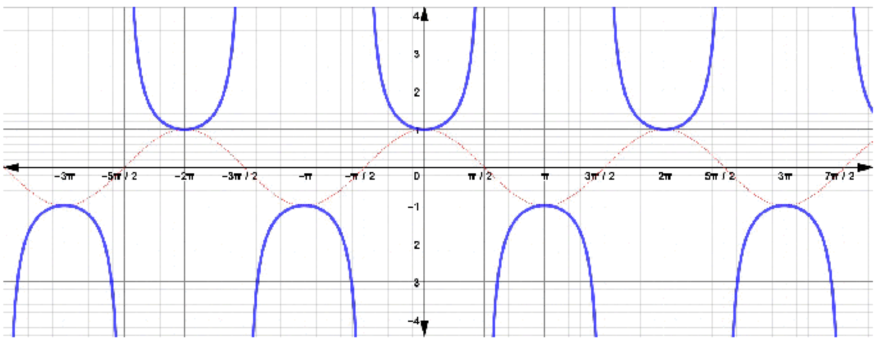
ചിത്രം 3.22

യിൽ നിന്നും വർധിച്ച് –1 ൽ എത്തുന്നതായും മനസ്സിലാക്കാം. $x = \frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഇടതും വലതും sec x ന് വൈരുധ്യമുള്ള സ്വഭാവമാണ്. ഈ ഒരു സ്വഭാവം $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യാ ഗുണിതങ്ങൾക്കുമുള്ളതായി കാണാൻ കഴിയും. ഇങ്ങനെയാണെങ്കിൽ sec x ന്റെ വില (–1, 1) ഒഴിച്ചുള്ള രേഖീയസംഖ്യകൾ എടുക്കാം. അതായത് sec x ന്റെ രംഗം R – (–1, 1) എന്ന് നിർവചിക്കാം.

sec x എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർവചിക്കാം.

$$\sec : R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in Z\right\} \to R - (-1, 1)$$

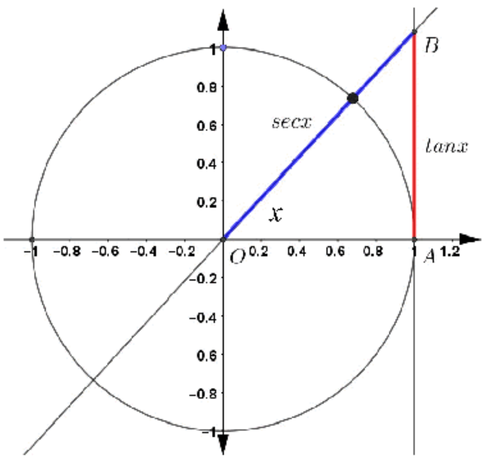
sec x ന്റെ ഗ്രാഫ്



ചിത്രം 3.23

tangent, secant എന്നീ ഏകദങ്ങളും ചില പ്രത്യേകതകളും

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ഏകകവൃത്തം (ചിത്രം) പരിശോധിക്കാം.



ചിത്രം 3.24

ചിത്രത്തിൽ മട്ടത്രികോണം ΔOAB യിൽ AB = tan x, OB = sec x ആയതുകൊണ്ട് പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ ചുവടെ ചേർക്കുന്ന സർവസമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$
$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$
$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

- $$\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x}{-\cos x} = -\tan x$$
$$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$
$$\sec(\pi - x) = \frac{1}{\cos(\pi - x)} = \frac{1}{-\cos x} = -\sec x$$
$$\sec(\pi + x) = \frac{1}{\cos(\pi + x)} = \frac{1}{-\cos x} = -\sec x$$

- $$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

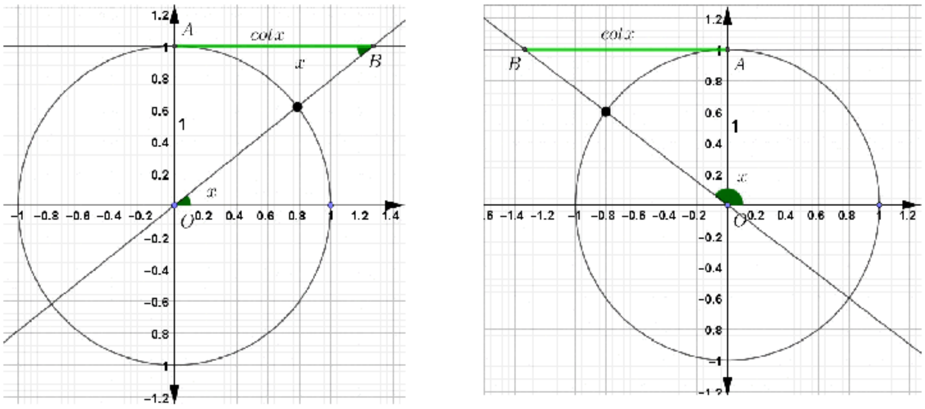
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{-\sin x} = -\operatorname{cosec} x$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$$

3.3.3 cotangent, cosecant ഏകദങ്ങൾ

$\tan x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമമായതുകൊണ്ട് $\cot x$ നെ $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ എന്ന് നിർവചിക്കാം. ഇനി $\cot x$ എന്ന ഏകദം നിർവചിക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. പക്ഷെ x ന്റെ എല്ലാ വില കൾക്കും cot വില ലഭിക്കുകയില്ല. കാരണം ഛേദത്തിൽ $\sin x$ വരുന്നതുകൊണ്ട് അത് പൂജ്യമാകുന്ന x വിലകൾക്ക് cot നിർവചിക്കാൻ കഴിയില്ല. $\sin x$ പൂജ്യമാക്കുന്ന x വിലകളായ $0, \pm\pi, \pm 2\pi$,.......... എന്നിങ്ങനെയുള്ള π യുടെ പൂർണസംഖ്യ ഗുണിതങ്ങൾക്ക് $\cot x$ നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. അങ്ങനെയങ്കിൽ $\cot x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡ

ലത്തിൽ നിന്നും ഈ വിലകൾ ഒഴിവാക്കണം. അതായത് $\cot x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $R - \{n\pi, n \in Z\}$ എന്നാണ്.

ഇനി $\cot x$ ന്റെ വിലകളുടെ സ്വഭാവം പരിചയപ്പെടാം. അതിന് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം ഉപയോഗിക്കാം.



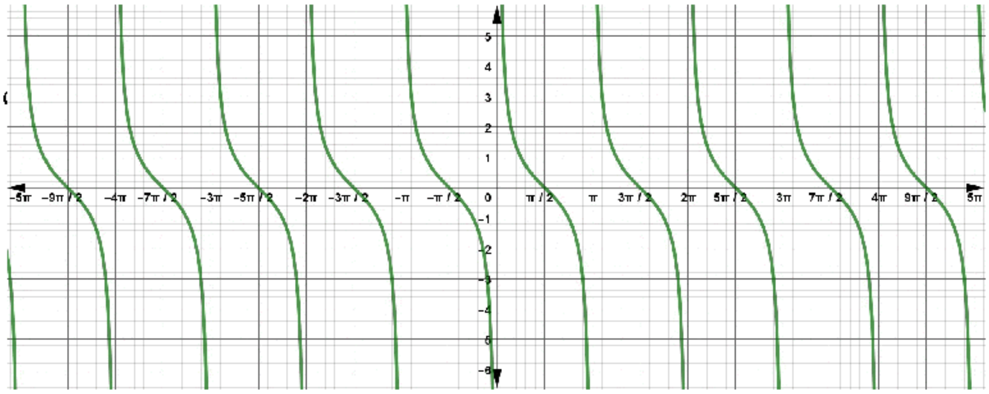
ചിത്രം 3.25

ചിത്രത്തിൽ ΔOAB ഒരു മട്ടത്രികോണമായതുകൊണ്ട് $\cot x = \dfrac{AB}{OA} = AB$

എങ്കിൽ B എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(\cot x, 1)$ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഇനി $x = 0$ ആകുമ്പോൾ $\cot x$ നിർവചിച്ചിട്ടില്ല എന്ന് മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ x പൂജ്യത്തിന് അടുത്തുനിന്നും വർധിച്ച് $x = \dfrac{\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ $\cot x$ ന്റെ വില വലിയ അധിസംഖ്യയിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് പൂജ്യമാകുന്നു. ഇനി x ന്റെ വില $\dfrac{\pi}{2}$ നെക്കാൾ കൂടുതൽ ആകുമ്പോൾ $\cot x$ ന്റെ വില പൂജ്യത്തിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് x ന്റെ വില π ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ വില വളരെ ചെറിയ ന്യൂനസംഖ്യയിലേക്ക് പോകുന്നതായി ചിത്രത്തിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാം. x ന്റെ വില π യെക്കാൾ കൂടുതൽ ആകുമ്പോൾ $\cot x$ ന്റെ വില വളരെ വലിയ അധിസംഖ്യയിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞുവരുന്നതായി മനസ്സിലാക്കാം. അതായത് $x = \pi$ ന്റെ ഇടതും വലതും $\cot x$ ന് വൈരുധ്യമുള്ള സ്വഭാവം കാണിക്കുന്നു. ഈ സ്വഭാവം π യുടെ എല്ലാ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതങ്ങൾക്കും ഉള്ളതായി മനസ്സിലാക്കാം. അങ്ങനെ $\cot x$ എന്ന ഏകദത്തിന്റെ രംഗം ഒരു രേഖീയ സംഖ്യാഗണം.

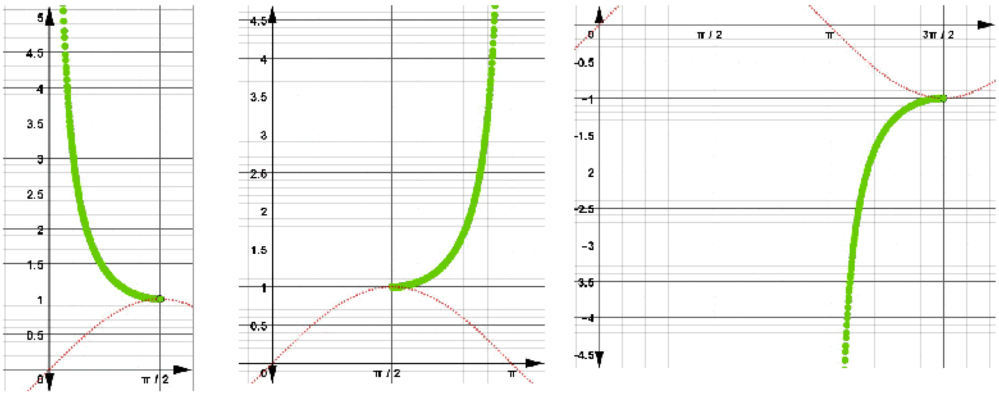
ഇനി $\cot x$ എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർവചിക്കാം.

$$\cot : R - \{n\pi, n \in Z\} \to R$$



ചിത്രം 3.26

$\cos ec\, x = \dfrac{1}{\sin x}$ ആയതുകൊണ്ട് $\sin x$ പൂജ്യമാകുന്ന x വിലകൾക്ക് നിർവചിച്ചിട്ടില്ല. അതായത് $\cot x$ ന്റെ കാര്യത്തിൽ വിശദീകരിച്ചതുപോലെ ഈ ഏകദത്തിന്റെ മണ്ഡലം $R - \{n\pi,\ n \in Z\}$ ആണ്. ഇനി cosec x ന്റെ വിലകളുടെ സ്വഭാവം മനസ്സിലാക്കാം. sin x ന്റെ വ്യൂൽക്രമമായതുകൊണ്ടും sin x ന്റെ രംഗം $[-1, 1]$ ആയതുകൊണ്ടും cosec x ന്റെ വില $(-1, 1)$ ഇടയിൽ വരില്ല.



