

दत्तों का संचालन (DATA HANDLING)

7

7.0 परिचय :

रवि समाचार पत्र में खेल समाचार पढ़ रहा था। खेल के पन्ने पर उसने दो तालिकाएँ देखी जो निम्न प्रकार से थीं।

वर्ल्ड कप के 5 श्रेष्ठ बल्लेबाज	
बल्लेबाज का नाम	रन
टी. दिलशान (श्रीलंका)	500
सचिन तेंदुलकर (भारत)	482
के. संगकारा (श्रीलंका)	465
जोनथान ट्रॉट (इंग्लैंड)	422
यू. थरंगा (श्रीलंका)	395

तालिका - 1

वर्ल्ड कप 2012 के 5 श्रेष्ठ गेंदबाज	
बल्लेबाज का नाम	रन
शाहीद आफरिदी (पाकिस्तान)	21
जहीर खान	21
स्काउती (न्यूजीलैंड)	18
रोबिन पीटरसन (दक्षिण अफ्रीका)	15
मुरलीधरन (श्रीलंका)	15

तालिका - 2

यह तालिका हमें क्या दर्शाती है?

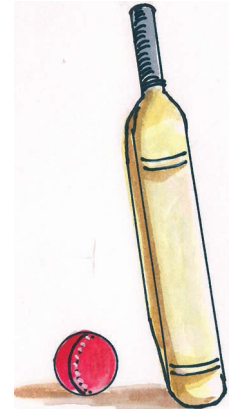
तालिका 1 हमें विश्वकप 2011 में उन बल्लेबाजों के नाम तथा उनके द्वारा बनाये गये रनों की जानकारी देती है। यह जानकारी अन्त में निर्णय लेने के लिए महत्वपूर्ण होती है। जैसे खेल के आयोजकों के लिए यह आसान हो जाता है कि किसे सर्वश्रेष्ठ बल्लेबाज को पुरस्कार दिया जाए।

तालिका 2 हमें विश्वकप 2011 में उन गेंदबाजों के नाम तथा उनके द्वारा लिये गये विकेटों की जानकारी देती है। यह जानकारी अन्त में निर्णय लेने के लिए महत्वपूर्ण होती है, जैसे खेल आयोजकों के लिए यह आसान हो जाता है कि किसे श्रेष्ठ गेंदबाज का पुरस्कार दिया जाए।

वह जानकारी जो संख्या या शब्दों के रूप में मिलती है जिससे कि अंतिम निर्णय या किसी की पुष्टि हो उसे दत्त कहते हैं। उपरोक्त तालिकाओं में बल्लेबाजों के नाम और उनके द्वारा बनाये गये रन, गेंदबाज और उनके द्वारा लिए गये विकेटों की जानकारी को दत्त कहते हैं। दत्तों को अकसर आलेख या तालिकाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। सांख्यिकी सूचनाओं को तथ्यों का 'निरीक्षण' कहते हैं।



प्रयत्न कीजिए: अपने विद्यालय में बोर्ड पर लिखी सूचनाओं को पढ़ो। क्या आप किन्हीं दत्तों की जानकारी प्राप्त करेंगे? इन दत्तों की जानकारी प्राप्त करने का प्रयास करें।



7.1 दत्तों का आयोजन (Organising Data)

जवाहर बाल आरोग्य रक्षा योजना के अन्तर्गत एक विद्यालय के आठवीं कक्षा के 7 विद्यार्थियों के बारे में जानकारी प्राप्त की गई।

कृष्णा ने इन 7 विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ अपनी कापी में नोट की। ऊँचाइयाँ निम्न रहीं।

अमला 125 से.मी. लेखा - 133 से.मी., तबस्सुम - 121 से.मी., सुधा - 140 से.मी., वनजा- 117 से.मी., लेनिन - 129 से.मी. और राजेश - 132 से.मी.

कुमार ने इन ऊँचाइयों को आरोही क्रम में लिखकर उन्हें तालिका के रूप में लिखा।

विद्यार्थी का नाम	ऊँचाई (से.मी. में)
वनजा	117
तबस्सुम	121
आमला	125
लेनिन	129
राजेश	132
लेखा	133
सुधा	140



निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- सबसे लंबे छात्र का नाम क्या है?
- सबसे छोटे छात्र का नाम क्या है?
- अमला और राजेश की ऊँचाइयों में क्या अंतर है?