ചിത്രം 3.27

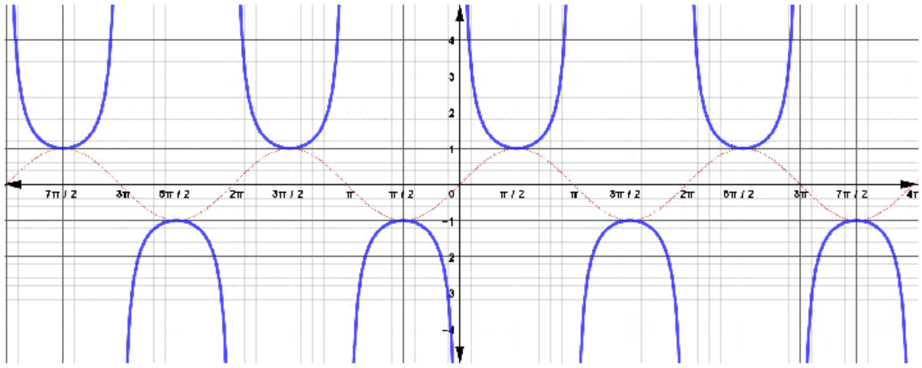
sin 0 = 0 ൽ നിന്നും വർധിച്ച് $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ ൽ എത്തുമ്പോൾ അതിന്റെ വ്യൂൽക്രമം cosec x, വളരെ വില അധിസംഖ്യയിൽ നിന്നും കുറഞ്ഞ് 2 ൽ എത്തുന്നതായി കാണാം. അതുപോലെ $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ നിന്നും $\sin \pi = 0$ ക്ക് അടുത്ത് എത്തുമ്പോൾ

cosec x ന്റെ വില 1 ൽ നിന്നും വർധിച്ച് വളരെ വലിയ അധിസംഖ്യയിലേക്ക് പോകുന്നതായി കാണാം. ഇനി $x = \pi$ കടക്കുമ്പോൾ sin x ന്യൂനസംഖ്യയാകുകയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം cosec x വളരെ ചെറിയ ന്യൂനസംഖ്യയിൽ നിന്നും വർധിച്ചു വരുന്നതായും $x = \frac{3\pi}{2}$ ൽ എത്തുമ്പോൾ വില -1 ആകുകയും ചെയ്യുന്നു. അതായത് π യുടെ ഇടതും വലതും cosec x ന് വൈരുധ്യമുള്ള സ്വഭാവമാണ്. ഈ ഒരു സ്വഭാവം π യുടെ എല്ലാ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതങ്ങൾക്കും കാണാൻ കഴിയും. ഇങ്ങനെയാണെങ്കിൽ cosec x ന്റെ വില $(-1, 1)$ ഒഴിച്ചുള്ള ഏത് രേഖീയസംഖ്യകളുമാകാം. അതായത്, cosec x ന്റെ രംഗം $R - (-1, 1)$ എന്ന് നിർവചിക്കാം.

cosec x എന്ന ഏകദത്തെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ നിർവചിക്കാം.

$$\operatorname{cosec}: R - \{n\pi, n \in Z\} \to R - (-1,1)$$

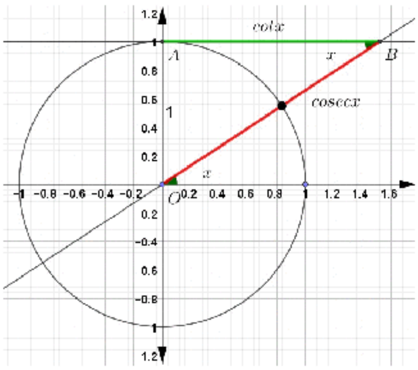
cosec x ന്റെ ഗ്രാഫ്



ചിത്രം 3.28

cotangent, cosecant എന്നീ ഏകദങ്ങളുടെ ചില പ്രത്യേകതകൾ

- ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന ഏകക വൃത്ത ചിത്രം പരിശോധിക്കാം.



ചിത്രം 3.29

ചിത്രത്തിൽ മട്ടത്രികോണം ΔOAB യിൽ $AB = \cot x$, $OB = \operatorname{cosec} x$ ആയതുകൊണ്ട് പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സർവസമവാക്യങ്ങൾ ലഭിക്കും.

$$\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x = 1$$
$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$$
$$\cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$$

- $$\cot(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} = \frac{-\cos x}{\sin x} = -\cot x$$

$$\cot(\pi + x) = \frac{\cos(\pi + x)}{\sin(\pi + x)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cot x$$

$$co\sec(\pi - x) = \frac{1}{\sin(\pi - x)} = \frac{1}{\sin x} = co\sec x$$

$$co\sec(\pi + x) = \frac{1}{\sin(\pi + x)} = \frac{1}{-\sin x} = -co\sec x$$

- $$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$co\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$co\sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

a [Min : -10, Max : 10, Speed : 0.1] എന്ന number slider നിർമ്മിക്കാം. Graphics $\rightarrow x$ Axis $\rightarrow$ Distance ൽ $pi/4$ കൊടുക്കുമ്പോൾ x അക്ഷത്തിൽ $\frac{\pi}{4}$ ന്റെ പൂർണാങ്കഗുണിതങ്ങളായി മാറും. (a, sin (a)) എന്ന input command നൽകി ഒരു ബിന്ദു (A) അടയാളപ്പെടുത്തുകയും അതിന് trace കൊടുക്കുകയും ചെയ്യാം. ഇനി സ്ലൈഡറിന് അനിമേഷൻ കൊടുത്താൽ sine ന്റെ ഗ്രാഫ് കിട്ടും. Input ൽ sin(x) എന്ന് കൊടുത്ത് ഈ ഏകദ

ത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം. ഇതുപോലെ;

- (a, cos (a)); cos (x) എന്നീ input command കൾ നൽകി cosine എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.
- (a, tan(a)); tan(x) എന്നീ input command കൾ നൽകി tangent എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.
- (a, sec (a)), sec (x), cos (x) എന്നീ input command കൾ നൽകി secant എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.
- (a, cosec(a)), cosec(x), sin(x) എന്നീ input command കൾ നൽകി cosecant എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.
- (a, cot a), cot(x) എന്നീ input command കൾ നൽകി cotagent എന്ന ഏകദത്തിന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ പ്രത്യേകതകൾ മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണം : 6

$\cos x = -\frac{3}{5}$, x മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ, മറ്റ് അഞ്ച് ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$\cos x = -\frac{3}{5}$ ആയതുകൊണ്ട് $\sec x = -\frac{5}{3}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

അപ്പോൾ $\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{4}{5}$

x മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതുകൊണ്ട്, $\sin x = -\frac{4}{5}$

എങ്കിൽ; $\operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}$

തുടർന്ന്; $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$; $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{3}{4}$.

ഉദാഹരണം: 7

$\cot x = -\frac{5}{12}$, x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ, മറ്റ് അഞ്ച് ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$\cot x = -\frac{5}{12}$ ആയതുകൊണ്ട് $\tan x = -\frac{12}{5}$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{144}{25} = \frac{169}{25} \Rightarrow \sec x = \pm \frac{13}{5}$$

x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതുകൊണ്ട് $\sec x = -\frac{13}{5}$

തുടർന്ന്; $\cos x = -\frac{5}{13}$

എങ്കിൽ; $\sin x = \tan x \cos x$

$$= (-\frac{12}{5}) \times (-\frac{5}{13}) = \frac{12}{13}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{13}{12}.$$

ഉദാഹരണം: 8

$\sin \frac{31\pi}{3}$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

ഓരോ, 2π ഇടവേളകൾ കഴിയുമ്പോഴും $\sin x$ ന്റെ വിലകൾ ആവർത്തിക്കുന്നതായി മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

$$\sin \frac{31\pi}{3} = \sin\left(\frac{30\pi + \pi}{3}\right)$$

$$= \sin (10\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ഉദാഹരണം: 9

$\cos (-1710°)$ യുടെ വില കാണുക.

ഓരോ 2π ഇടവേളകൾ കഴിയുമ്പോഴും $\cos x$ ന്റെ വിലകൾ ആവർത്തിക്കുന്നതായി മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

$$\cos (-1710°) = \cos (-1710° + 5 \times 360°)$$
$$= \cos (-1710° + 1800°)$$
$$= \cos 90° = 0$$

പരിശീലനപ്രശ്നം – 3.2

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ മറ്റ് അഞ്ച് ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ കാണുക.

1. $\cos x = -\frac{1}{2}$, x മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

2. $\sin x = \frac{3}{5}$, x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

3. $\cot x = \frac{3}{4}$, x മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

4. $\sec x = \frac{13}{5}$, x നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

5. $\tan x = -\frac{5}{12}$, x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന 6 മുതൽ 10 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലെ ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ കാണുക.

6. $\sin 765°$
7. $\operatorname{cosec} (-1410°)$
8. $\tan \frac{19\pi}{3}$
9. $\sin \left(-\frac{11\pi}{3}\right)$
10. $\cot \left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

3.4 രണ്ട് കോണുകളുടെ തുകയുടെയും, വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾ

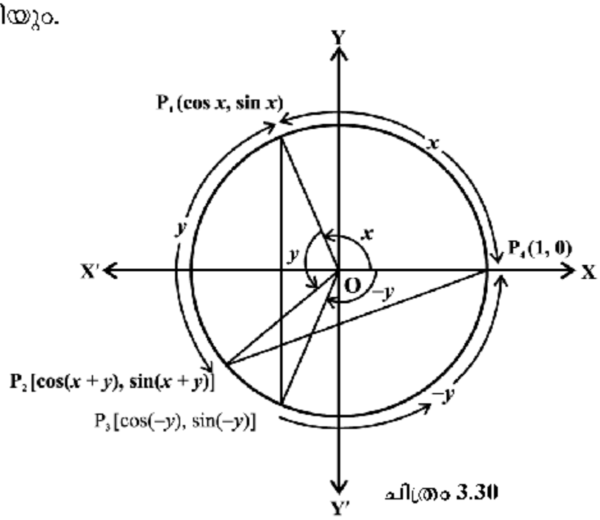
ഇവിടെ രണ്ട് കോണുകളുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങൾ എന്ന ആശയങ്ങളും മറ്റ് പ്രയോഗശൈലികളും പരിചയപ്പെടാം.

1. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

   തെളിവ്

   സൂചകാക്ഷത്തിൽ ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വരുന്ന ഒരു ഏകക വൃത്തം പരിഗണിക്കാം. കോൺ P_4OP_1 ന്റെ അളവ് x എന്നും കോൺ P_1OP_2 ന്റെ

അളവ് y എന്നും കരുതാം. എങ്കിൽ കോൺ P_4OP_2 ന്റെ അളവ് $(x + y)$ ആകും. കൂടാതെ കോൺ P_4OP_3 യുടെ അളവ് $(-y)$ എന്നെടുക്കാം. എങ്കിൽ P_1, P_2, P_3, P_4 എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ യഥാക്രമം $(\cos x, \sin x)$, $(\cos (x + y), \sin (x + y)$, $[(\cos (-y), \sin (-y)]$, $(1, 0)$ എന്ന് എടുക്കാൻ കഴിയും.



ചിത്രം 3.30

ΔP_1OP_3, ΔP_2OP_4 എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം. അവ സർവസമമാണ് അതുകൊണ്ട് P_1P_3, P_2P_4 എന്നീ വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്. ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

$$P_1P_3^2 = [\cos x - \cos (-y)]^2 + [\sin x - \sin(-y)]^2$$

$$= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2 \cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y + 2\sin x \sin y$$

$$= 2 - 2 (\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

തുടർന്ന് $P_2P_4^2 = [1 - \cos (x + y)]^2 + [0 - \sin (x + y)]^2$

$$= 1 - 2\cos (x + y) + \cos^2 (x + y) + \sin^2 (x + y)$$

$$= 2 - 2 \cos (x + y)$$

$P_1P_3 = P_2P_4$, ആയതുകൊണ്ട് $P_1P_3^2 = P_2P_4^2$ എന്നെടുക്കാം.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ; $2 - 2 (\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2 - 2 \cos (x + y)$.

$$\Rightarrow \cos (x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

2. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

തെളിവ്

ഒന്നാമത്തെ സർവസമവാക്യത്തിൽ y ക്ക് പകരം $(-y)$ കൊടുത്താൽ നമ്മുക്ക് ഇതു തെളിയിക്കാം.

$\cos(x+(-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(\ \ y)$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

3. $\sin(x+y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

തെളിവ്

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ എന്ന സർവസമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്

$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right)$ എന്ന് എഴുതാം.

$$\sin(x+y) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y)\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

4. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$. മൂന്നാമത്തെ സർവസമവാക്യത്തിൽ y ക്ക് പകരം $(-y)$ കൊടുത്താൽ നമുക്ക് ഇതു തെളിക്കാം.

5. $x, y, (x+y)$ എന്നീ കോണുകൾ $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റസംഖ്യാഗുണിതങ്ങളല്ലങ്കിൽ

$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

തെളിവ്

ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും സർവസമവാക്യം ഇവിടെ ഉപയോഗിക്കാം

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

$\cos x \cos y$ കൊണ്ട് അംശവും ഛേദവും ഹരിക്കാം

$$\tan(x+y) = \frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y} + \dfrac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y} - \dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}$$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

6. $x, y, (x-y)$ എന്നീ കോണുകൾ $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റസംഖ്യാഗുണിതങ്ങളല്ലെങ്കിൽ,

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

തെളിവ്

അഞ്ചാമത്തെ സർവസമവാക്യത്തിൽ y ക്ക് പകരം $-y$ കൊടുക്കാം

$$\tan(x-y) = \tan[x + (-y)]$$

$$= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x\tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

7. $x, y, (x+y)$ എന്നീ കോണുകൾ π യുടെ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതങ്ങളല്ലെങ്കിൽ

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x\cot y - 1}{\cot x + \cot y}$$

തെളിവ്

ഒന്നാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും സർവസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം

$$\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x\cos y - \sin x\sin y}{\sin x\cos y + \cos x\sin y}$$

അംശവും ഛേദവും $\sin x.\sin y$ കൊണ്ട് ഹരിക്കാം.

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x\cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

8. $x, y, (x+y)$ എന്നീ കോണുകൾ π യുടെ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതങ്ങളല്ലെങ്കിൽ,

$$\cot(x-y) = \frac{\cot x\cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

ഏഴാമത്തെ സർവസമവാക്യത്തിൽ y ക്ക്പകരം $(-y)$ ഉപയോഗിക്കാൻ നമുക്ക് അറിയാം.

9. $\mathbf{\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$

$\mathbf{= 1 - 2\sin^2 x}$

$\mathbf{= 2\cos^2 x - 1}$

$= \dfrac{\mathbf{1 - \tan^2 x}}{\mathbf{1 + \tan^2 x}}, \ x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, ഇവിടെ n ഒരു പൂർണസംഖ്യയാണ്

തെളിവ്

നമുക്ക് അറിയാം;

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

ഇവിടെ y ക്ക് പകരം x കൊടുക്കാം.

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

തുടർന്ന്, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$.

$\Rightarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

അംശവും ഛേദവും $\cos^2 x$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ

$\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}, \ x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, ഇവിടെ n ഒരു പൂർണസംഖ്യയാണ്.

10. $\mathbf{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$

$= \dfrac{\mathbf{2\tan x}}{\mathbf{1 + \tan^2 x}}, \ x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$, n ഒരു പൂർണസംഖ്യ

തെളിവ്

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

ഇവിടെ y ക്ക് പകരം x ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

തുടർന്ന്, $\sin 2x = \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

അംശവും ഛേദവും $\cos^2 x$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ;

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

11. $\mathbf{\tan 2x} = \dfrac{\mathbf{2\tan x}}{\mathbf{1 - \tan^2 x}}, \ 2x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$$\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 \quad \tan x \tan y}$$

ഇവിടെ y ക്ക് പകരം x ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

12. **$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$**

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin (2x + x) \\
&= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\
&= 2 \sin x \cos x \cos x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x \\
&= 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2 \sin^3 x \\
&= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x \\
&= 3 \sin x - 4 \sin^3 x
\end{aligned}$$

13. **$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$**

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos (2x + x) \\
&= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1) \cos x - 2\sin x \cos x \sin x \\
&= (2\cos^2 x - 1) \cos x - 2\cos x (1 - \cos^2 x) \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2 \cos^3 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}$$

14. $\mathbf{\tan 3x = \dfrac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}}$, $3x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$$\tan 3x = \tan (2x + x)$$

$$= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x \,.\, \tan x}{1 \quad \tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 \quad \tan^2 x \quad 2\tan^2 x} = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 \quad 3\tan^2 x}$$

15. **(i)** $\mathbf{\cos x + \cos y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}}$

(ii) $\mathbf{\cos x - \cos y = -2\sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$; ... (1)

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ ... (2)

(1), (2) കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ

$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos x \cos y$ ... (3)

$\cos(x + y) - \cos(x - y) = \quad 2\sin x \sin y$ ... (4)

തുടർന്ന്, $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$; ... (5)

$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ ... (6)

(5), (6) കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ,

$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cos y$; ... (7)

$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2\cos x \sin y$ ... (8)

$x + y = \theta$; $x - y = \phi$. എന്ന് കൊടുത്താൽ,

$$x = \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right),\ y = \left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

x, y യുടെ ഈ വിലകൾ (3), (4), (7), (8) എന്നിവയിൽ കൊടുത്താൽ;

$$\cos\theta + \cos\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta - \cos\phi = -2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta \quad \phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta + \sin\phi = 2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta - \sin\phi = 2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

θ, ϕ ഇവയ്ക്ക് ഏത് രേഖീയ വിലകളും സ്വീകരിക്കാവുന്നതുകൊണ്ട്, θ ക്ക് പകരം x ഉം ϕ ക്ക് പകരം y യും കൊടുക്കാം.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ;

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\ ;\ \sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

16. (i) $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$
    (ii) $-2\sin x\sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$
    (iii) $2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$
    (iv) $2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$

ഉദാഹരണം: 10

$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4} = 1$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$$

$$= 3\times\frac{1}{2}\times 2 - 4\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\times 1 = 3 - 4\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= 3 - 4\times\frac{1}{2} = 1$$

ഉദാഹരണം: 11

sin 15° യുടെ വില കാണുക

പരിഹാരം

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

ഉദാഹരണം: 12

$\tan\frac{13\pi}{12}$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$$\tan\frac{13\pi}{12} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

ഉദാഹരണം: 13

$\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\sin x\cos y-\cos x\sin y}$$

$\cos x \cos y$ കൊണ്ട് അംശവും ഛേദവും ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}.$$

ഉദാഹരണം: 14

$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$\tan 3x = \tan(2x + x)$

$$\tan 3x = \frac{\tan 2x+\tan x}{1-\tan 2x\tan x}$$

$$\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$$

$$\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$$

$$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$

ഉദാഹരണം: 15

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x+\frac{\pi}{4}-x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+x-(\frac{\pi}{4}-x)}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos x - 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sqrt{2}\cos x$$

ഉദാഹരണം: 16

$\dfrac{\cos 7x + \cos 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \cot x$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$$\frac{\cos 7x + \cos 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \frac{2\cos\dfrac{7x+5x}{2}\cos\dfrac{7x-5x}{2}}{2\cos\dfrac{7x+5x}{2}\sin\dfrac{7x-5x}{2}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

ഉദാഹരണം: 17

$\dfrac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \tan x$ എന്നു തെളിയിക്കുക

പരിഹാരം

$$\frac{\sin 5x - 2\sin 3x + \sin x}{\cos 5x - \cos x} = \frac{\sin 5x + \sin x - 2\sin 3x}{\cos 5x - \cos x}$$

$$= \frac{2\sin 3x\cos 2x - 2\sin 3x}{-2\sin 3x \sin 2x} = -\frac{\sin 3x\,(\cos 2x - 1)}{\sin 3x \sin 2x}$$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \tan x$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ - 3.3

1. $\sin^2\dfrac{\pi}{6} + \cos^2\dfrac{\pi}{3} - \tan^2\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2}$ എന്നു തെളിയിക്കുക

2. $2\sin^2\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2\dfrac{7\pi}{6}\cos^2\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3}{2}$ എന്നു തെളിയിക്കുക

3. $\cot^2\dfrac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\dfrac{5\pi}{6} + 3\tan^2\dfrac{\pi}{6} = 6$ എന്നു തെളിയിക്കുക

4. $2\sin^2\dfrac{3\pi}{4} + 2\cos^2\dfrac{\pi}{4} + 2\sec^2\dfrac{\pi}{3} = 10$ എന്നു തെളിയിക്കുക

5. വില കാണുക.
(i) sin 75°   (ii) tan 15°

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ തെളിയിക്കുക.

6. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$

7. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

8. $\dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$

9. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\cos(2\pi+x)\left[\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(2\pi+x)\right]=1$

10. $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

11. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{2}\sin x$

12. $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

13. $\cos^2 2x-\cos^2 6x=\sin 4x\sin 8x$

14. $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\sin 4x$

15. $\cot 4x(\sin 5x+\sin 3x)=\cot x(\sin 5x-\sin 3x)$

16. $\dfrac{\cos 9x-\cos 5x}{\sin 17x-\sin 3x}=-\dfrac{\sin 2x}{\cos 10x}$

17. $\dfrac{\sin 5x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos 3x}=\tan 4x$

18. $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\dfrac{x-y}{2}$

19. $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x$

20. $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=2\sin x$

21. $\dfrac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$

22. $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$

23. $\tan 4x = \dfrac{4\tan x\,(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x + \tan^4 x}$

24. $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

25. $\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$

3.5 ത്രികോണമിതീയ സമവാക്യങ്ങൾ

ത്രികോണമിതി ഏകദങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന സമവാക്യത്തെ ത്രികോണമിതീയ സമവാക്യങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു. ഈ പാഠഭാഗത്ത് ഇതുപോലെയുള്ള സമവാക്യങ്ങളുടെ പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനെ കുറിച്ച് മനസിലാക്കാം. ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങളുടെ വിലകൾ ആവർത്തിച്ചുവരുന്നതാണെന്ന് നാം നേരത്തെ മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അതായത് $\sin x$, $\cos x$, അതിന്റെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെയും വിലകളും 2π യുടെ ഇടവേളകളിൽ ആവർത്തിക്കുന്നതായും $\tan x$ ന്റെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും വിലകൾ π ഇടവേളകളിൽ ആവർത്തിക്കുന്നതായും മനസിലാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് ഇത്തരത്തിലുള്ള സമവാക്യത്തിന് അനന്തമായ പരിഹാരങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഈ അനന്തമായ പരിഹാരത്തെ പൊതുപരിഹാരം എന്നു പറയുന്നു. പൊതുപരിഹാരം $n \in z$ ഉൾപ്പെടുത്തിയാണ് എഴുതാറ്.

ഇതിൽ $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിൽ വരുന്ന പരിഹാരത്തെ പ്രഥമ പരിഹാരം എന്നു പറയുന്നു.

3.5.1: $\sin x = 0$

$\sin x = 0$ കിട്ടുന്ന x ന്റെ വിലകൾ കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം

$\sin 0 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\sin \pi = 0 \Rightarrow x = \pi$

$\sin 2\pi = 0 \Rightarrow x = 2\pi$

അതുപോലെ

$\sin(-\pi) = 0 \Rightarrow x = -\pi$

$\sin(-2\pi) = 0 \Rightarrow x = -2\pi$

ഇങ്ങനെ

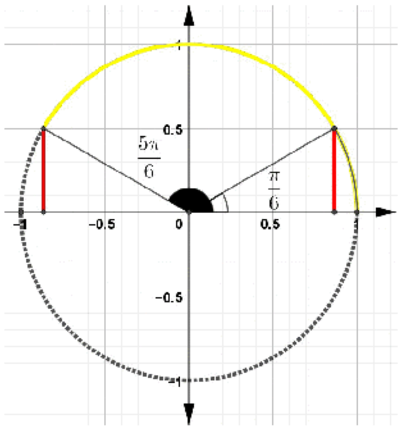
ഇവിടെ ലഭിച്ച x ന്റെ വിലകൾ π യുടെ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതങ്ങളാണ്. അതായത് ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം $x = n\pi, n \in Z$ എന്നും, പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x = 0, \pi$ ആണെന്നും കാണാം.

3.5.2 $\sin x = \sin y$

ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഇതിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ മനസിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. $\sin x = \frac{1}{2}$

ഇവിടെ $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു പരിഹാരം ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ലഭിക്കും.

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$



ചിത്രം 3.31

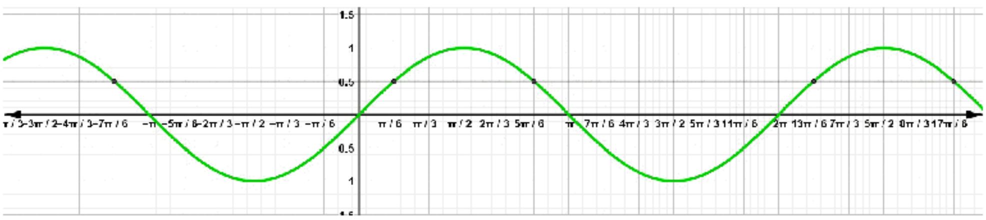
അതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ നിന്നും രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം ലഭിക്കും.

$$\sin x = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

ഇങ്ങനെ ഒരു ഭ്രമണം പൂർത്തിയാക്കി കഴിഞ്ഞാൽ വീണ്ടും $\sin x = \frac{1}{2}$ ശരിയായി വരുന്ന x ന്റെ വിലകൾ ലഭിക്കുന്നു.

ചിത്രത്തിൽ x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി $y = \frac{1}{2}$ എന്ന വര വരക്കുകയാണെ ¦ nÂ $\sin x$ ന്റെ ഗ്രാഫുമായി അനന്തമായ ബിന്ദുക്കളിൽ സംഗമിക്കുന്നതായി കാണാം.

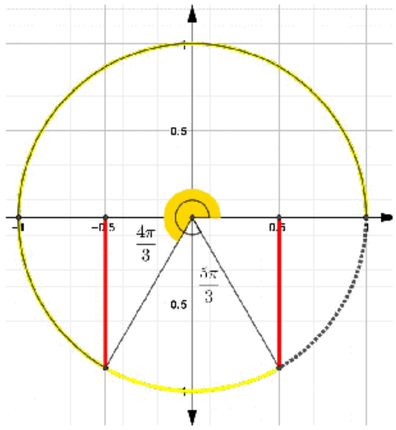
ഇതിൽ പൂജ്യത്തിനും 2π ക്കും ഇടയിലുള്ള വിലകളാണ് പ്രഥമ പരിഹാരം എന്ന് ചിത്രത്തിൽ നിന്നും കാണാം.



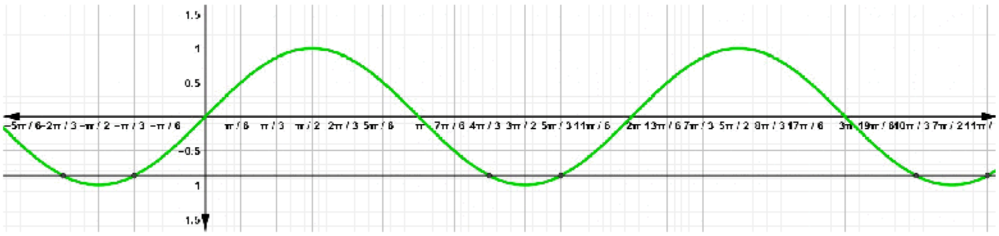
ചിത്രം 3.32

ഇനി $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ.

ഒരു പരിഹാരം $\left(x=\frac{4\pi}{3}\right)$ മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലും രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം $\left(x=\frac{5\pi}{3}\right)$ നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലുമായി വരുന്നത് ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്നും കാണാം.



ചിത്രം 3.33



ചിത്രം 3.34

നിരീക്ഷണങ്ങൾ:

മേൽ ആശയങ്ങൾ പൊതുവായി കാണാം

- $\sin x = \sin y$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളക്കുള്ളിൽ ഒരു ജോഡി പരിഹാരങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഒന്നുകിൽ ഈ പരിഹാരങ്ങൾ ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും ചതുർത്ഥാംശത്തിലായിരിക്കും അല്ലെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെയും നാലാമത്തെയും ചതുർത്ഥംശത്തിലായിരിക്കും. ഈ ജോഡികളാണ് സമവാക്യത്തിന്റെ പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ.

  അതായത് $\sin x = \frac{1}{2}$ ന്റെ പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$

  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ന്റെ പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{4\pi}{3},\ x = \frac{5\pi}{3}$

- $\sin x = \sin y$ ന്റെ പൊതുവായ പരിഹാരങ്ങൾ എടുക്കാം.

$$\sin x = \sin y \Rightarrow x = y$$
$$\sin x = \sin(\pi - y) \Rightarrow x = \pi - y$$
$$\sin x = \sin(2\pi + y) \Rightarrow x = 2\pi + y$$
$$\sin x = \sin(3\pi - y) \Rightarrow x = 3\pi - y$$
$$\sin x = \sin(4\pi + y) \Rightarrow x = 4\pi + y$$

അങ്ങനെയെങ്കിൽ പൊതുപരിഹാരം $x = n\pi + (-1)^n y, n \in Z$ എന്നു പറയാം.

സിദ്ധാന്തം: 1

x, y എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യകളായാൽ $\sin x = \sin y$ ന്റെ പൊതുപരിഹാരങ്ങൾ $x = n\pi + (-1)^n y, n \in \mathbf{Z}$ ആണ്.

തെളിവ്

ഇവിടെ

$\sin x = \sin y \Rightarrow \sin x - \sin y = 0$

$$\Rightarrow 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x+y}{2} = 0 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \sin\frac{x-y}{2} = 0$$

അതായത്, $\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{x-y}{2} = n\pi, n \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow x = (2n+1)\pi - y$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2n\pi + y, n \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y, n \in \mathbf{Z}$.

ഈ രണ്ട് പരിഹാരങ്ങളും ചേർത്ത് $x = n\pi + (-1)^n y, n \in \mathbf{Z}$

3.5.3 $\cos x = 0$

$\cos x = 0$ കിട്ടുന്ന x ന്റെ വിലകൾ കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{5\pi}{2}=0\Rightarrow x=\frac{5\pi}{2}$$

ഇവിടെ ലഭിച്ച x ന്റെ വിലകൾ $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റസംഖ്യാ ഗുണിതങ്ങളാണ്. അതായത് ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരം $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in Z$ എന്നും, പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ എന്നും കാണാം.

3.5.4 $\cos x = \cos y$

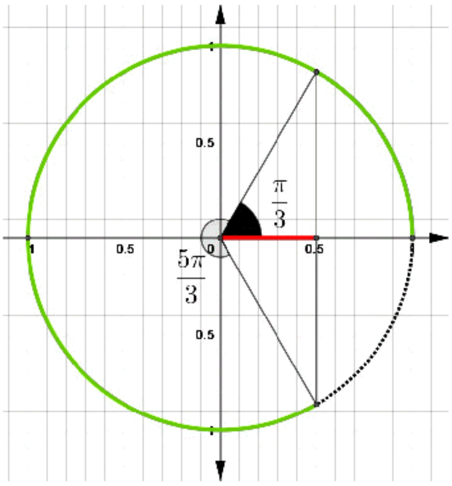
ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഇതിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ മനസിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കാം. $\cos x=\frac{1}{2}$

ഇതിന്റെ $0\le x<2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു പരിഹാരം ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ്

$$\cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

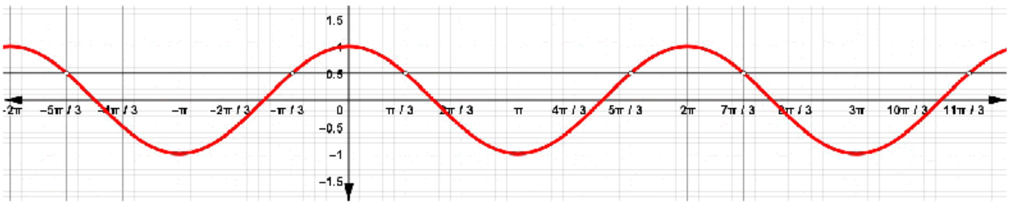
രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം നാലമത്തെ ചതുർത്ഥം ശത്തിലാണ്.

$$\cos x=\frac{1}{2}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{5\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{5\pi}{3}$$



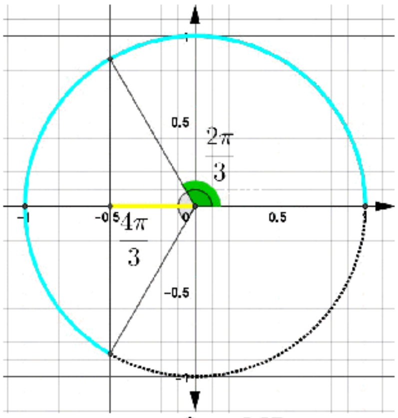
ചിത്രം 3.35

ചിത്രത്തിൽ x അക്ഷത്തിന്സമാന്തരമായി $y=\frac{1}{2}$ എന്ന വര വരക്കുകയാണെങ്കിൽ $\cos x$ ന്റെ ഗ്രാഫുമായി അനന്തമായ ബിന്ദുകളിൽ സംഗമിക്കുന്നതായി കാണാം. ഇതിൽ പൂജ്യത്തിനും 2π ക്കും ഇടയിലുള്ള പരിഹാരങ്ങൾ (പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ ചിത്രത്തിൽ നിന്നു കാണാം.