आपने कृष्णा या कुमार द्वारा दिये गये दत्तों का उपयोग किया होगा। कुमार द्वारा दिये गये दत्त व्यवस्थित हैं और समझने में भी आसान हैं।

यह कीजिये

एक परीक्षा में अमर ने विभिन्न विषयों में निम्न अंक प्राप्त किये। तेलुगु - 20, हिन्दी - 21, अंग्रेजी - 20, गणित - 19, विज्ञान - 24, सामाजिक - 17.

अमर और पीटर के अंकों को दत्तों के रूप में व्यवस्थित करके तुलना करो।



कक्षा - परियोजना कार्य :

भार ज्ञात करने वाली मशीन द्वारा अपने कक्षा के छात्रों का भार ज्ञात करें। इन दत्तों को व्यवस्थित करके तालिका बनाइए।

याद रहे इन भारों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखिए। फिर इन प्रश्नों के उत्तर लिखिए।

- कक्षा में किस छात्र की लम्बाई सबसे अधिक है?
- कक्षा में कितने बच्चों का भार 25 कि.ग्रा. से अधिक है?
- कक्षा में कितने बच्चों का भार 20 कि.ग्रा. और 25 कि.ग्रा. के बीच है?

7.2 प्रतिनिधिमान (Representative Values)

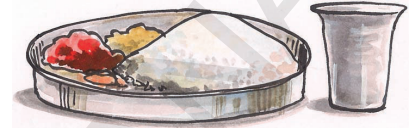
एक हास्टल में

- प्रतिदिन प्रत्येक बच्चों द्वारा ग्रहण किया गया औसत चावल 150 ग्राम हैं।

बच्चे की औसत आयु 13 वर्ष है।

बच्चे की औसत ऊँचाई 135 से.मी. है।

उपरोक्त दत्तों के आधार पर क्या हम कह सकते हैं कि प्रत्येक बच्चा प्रतिदिन 150 ग्राम चावल खाता है? क्या प्रत्येक बच्चे की आयु 13 वर्ष और ऊँचाई 135 से.मी. है? नहीं, क्योंकि



हम जानते हैं कि कुछ बच्चे 150 ग्राम से अधिक चावल, कुछ बच्चे 150 ग्राम से कम और कुछ केवल 150 ग्राम चावल ही खाते हैं। यही स्थिति बच्चों की आयु तथा उनकी ऊँचाई में होगी। 150 ग्राम चावल का तात्पर्य है कि प्रत्येक बच्चा हास्टल में 150 ग्राम चावल ग्रहण करता है। अर्थात यह चावल ग्रहण करने का प्रतिनिधित्व मान है। इसी प्रकार हास्टल में प्रत्येक बच्चे की आयु 13 वर्ष है। 13 वर्ष आयु के प्रतिनिधित्व मान को 'मध्यमान' कहते हैं। आगे की उप इकाई में हम मध्यमान के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे। उसी प्रकार माध्यिका एवं बहुलक भी प्रतिनिधित्व मान हैं।

7.3.1 मध्यमान (Arithmetic Mean)

उदाहरण - 1 एक विद्यालय में खेल के शिक्षक ने विद्यार्थियों को प्रतिदिन अभ्यास की तालिका इस प्रकार बनाई।

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
मिनट	20	35	40	30	25	45	15

राजेन्द्र द्वारा सप्ताह में अभ्यास के लिए लिया गया कुल समय

$$20 + 35 + 40 + 30 + 25 + 45 + 15 = 210 \text{ मिनट}$$

अब प्रतिदिन अभ्यास के लिए लिया गया समय को ज्ञात करने के लिए हम कुल समय को कुल दिनों से भाग करेंगे।

30 मिनट राजेन्द्र द्वारा प्रतिदिन अभ्यास के लिए लिया गया औसत समय है।

उदाहरण 2. एक सब्जी बेचने वाले की एक हफ्ते में कमाई क्रमशः ₹ 200, ₹150, ₹180, ₹ 160, ₹ 170 और ₹170 है। सब्जी वाले की प्रतिदिन औसत कमाई ज्ञात करो।

हल: कुल कमाई = 200+150+180+300+160+170+170= ₹1330

कुल दिन = 7

औसत कमाई = $\frac{1330}{7} = ₹190$

इस लिए इन दत्तों का औसत मध्यमान कहलाता है।

मध्यमान (A.M) = निरीक्षणों का योगफल / निरीक्षणों की संख्या



प्रयत्न करो :

1. खिलाड़ियों की आयु (वर्ष में) इस प्रकार है 16, 16, 16, 14, 17, 18. तो निम्न ज्ञात करो।

i) सबसे नौजवान और सबसे बड़े खिलाड़ी की आयु क्या है?

ii) खिलाड़ियों का मध्यमान

आप प्रतिदिन औसत कितने ग्लास पानी पीते हो? आप सप्ताह में कितने ग्लास पानी पीते हो? आप औसत किस प्रकार मालूम करोगे।

7.3.2 मध्यमान का सीमान्त क्या है?