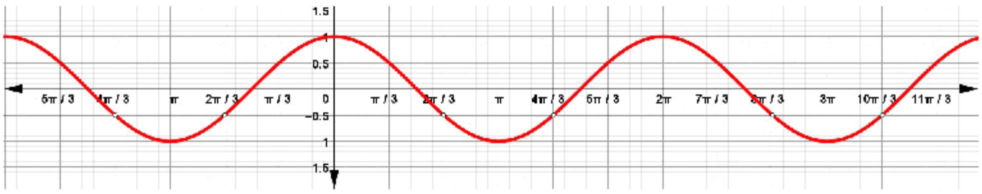


ചിത്രം 3.36

ഇനി $\cos x = -\frac{1}{2}$ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ. ഒരു പരിഹാരം $\left(x = \frac{2\pi}{3}\right)$ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലും രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം $\left(x = \frac{4\pi}{3}\right)$ മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലുമായി വരുന്നത് കാണാം.



ചിത്രം 3.37



ചിത്രം 3.38

a [Mini : - 1, Max : 1] എന്ന number slider നിർമിക്കാം. *x* അക്ഷത്തെ $\frac{\pi}{4}$ ന്റെ പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണിതങ്ങളായി മാറ്റണം. sin (*x*), *y* = *a* എന്നീ input command കൾ നൽകി sin *x* ന്റെ ഗ്രാഫും *y* = *a* എന്ന വരയും നിർമിക്കുക. വരയും ഗ്രാഫും സംഗമിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് sin *x* = *a* എന്ന ത്രികോണമിതീയ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ ഇതിൽ പ്രധമ പരിഹാരം ഏത്? സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി ഈ ആശയം മനസിലാക്കാം. ഇതുപോലെ cos(*x*) എന്ന input command നൽകി cos *x* = *a* എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ പരിചയപ്പെടാം.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ:

- $\cos x = \cos y$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളക്കുള്ളിൽ ഒരു ജോഡി പരിഹാരങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഒന്നുകിൽ ഈ പരിഹാരങ്ങൾ ഒന്നാമത്തെയും നാലാമത്തെയും ചതുർത്ഥാംശത്തിലായിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ചതുർത്ഥാംശത്തിലായിരിക്കും.

  അതായത് $\cos x = \frac{1}{2}$ ന്റെ പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ന്റെ പ്രഥമ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

- $\cos x = \cos y$ ന്റെ പൊതുവായ പരിഹാരങ്ങൾ പരിചയപ്പെടാം.

$$\cos x = \cos y \Rightarrow x = y$$
$$\cos x = \cos(2\pi - y) \Rightarrow x = 2\pi - y$$
$$\cos x = \cos(2\pi + y) \Rightarrow x = 2\pi + y$$
$$\cos x = \cos(4\pi - y) \Rightarrow x = 4\pi - y$$
$$\cos x = \cos(4\pi + y) \Rightarrow x = 4\pi + y$$

....

അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഇതിന്റെ പൊതു പരിഹാരങ്ങൾ $x = 2n\pi \pm y, n \in Z$ എന്ന് പറയാം.

സിദ്ധാന്തം: 2

x, y എന്നിവ രേഖീയസംഖ്യയായാൽ $\cos x$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം $x = 2n\pi \pm y,\ n \in \mathbf{Z}$ ആണ്.

തെളിവ് :

ഇവിടെ $\cos x = \cos y \Rightarrow \cos x - \cos y = 0$

$$\Rightarrow -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\frac{x+y}{2} = 0 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \sin\frac{x-y}{2} = 0$$

അതായത്; $\frac{x+y}{2} = n\pi$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{x-y}{2} = n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$

$\Rightarrow x = 2n\pi - y$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 2n\pi + y,\ n \in \mathbf{Z}$

എങ്കിൽ; $x = 2n\pi \pm y,\ n \in \mathbf{Z}$

3.5.5: $\tan x = 0$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ആയതുകൊണ്ട് $\sin x$ പൂജ്യമാകുന്ന x ന്റെ വിലകളിൽ $\tan x$ പൂജ്യമാകും. അങ്ങനെയെങ്കിൽ $\tan x = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരങ്ങൾ $x = n\pi, n \in Z$ എന്നും, പ്രധാന പരിഹാരങ്ങൾ $x = 0, \pi$ ആണെന്ന് കാണാം.

3.5.6 $\tan x = \tan y$

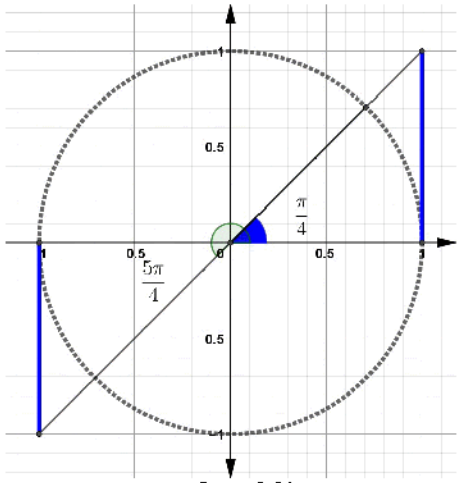
ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ ഇതിന്റെ പരിഹാരം മനസിലാക്കാം.

$\tan x = 1$ എന്ന സമവാക്യം പരിഗണിക്കാം. ഇതിന്റെ $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു പരിഹാരം ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ്.

$$\tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

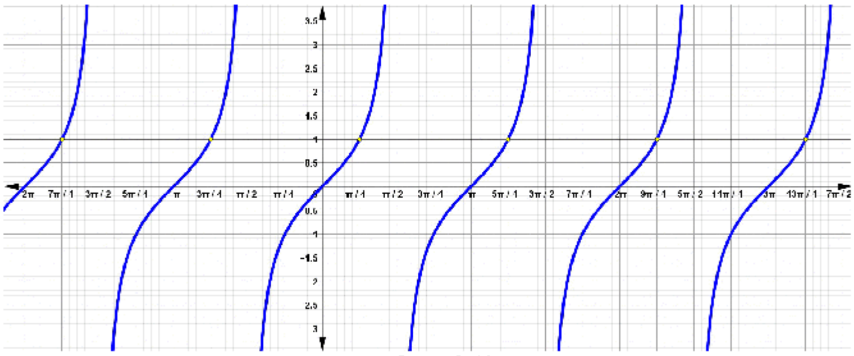
രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണ്

$$\tan x = \tan \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$



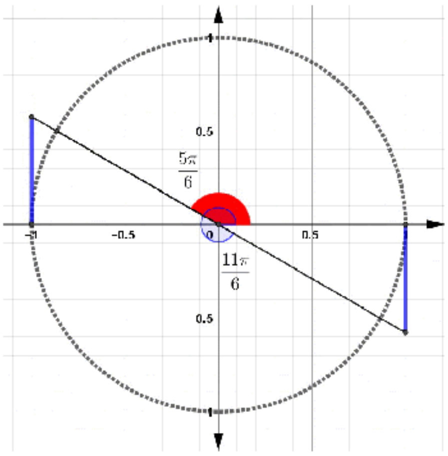
ചിത്രം 3.39

ചിത്രത്തിൽ x അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി $y = 1$ എന്ന വര വരികയാണെങ്കിൽ $\tan x$ ന്റെ ഗ്രാഫുമായി അനന്തമായ സംഗമ ബിന്ദുകളിലൂടെ കടന്ന പോകുന്നതായി കാണാം. ഇതിൽ പൂജ്യത്തിനും 2π ക്കും ഇടയിലുള്ള പ്രധമപരിഹാരങ്ങൾ ചിത്രത്തിൽ നിന്നു കാണാം.

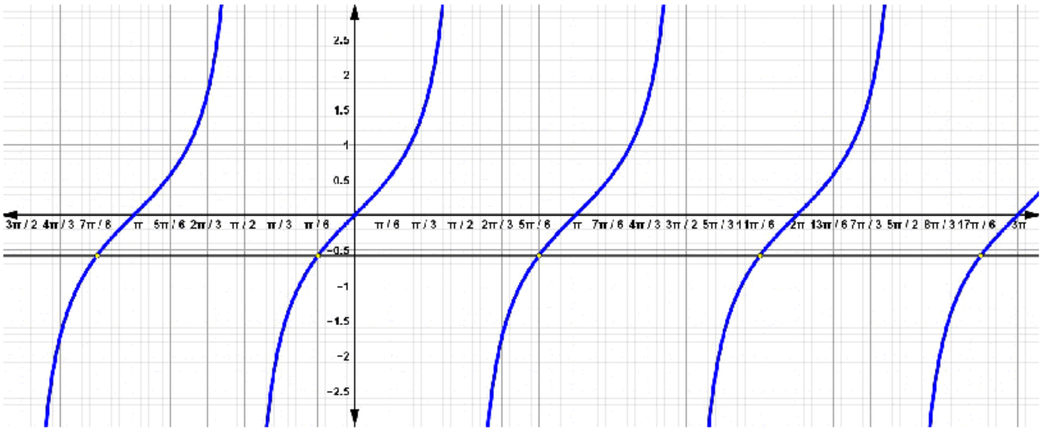


ചിത്രം 3.40

ഇതുപോലെ $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ആണ് പരിഗണിക്കുന്നതെങ്കിൽ. ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഒരു പരിഹാരം $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥംശത്തിലും രണ്ടാമത്തെ പരിഹാരം $\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലുമായി വരുന്നത് കാണാം.