अनिल, अमर, एन्टनी और इंदर के तेलगु, हिन्दी और अंग्रेजी विषय में प्राप्त अंक नीचे तालिका में दिये गये हैं।

	तेलगु	हिन्दी	अंग्रेजी
अनिल	15	8	10
अमर	10	10	12
एन्टनी	11	6	11
इंदर	12	12	13

आइए, विद्यार्थियों के प्रत्येक विषय में औसत प्राप्त अंक ज्ञात करें।

तेलुगु	हिन्दी	अंग्रेजी
मध्यमान = $\frac{15+10+11+12}{4}$	मध्यमान = $\frac{8+10+6+12}{4}$	मध्यमान =
$\frac{48}{4}$	$\frac{36}{4}$	= am
= 12 =	=	
अधिकतम अंक = 15	अधिकतम अंक =	अधिकतम अंक =
न्यूनतम अंक = 10	न्यूनतम अंक =	न्यूनतम अंक =
मध्यमान = 12	मध्यमान =	मध्यमान =

इस प्रकार आपको पता चलेगा कि **मध्यमान हमेशा न्यूनतम एवं अधिकतम मान के मध्य रहता है।**

7.3.3 मध्यमान का गुण

उदाहरण : 3 एक परिवार के 4 सदस्यों की आयु इस प्रकार है। कृष्णा - 44 वर्ष राधिका - 39 वर्ष, नीहारिका - 17 वर्ष, निखिल - 12 वर्ष (i) सदस्यों की औसत आयु ज्ञात करो (ii) पाँच वर्ष पूर्व उनकी औसत आयु क्या थी? (iii) क्या आप उनकी औसत आयु और पाँच वर्ष पूर्व की आयु में कोई संबंध बता सकते हैं?

हल: परिवार के सदस्यों की वर्तमान आयु = 44, 39, 17, 12 वर्ष
 परिवार के सदस्यों की आयु का वर्ष = 4
 परिवार के सदस्यों की आयु का औसत = $\frac{44+39+17+12}{4} = \frac{112}{4} = 28$ वर्ष
 पाँच वर्ष पूर्व सदस्यों की आयु = 44 - 5, 39 - 5, 17 - 5, 12 - 5
 = 39, 34, 12, 7

इसलिए पाँच वर्ष पूर्व आयु का औसत (मध्यमान) = $\frac{39+34+12+7}{4} = \frac{92}{4} = 23$ वर्ष

अर्थात्, वर्तमान आयु में 5 वर्ष घटाने पर सदस्यों की औसत आयु 5 वर्ष कम हो जाती है।

पश्चात् उनकी आयु का मध्यमान क्या होगा?

अब परिवार की औसत आयु ज्ञात करो अब से तीन वर्ष बाद आप क्या अनुमान लगाते हैं? अब से 10 वर्ष बाद परिवार की औसत आयु क्या होगी?

इसलिए जब दत्तों के मान में कोई संख्या बढ़ाने या घटाने पर मध्यमान भी उसी संख्या के अनुरूप घटता या बढ़ता है।



इसे करो

1. 10 दत्तों के निरीक्षणों के न्यूनतम मान 15 और अधिकतम मान 25 हो तो दत्तों का मध्यमान क्या होगा?

(i) 12 (ii) 15 (iii) 21 (iv) 27

2. निम्न दत्तों के निरीक्षण कीजिए और बिना हल किये दत्तों का मध्यमान ज्ञात कीजिए। दत्त है : 23, 45, 33, 21, 48, 30, 34, 36 और 35

(i) 20 (ii) 35 (iii) 48 (iv) 50



अभ्यास - 1

1. 26 फरवरी से 4 मार्च 2011 तक हैदराबाद के दिन का तापमान इस प्रकार रहा।
26°C, 27°C, 30°C, 30°C, 30°C, 32°C, 33°C और 32°C,

i) सप्ताह का अधिकतम तापमान क्या था?

ii) सप्ताह का औसत तापमान क्या रहा?

2. एक विद्यालय में दोपहर के भोजन कार्यक्रम के अन्तर्गत 5 दिनों तक ग्रहण किया गया चावल इस प्रकार रहा। 15,750 कि.ग्र. 14,850 कि.ग्र. 16,500 कि.ग्र. 14,700 कि.ग्राम और 17,700 कि.ग्र। पाँच दिनों में ग्रहण किये गये भोजन का औसत क्या रहा?