ചിത്രം 3.41



ചിത്രം 3.42

tan(*x*), *y* = 1 എന്നീ input command കൾ നൽകി tan *x* ന്റെ ഗ്രാഫും, *y* = 1 എന്ന വരയും നിർമിക്കാം. *x* അക്ഷത്തെ $\frac{\pi}{4}$ ന്റെ പൂർണാങ്ക ഗുണിതത്തിലേക്ക് മാറ്റുക. ഗ്രാഫിന്റെയും വരയുടെയും സംഗമബിന്ദുക്കളാണ് tan *x* = 1 എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളായി വരുന്നത് ഇതിൽ നിന്നും പ്രഥമ പരിഹാരം കാണാം. Move tool ഉപയോഗിച്ച് വരയുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിയാൽ ഈ ആശയങ്ങൾ വ്യക്തമാകും.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ:

- tan*x* = tan*y* എന്ന സമവാക്യത്തിന് $0 \le x < 2\pi$ എന്ന ഇടവേളകൾക്കുള്ളിൽ ഒരു ജോഡി പരിഹാരങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ജോഡിയിൽ ഒരെണ്ണം ഒന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണെങ്കിൽ മറ്റേത് മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലായിരിക്കും. അതുപോലെ ജോഡിയിൽ ഒരെണ്ണം രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലാണെങ്കിൽ മറ്റേത് നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലായിരിക്കും.

  അതായത് $\tan x = 1$ ന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

  $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ $x = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

- tan *x* = tan *y* ന്റെ പൊതുവായ പരിഹാരങ്ങൾ പരിചയപ്പെടാം.

  $\tan x = \tan y \Rightarrow x = y$

  $\tan x = \tan(\pi + y) \Rightarrow x = \pi + y$

  $\tan x = \tan(2\pi + y) \Rightarrow x = 2\pi + y$

  $\tan x = \tan(3\pi + y) \Rightarrow x = 3\pi + y$

  $\tan x = \tan(4\pi + y) \Rightarrow x = 4\pi + y$

  – – – – – – – – – – – – – – – – – –

അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഇതിന്റെ പൊതു പരിഹാരങ്ങൾ $x = n\pi + y, n \in Z$ എന്ന് പറയാം.

സിദ്ധാന്തം: 3

x, y എന്നിവ $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റ സംഖ്യാഗുണിതങ്ങളല്ലെങ്കിൽ $\tan x = \tan y$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുപരിഹാരം $x = n\pi + y,\ n \in \mathbf{Z}$ ആണ്.

തെളിവ്:

ഇവിടെ; $\tan x = \tan y \Rightarrow \tan x - \tan y = 0$

$$\Rightarrow \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 0$$

$$\Rightarrow \sin (x - y) = 0$$

അതായത്; $x - y = n\pi$

$$\Rightarrow x = n\pi + y,\ n \in \mathbf{Z}$$

ഉദാഹരണം: 18

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ യുടെ പരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

അതുകൊണ്ട് പ്രഥമ പരിഹാരം $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

പരിഹാരങ്ങൾ

ഉദാഹരണം: 19

$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ യുടെ പ്രഥമപരിഹാരം കാണുക.

പരിഹാരം

നമുക്ക് അറിയാം; $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

അതുകൊണ്ട് പ്രഥമപരിഹാരങ്ങൾ $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

ഉദാഹരണം: 20

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{4\pi}{3},$$

എങ്കിൽ പൊതുപരിഹാരം: $x = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, \ n \in \mathbf{Z}.$

ഉദാഹരണം: 21

$\cos x = \frac{1}{2}$ ന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

അങ്ങനെ എങ്കിൽ; $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$

ഉദാഹരണം: 22

$\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ $\tan 2x = -\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow 2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbf{Z} \Rightarrow x = n\pi + 5\frac{\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}$$

ഉദാഹരണം: 23

$\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$ യുടെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$$

അതുകൊണ്ട് $\sin 4x = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 4x = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

തുടർന്ന് $4x = n\pi$ അല്ലെങ്കിൽ $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}$

$x = \frac{n\pi}{4}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbf{Z}$.

ഉദാഹരണം: 24

$2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ ത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sin x = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

തുടർന്ന് $\sin x = -\frac{1}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $\sin x = 2$

പക്ഷെ; $\sin x = 2$ സാധ്യമല്ല.

അതുകൊണ്ട് $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$.

അതിനാൽ പരിഹാരങ്ങൾ

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbf{Z}.$$

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 3.4

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ പ്രഥമ, പൊതുപരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

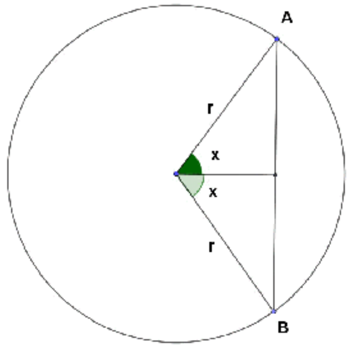
1. $\tan x = \sqrt{3}$
2. $\sec x = 2$
3. $\cot x = -\sqrt{3}$
4. $\operatorname{cosec} x = -2$

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളുടെ പൊതുപരിഹാരങ്ങൾ കാണുക.

5. $\cos 4x = \cos 2x$
6. $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$
7. $\sin 2x + \cos x = 0$
8. $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$
9. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

3.6 സൈൻ, കൊസൈൻ സൂത്രവാക്യങ്ങളുടെ തെളിവും ലളിതമായ പ്രായോഗങ്ങളും

പത്താം ക്ലാസ്സിൽ ത്രികോണമിതി എന്ന പാഠത്തിൽ പഠിച്ച ചില ആശയങ്ങൾ ഇവിടെ ഓർമ്മിക്കാം. അതായത് ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെ നീളവും കേന്ദ്ര കോണിന്റെ പകുതിയുടെ sinc നെ ആരം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

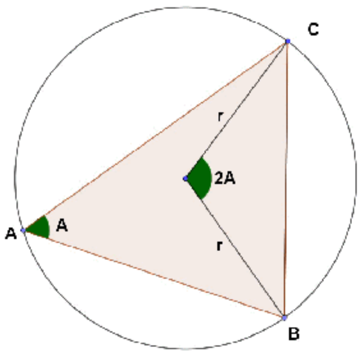


ചിത്രം 3.43

ചിത്രം 3.43 നിന്നും $AB = 2r \sin x$

ഇനി ചിത്രം 3.44 ൽ ΔABC യും അതിന്റെ പരിവൃത്തവും പരിഗണിച്ചാൽ

BC = 2r sinA; AB = 2r sinC; AC = 2r sinB



ചിത്രം 3.44

കോൺ A ക്ക് എതിരെയുള്ളവശത്തിന് 'a' എന്നും, B ക്ക് എതിരെയുള്ള വശത്തിന് 'b' എന്നും, C ക്ക് എതിരെയുള്ള വശത്തിന് 'c' എന്നും എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ.

$a = 2r \sin A$; $b = 2r \sin B$; $c = 2r \sin C$ എന്നു എഴുതാം.

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2r; \frac{b}{\sin B} = 2r; \frac{c}{\sin C} = 2r$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ഇതിനെ സൈൻ നിയമം എന്നാണ് പറയുന്നത്

സിദ്ധാന്തം: 1 സൈൻ സൂത്രവാക്യം

ഒരു ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളവും അവയ്ക്ക് എതിരെയുള്ള കോണുകളുടെ സൈനും ഒരേ അനുപാതത്തിലാണ്,

അതായത് ΔABC പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ ; $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

തെളിവ്:

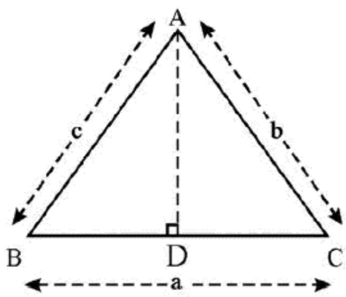
അവസ്ഥ: 1. ΔABC ന്യൂനത്രികോണം എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇവിടെ a = BC, b = AC, c = AB

ചിത്രത്തിൽ AD എന്നത് BC യ്ക്ക് ലംബമാണ്

ΔABD യിൽ $\frac{AD}{AB} = \sin B \Rightarrow AD = c\sin B$.......(1)

ΔACD യിൽ $\frac{AD}{AC} = \sin C \Rightarrow AD = b\sin C$.......(2)



ചിത്രം 3.45

(1), (2)ഉപയോഗിച്ച്

$c\sin B = b\sin C$

$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$..................$(A)$

അതു പോലെ; $BE \perp AC$ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ;

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$..................$(B)$ എന്ന് തെളിയിക്കാം.

എങ്കിൽ (A), (B) ഉപയോഗിച്ച് $\left(\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}\right)$

അവസ്ഥ: 2. ΔABC ഒരു ബൃഹത്ത്രികോണമായൽ നീട്ടി വരച്ച BC യിലേക്ക് AD എന്ന ലംബം വരക്കുന്നു.

ΔABD യിൽ $\frac{AD}{AB} = \sin(180 - B) \Rightarrow AD = c\sin B.......(1)$

ΔACD യിൽ $\frac{AD}{AC} = \sin C \Rightarrow AD = b\sin C.......(2)$

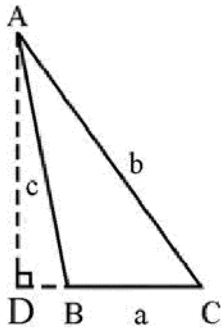
(1), (2) ഉപയോഗിച്ച്

$c\sin B = b\sin C$

$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}..................(A)$

അതു പോലെ; $BE \perp AC$ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ ;

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}..................(B)$ എന്ന് തെളിയിക്കാം



ചിത്രം 3.46

എങ്കിൽ (A), (B) ഉപയോഗിച്ച് $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

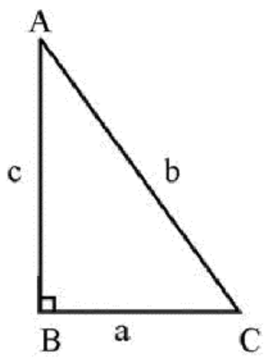
അവസ്ഥ: 3. ΔABC ഒരു മട്ടത്രികോണമാണെന്ന് പരിഗണിക്കാം

ΔABC യിൽ B ഒരു മട്ട കോണാണ്

$\frac{AB}{AC} = \sin C \Rightarrow \frac{c}{b} = \sin C \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{\sin C}{c}.......(1)$

$\frac{BC}{AC} = \sin A \Rightarrow \frac{a}{b} = \sin A \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{\sin A}{a}.......(2)$

$\sin B = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{\sin B}{b}.......(3)$



ചിത്രം 3.47

എങ്കിൽ(1),(2),(3) ഉപയോഗിച്ച്

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{b}$

$\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

മേൽവിവരിച്ച മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത അവസ്ഥയിലും

$\Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ ആണെന്ന് കാണാൻ കഴിയും

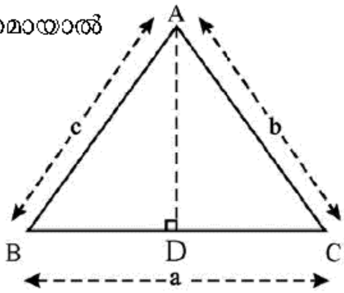
സിദ്ധാന്തം: 2 : കൊസൈൻ സൂത്രവാക്യം

ത്രികോണം ABC യിൽ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

തെളിവ്:

അവസ്ഥ 1 : ത്രികോണം ABC ഒരു ന്യൂനത്രികോണമായാൽ
A യിൽ നിന്നും AD $\perp$ BC വരക്കുക.



ചിത്രം 3.48

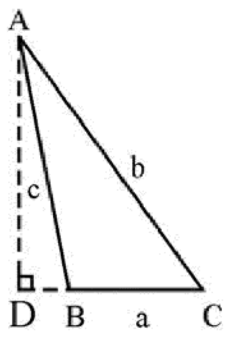
ΔABD യിൽ, $\cos B = \dfrac{BD}{c} \Rightarrow BD = c\cos B$

ΔACD യിൽ, $\cos C = \dfrac{CD}{b} \Rightarrow CD = b\cos B$

എങ്കിൽ, $AC^2 = CD^2 + AD^2$
$= AD^2 + (BC - BD)^2$
$= BC^2 + (AD^2 + BD^2) - 2BC.BD$
$= BC^2 + AB^2 - 2BC.BD$

അതായത് $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

അവസ്ഥ 2 : ΔABC ഒരു ബൃഹദ്ത്രികോണമായാൽ
A യിൽ നിന്നും AD $\perp$ CB വരക്കുക.



ചിത്രം 3.49

ΔABD യിൽ $\dfrac{BD}{c} = \cos(180 - B) = -\cos B$

$\Rightarrow BD = -c\cos B$

എങ്കിൽ, $AC^2 = AD^2 + CD^2$
$= AD^2 + (BC + BD)^2$
$= AD^2 + BD^2 + BC^2 + 2BC.BD$
$= AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$

അതായത് $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

അവസ്ഥ 3 : ΔABC ഒരു മട്ടത്രികോണമായാലൽ

$b^2 = c^2 + a^2$

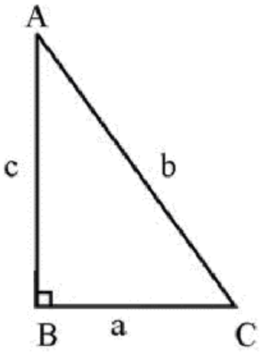
$$B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos B = 0$$

അതുകൊണ്ട് $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$

ഇതുപോലെ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

എന്ന് തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 3.50

കോണളവുകൾ കണ്ടെത്തുന്നതിനായി കൊസൈൻ സൂത്യവാക്യങ്ങളെ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിലും എഴുതാറുണ്ട്.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Polygon tool ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണം ABC നിർമ്മിക്കാം. ഇപ്പോൾ Algebra view ൽ ΔABC യുടെ വശങ്ങളുടെ നീളവും $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ എന്നിവക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ യഥാക്രമം a, b, c എന്നിങ്ങനെയും കാണാം. Angle tool ഉപയോഗിച്ച് മൂന്ന് കോണുകളും കണ്ടെത്തുക. (ഉദാ: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$). sin (α), sin (β), sin (γ) എന്നീ input command കൾ നൽകി ഈ കോണുകളുടെ sine വിലകൾ കാണാം. ഇവ Algebra view Number ഉണ്ടാകും (d, e, f). ഇനി $\frac{a}{d}, \frac{b}{e}, \frac{c}{f}$ എന്നീ input command കൾ നൽകി ഈ അംശബന്ധങ്ങൾ താരതമ്യം ചെയ്യാം. Move tool ഉപയോഗിച്ച് DABC യുടെ വലിപ്പം മാറ്റി സൈൻ സൂത്യവാക്യം പരിചയപ്പെടാം. a ^ 2; b ^ 2 + c ^ 2 - 2 * b * c * cos (α) എന്നീ, input command കൾ നൽകുക. ഇതിന്റെ വിലകൾ തുല്യമാണെന്ന് Algebra view ൽ നിന്നും കാണാം. Move tool ഉപയോഗിച്ച് ΔABC യുടെ വലിപ്പം മാറ്റി കൊസൈൻ സൂത്ര വാക്യം പരിചയപ്പെടാം.

ഉദാഹരണം: 25

ത്രികോണം ABC യിൽ ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നവ തെളിയിക്കുക.

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$
$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$
$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

പരിഹാരം

സൈൻ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്;

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k \text{ (എന്നിരിക്കട്ടെ)}$$

തുടർന്ന്, $$\frac{b-c}{b+c}=\frac{k(\sin B-\sin C)}{k(\sin B+\sin C)}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\cot\frac{(B+C)}{2}\tan\frac{(B-C)}{2}$$

$$=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\left[\because A+B+C=180 \Rightarrow B+C=180-A \Rightarrow \frac{B+C}{2}=90-\frac{A}{2}\right]$$

$$=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

ഉദാഹരണം: 26

ത്രികോണം ABC യിൽ

$a \sin(B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$a \sin(B - C) = a [\sin B \cos C - \cos B \sin C] \qquad (1)$$

തുടർന്ന് $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c} = k \text{ (say)}$

തുടർന്ന്, $\sin A = ak$, $\sin B = bk$, $\sin C = ck$

sin B, sin C ഇവയുടെ വിലകൾ സമവാക്യം (1) ൽ ആരോപിക്കുക.

$$a \sin(B - C) = a\left[bk\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) - ck\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}\right)\right]$$

$$= \frac{k}{2}\left(a^2 + b^2 - c^2 - c^2 - a^2 + b^2\right)$$

$$= k(b^2 - c^2)$$

ഇതുപോലെ, $b \sin (C - A) = k (c^2 - a^2)$

$c \sin (A - B) = k (a^2 - b^2)$

L.H.S $= k (b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2)$

$= 0 =$ R.H.S.

ഉദാഹരണം: 27

h പൊക്കമുള്ള കുത്തനെയുള്ള ഗോപുരമാണ് PQ. A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് P യെ 45° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു. മറ്റൊരു ബിന്ദുവായ B യിൽ നിന്ന് P യെ 60° മേൽക്കോണിൽ കാണാം. A യിൽ നിന്നും AB യിലൂടെ B ലേക്കുള്ള ദൂരം d ആണ്. AB യും AQ വും തമ്മിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ 30° ആയാൽ $d = h\left(\sqrt{3} - 1\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$\angle PAQ = 45°$, $\angle BAQ = 30°$, $\angle PBH = 60°$ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

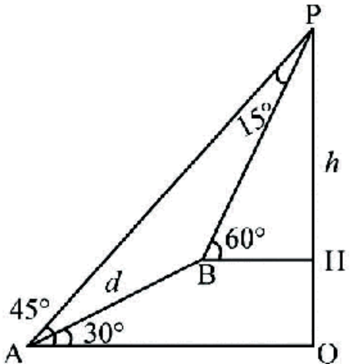
$\angle APQ = 45°, \angle BPH = 30°, \angle APB = 15°$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$\angle PAB = 15° \Rightarrow \angle ABP = 150°$

ΔAPQ, എന്ന ത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് $AP^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{2}h$$

Δ ABP യിൽ സൈൻസൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ



ചിത്രം 3.51

$$\frac{AB}{\sin 15°} = \frac{AP}{\sin 150°} \Rightarrow \frac{d}{\sin 15°} = \frac{\sqrt{2}h}{\sin 150°}$$

അതായത്, $d = \dfrac{\sqrt{2}h \sin 15°}{\sin 30°}$

$$= h(\sqrt{3} - 1)$$

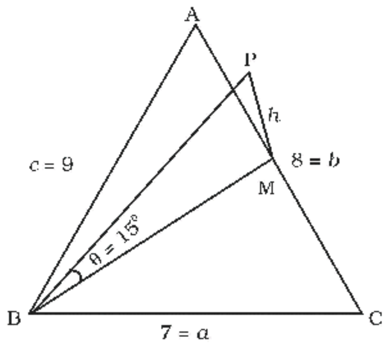
ഉദാഹരണം: 28

ABC എന്ന ത്രികോണ രൂപത്തിലുള്ള സ്ഥലത്തിന്റെ AC എന്ന വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവായ M ൽ ഒരു വിളക്ക് മരം സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ AB = 9 സെ.മീ., CA = 8 സെ.മീ., BC = 7മീറ്റർ ആകുകയും വിളക്ക് മരം B എന്ന ബിന്ദുവുമായി 15° കോണുണ്ടാക്കുകയും ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ വിളക്കു മരത്തിന്റെ പൊക്കം കാണുക.

പരിഹാരം

$AB = 9 = c$, $BC = 7 = a$

$AC = 8 = b$



ചിത്രം 3.52

AC എന്ന വശത്തിന് മധ്യബിന്ദുവായ M ൽ MP എന്ന h പൊക്കമുള്ള വിളക്ക് മരം സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. വിളക്ക് മരം B യിൽ $\theta = 15°$ കോണുണ്ടാക്കുന്നു.

ΔABC, എന്ന ത്രികോണത്തിൽ കൊസൈൻ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 64 - 81}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7} \qquad (1)$$

അതുപോലെ ΔBMC യിലും കൊസൈൻ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2\ BC \times CM \cos C.$$

ഇവിടെ, $CM = \frac{1}{2} CA = 4$, M എന്നത് AC യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ്.

അങ്ങനെ (1) ഉപയോഗിച്ച്

$$BM^2 = 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{2}{7}$$
$$= 49$$
$$BM = 7$$

M ൽ മട്ടകോണുള്ള ΔBMP യിൽ നിന്നും,

$$\tan\theta = \frac{PM}{BM} = \frac{h}{7}$$

$$\frac{h}{7} = \tan(15°) = 2 - \sqrt{3}$$

അതായത്, $h = 7(2-\sqrt{3})$ മീറ്റർ

പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ 3.5

ത്രികോണം ABC യിൽ $a = 18$, $b = 24$, $c = 30$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കാണുക.

1. cos A, cos B, cos C

2. sin A, sin B, sin C

ഏതൊരു ത്രികോണം ABC യ്ക്കും ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്നവ തെളിയിക്കുക.

3. $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}$$

4. $$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$$

5. $\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos \frac{A}{2}$

6. $a\,(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$

7. $a\,(\cos C - \cos B) = 2\,(b - c) \cos^2 \frac{A}{2}$

8. $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{a^2}$

9. $(b+c)\cos\frac{B+C}{2} = a\cos\frac{B-C}{2}$

10. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$

11. $\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

12. $(b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0$

13. $\frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0$

14. സമതലവുമായി 15° കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഒരു കുന്നിൻ ചെരിവിൽ ഒരു മരം ലംബമായി നില്ക്കുന്നു. മരച്ചുവട്ടിൽ നിന്നും കുന്നിൻ ചരിവിലൂടെ 35 മീറ്റർ താഴേയ്ക്കുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും മരത്തിൻ മുകളിലേക്കുള്ള മേൽക്കോൺ 60° ആണ്. എങ്കിൽ മരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

15. രണ്ട് കപ്പലുകൾ തുറമുഖത്തുനിന്നും ഒരേ സമയത്ത് പുറപ്പെടുന്നു. ഒന്ന് NE45° എന്ന ദിശയിലേക്ക് 24 കി.മീ./മണിക്കൂറിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു, മറ്റേത് 575° എന്ന ദിശയിലേക്ക് 32 കി.മീ./മണിക്കൂറിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. മൂന്ന് മണിക്കൂറ് കഴിഞ്ഞ് കപ്പലുകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക,

16. ഒരു പുഴയുടെ ഒരേ വശത്തുള്ള രണ്ട് മരങ്ങളാണ് A യും B യും. C എന്ന പുഴയിലെ ബിന്ദുവും A യിലും B യിലും നിന്ന് യഥാക്രമം 250 മീറ്റർ, 300 മീറ്റർ അകലെയാണ്. കോൺ C, 45° ആയാൽ മരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുക.

കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം : 29

$\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos y = -\frac{12}{13}$ ആകുകയും x, y രണ്ടാമത്തെ ചതുർഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുകയും ആണെങ്കിൽ $\sin(x + y)$ കാണുക.

പരിഹാരം

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \ldots (1)$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

അതുകൊണ്ട് $\cos x = \pm\frac{4}{5}$.

x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ആയതുകൊണ്ട് $\cos x$ ന്യൂനസംഖ്യയാണ്.

തുടർന്ന് $\cos x = -\frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$$

$$\Rightarrow \sin y = \pm\frac{5}{13}$$

y രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ആയതുകൊണ്ട് $\sin y$ അധിസംഖ്യയാണ്. അതുകൊണ്ട് $\sin y = \frac{5}{13}$. $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ എന്നിവയുടെ വിലകൾ (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ.

$$\sin(x + y) = \frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13} = -\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=-\frac{56}{65}$$

ഉദാഹരണം : 30

$\cos 2x \cos\frac{x}{2} - \cos 3x \cos\frac{9x}{2} = \sin 5x \sin\frac{5x}{2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\text{L.H.S.} \quad = \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{15x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -\sin 5x\,\sin\left(-\frac{5x}{2}\right) = \sin 5x\,\sin\frac{5x}{2} = \text{R.H.S.}$$

ഉദാഹരണം: 31

$\tan\frac{\pi}{8}$ ന്റെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$x = \frac{\pi}{8}$ എന്നെടുക്കുക. അപ്പോൾ $2x = \frac{\pi}{4}$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$ എന്ന് നമുക്കറിയാം

A Xpsl m v $\tan\frac{\pi}{4} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

$y = \tan\frac{\pi}{8}$ എന്നെടുക്കുക. അപ്പോൾ $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

അതുകൊണ്ട് $y^2 + 2y - 1 = 0$

അതുകൊണ്ട് $$y = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$\frac{\pi}{8}$ ഒന്നാം ചതുർത്ഥാംശത്തിലായതുകൊണ്ട്, $y = \tan\frac{\pi}{8}$ ന്റെ വില അധിസംഖ്യയാണ്.
തുടർന്ന്

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

ഉദാഹരണം: 32

$\tan x = \frac{3}{4}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, ആയാൽ $\sin\frac{x}{2}, \cos\frac{x}{2}$, $\tan\frac{x}{2}$ എന്നിവയുടെ വില കാണുക.

പരിഹാരം

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $\cos x$ ന്യൂനസംഖ്യയാണ്.

അതുപോലെ; $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$.

അതുകൊണ്ട് $\sin\frac{x}{2}$ അധിസംഖ്യയാണ്. $\cos\frac{x}{2}$ ന്യൂനസംഖ്യയാണ്.

നമുക്കറിയാം $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

അതുകൊണ്ട് $\cos^2 x = \frac{16}{25}$ or $\cos x = \frac{4}{5}$ (എന്തുകൊണ്ട്?)

$$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

അതുകൊണ്ട് $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{9}{10}$

$$\Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

അതുപോലെ $2\cos^2\frac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

അതുകൊണ്ട് $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{(എന്തുകൊണ്ട്?)}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3.$$

ഉദാഹരണം: 33

$\cos^2 x + \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

പരിഹാരം

$$\text{L.H.S.} = \frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)}{2}.$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+2\cos 2x\cos\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x+2\cos 2x\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x-2\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3+\cos 2x-\cos 2x\right]=\frac{3}{2} = \text{R.H.S.}$$

കൂടുതൽ പരിശീലനപ്രശ്നങ്ങൾ

തെളിയിക്കുക.

1. $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$
2. $(\sin 3x + \sin x)\sin x + (\cos 3x - \cos x)\cos x = 0$

3. $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\cos^2 \dfrac{x+y}{2}$

4. $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4\sin^2 \dfrac{x-y}{2}$

5. $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4\cos x \cos 2x \sin 4x$

6. $\dfrac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$

7. $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4\sin x \cos \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{3x}{2}$

ചുവടെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $\sin \dfrac{x}{2}$, $\cos \dfrac{x}{2}$, $\tan \dfrac{x}{2}$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. $\tan x = -\dfrac{4}{3}$, x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു

9. $\cos x = -\dfrac{1}{3}$, x മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു

10. $\sin x = \dfrac{1}{4}$, x രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു

സംഗ്രഹം

- r ആരമുള്ള വൃത്തത്തിലെ l നീളമുള്ള ഒരു ചാപം ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണളവ് θ റേഡിയൻ ആയാൽ $l = r\theta$
- റേഡിയൻ അളവ് $= \dfrac{\pi}{180} \times$ ഡിഗ്രി അളവ്
- ഡിഗ്രി അളവ് $= \dfrac{180}{\pi} \times$ റേഡിയൻ അളവ്
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
- $\cos(2n\pi + x) = \cos x$
- $\sin(2n\pi + x) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$

- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x \quad y) - \cos x \cos y \quad \sin x \sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

  $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\qquad$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$

  $\cos(2\pi - x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(2\pi - x) = -\sin x$

- $x, y, (x \pm y)$ എന്നീ കോണുകൾ $\frac{\pi}{2}$ ന്റെ ഒറ്റസംഖ്യാഗുണിതമല്ലെങ്കിൽ

  $$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

  $$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

- $x, y, (x \pm y)$ എന്നീ കോണുകൾ π ന്റെ പൂർണസംഖ്യാഗുണിതമല്ലെങ്കിൽ

  $$\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

  $$\cot(x - y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$
- (i) $\cos x + \cos y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

  (ii) $\cos x - \cos y = -2\sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

  (iii) $\sin x + \sin y = 2\sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

  (iv) $\sin x - \sin y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$
- (i) $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

  (ii) $-2\sin x \sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$

  (iii) $2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

  (iv) $2\cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$.
- $\sin x = 0$ ആയാൽ $x = n\pi$, ഇവിടെ $n \in \mathbf{Z}$.
- $\cos x = 0$ ആയാൽ $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, ഇവിടെ $n \in \mathbf{Z}$.
- $\sin x = \sin y$ ആയാൽ $x = n\pi + (-1)^n y$, ഇവിടെ $n \in \mathbf{Z}$.
- $\cos x = \cos y$, ആയാൽ $x = 2n\pi \pm y$, ഇവിടെ $n \in \mathbf{Z}$.
- $\tan x = \tan y$ ആയാൽ $x = n\pi + y$, ഇവിടെ $n \in \mathbf{Z}$.
- സൈൻ സൂത്രവാക്യം : ഒരു ത്രികോണം ABC യിലെ വശങ്ങളുടെ നീളവും അവക്ക് എതിരെയുള്ള കോണുകളുടെ സൈനും ഒരേ അനുപാതത്തിലാണ്.

  $$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$
- കൊസൈൻ സൂത്ര്യവാക്യം : ത്രികോണം ABC യിൽ

  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, $c^2 = a^2 + bc^2 - 2ab \cos C$

ചരിത്രക്കുറിപ്പ് (Historical note)

ത്രികോണമിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനം തുടങ്ങുന്നത് ഇന്ത്യയിൽ തന്നെയാണ്. ആര്യഭടൻ (എ.ഡി. 476), ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ (എ.ഡി. 598) ഭാസ്ക്കര I (എ.ഡി. 600) ഭാസ്ക്കര II (എ.ഡി. 1114) തുടങ്ങിയ പ്രാചീന ഇന്ത്യൻ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ ത്രികോണമിതിയിലെ പല സുപ്രധാന ഫലങ്ങളും കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഇവർ കണ്ടെത്തിയ ഈ അറിവുകൾ ആദ്യം അറേബ്യയിലേക്കും പിന്നീട് യൂറോപ്പിലേക്കും കൈമാറ്റം ചെയ്യപ്പെട്ടു. ഗ്രീക്കുകാരും ത്രികോണമീതി പഠനം തുടങ്ങിയെങ്കിലും അവരുടെ രീതി വിലക്ഷണമായതിനാൽ ഇന്ത്യൻ ശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ സമീപനം വളരെപ്പെട്ടെന്നു തന്നെ ലോകം മുഴുവനും അംഗീകരിക്കപ്പെടുകയായിരുന്നു. ഒരു കോണിന്റെ സൈൻ മൂല്യവും സൈൻ ഏകദവും ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരുടെ 'സിദ്ധാന്ത'ങ്ങളിലെ (സംസകൃതത്തിലുള്ള ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്ര ഗ്രന്ഥങ്ങൾ) ഒരു പ്രധാന കണ്ടെത്തലാണ്.

90^0 ൽ കൂടുതലുള്ള കോണുകളുടെ സൈൻ ഏകദത്തിന്റെ വിലകാണാനുള്ള മാർഗം ഭാസ്ക്കര I(ഏകദേശം എഡി 600) രൂപീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്. $\sin (A + B)$ യുടെ വിപുലനത്തിന്റെ തെളിവ് 16-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ എഴുതപ്പെട്ട യുക്തിഭാഷ എന്ന മലയാള ഗണിത പുസ്തകത്തിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. സൈൻ അല്ലെങ്കിൽ കൊസൈൻ ഏകദത്തിന്റെ $18°, 36°, 54°, 72°$ തുടങ്ങിയ വിലകൾ ഭാസ്ക്കര II കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.

ജ്യോതിശാസ്ത്രജ്ഞാനിയായിരുന്ന സർ ജോൺ ഹെർസിഹേൽ (1813) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$,എന്നിവയെ arc sine, arc cosine എന്നിങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതണമെന്ന് നിർദ്ദേശിച്ചു. ഥേൽസ് (ഏകദേശം ബിസി 600) നിയതമായി ത്രികോണമിതിയിലെ ദൂരവും ഉന്നതിയും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഈജിപ്ടിലെ ഭീമൻ പിരമിഡിന്റെ ഉയരം അതിന്റെ നിഴലിന്റെയും, നീളം അറിയാവുന്ന ഒരു വടിയുടെയും നീളങ്ങൾ അളന്നുകൊണ്ട് കണ്ടുപിടിച്ചത് എക്കാലത്തും അംഗീകരിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (സൂര്യന്റെ ഉന്നതി കോൺ)}$$

കടലിൽ കിടക്കുന്ന ഒരു കപ്പൽ എത്ര അകലെയാണെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാൻ സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ അനുപാതം എന്ന ആശയം ഉപയോഗിച്ചു ഥേൽസ് കണ്ടുപിടിച്ചു എന്നു പറയപ്പെടുന്നു. ദൂരവും ഉന്നതിയും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ ഗുണധർമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാൻ പ്രാചീന ഭാരതീയ ഗണിതജ്ഞർ പ്രയത്നിച്ചിരുന്നു എന്ന് കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.