3. एक गाँव में चार वर्षों तक निम्न फसलें उगाई गई। फसल पर प्रति एकड़ लाभ (₹ में) इस प्रकार रहा

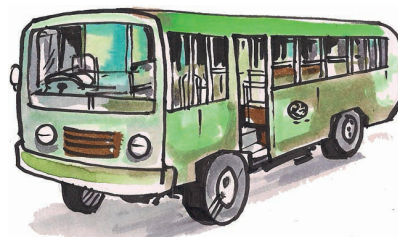
फसल	2005	2006	2007	2008
मूंगफली	₹ 7000	₹ 8000	₹ 7500	₹ 7500
जवार	₹ 6000	₹ 1000	₹ 8000	₹ 1000
बाजरा	₹ 9000	₹ 5000	₹ 3000	₹ 4000

ऊपर दी गई तालिका के आधार पर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

i) प्रत्येक फसल का चार वर्ष में औसत लाभ ज्ञात कीजिए।

ii) उपरोक्त उत्तर के आधार पर अगले वर्ष कौन सी फसल उगानी चाहिए?

4. APSRTC बस द्वारा 4 दिनों में 39,30,45 और 54 यात्रियों ने आदिलाबाद से निर्मल का सफर किया। प्रत्येक दिन यात्रियों का औसत क्या रहा?
5. चार मासिक परीक्षाओं में तीन विद्यार्थियों द्वारा अंग्रेजी में प्राप्त अंक इस प्रकार रहे।



विद्यार्थी का नाम	मासिक परीक्षा-1	मासिक परीक्षा-2	मासिक परीक्षा-3	मासिक परीक्षा-4
अन्जू	अनुपस्थित	19	23	21
नीलेश	0	20	22	24
लेखा	20	24	24	24

- लेखा के औसत अंक ज्ञात कीजिए।
- अंजू के औसत अंक ज्ञात कीजिए। औसत ज्ञात करते समय तीन से भाग देंगे या चार से? क्यों?
- नीलेश के औसत अंक ज्ञात कीजिए। औसत ज्ञात करते समय क्या आप तीन से भाग देंगे या चार से? क्यों?
- अंग्रेजी में किस विद्यार्थी का प्रदर्शन अच्छा रहा?
- 3 मित्रों ने होटल में नाश्ता किया, उनका बिल इस प्रकार रहा ₹ 16, ₹ 17 और ₹ 21.
 - उनका औसत खर्च क्या होगा?
 - यदि उन्होंने उनके द्वारा दिये बिल से 3 गुणा खर्च किया तो उनका औसत खर्च क्या होगा?
 - यदि होटल के मैनेजर 50 प्रतिशत कटौती दे तो उनका औसत खर्च क्या होगा?
 - उनके खर्च और औसत खर्च में क्या संबंध है?
- प्रथम 10 प्राकृतिक संख्याओं का मध्यमान ज्ञात कीजिए।
- प्रथम 5 अभाज्य संख्याओं का मध्यमान ज्ञात कीजिए।
- चार पूर्णांकों के समूह में दो छोटे पूर्णांकों का मध्यमान 102 है। तीन छोटे पूर्णांकों का मध्यमान 103 है। सभी चारों पूर्णांकों का मध्यमान 104 है। दिये गये पूर्णांकों में सबसे बड़ा पूर्णांक कौन सा है?
- किन्हीं दत्तों का उपयोग करते हुए दो प्रश्न हल कीजिए।



परियोजना कार्य : अपने घर के आस पास के घरों के परिवारों की जानकारी प्राप्त कीजिए और परिवार के सदस्यों की औसत ज्ञात कीजिए।

7.4 बहुलक (Mode)

प्रतिनिधित्व मान का दूसरा प्रकार बहुलक है। आइए, उदाहरण देखें।

उदाहरण 4:- एक दुकानदार ने अधिक संख्या में खाने का तेल बेचने के लिए हफ्ते में बिकने वाले तेलों का ब्योरा बनाया।

दिन	बेचे गये तेल के पैकेट
सोमवार	GGGSSSSPP
मंगलवार	GGGSSSSSPP
बुधवार	GGSSSSSP
गुरुवार	GGGSSSP
शुक्रवार	GGGSSPP
शनिवार	GSSSSSSSS
रविवार	GGGSSSP



G = मूंगफली का तेल, S = सुरजमुखी तेल, P= पामोलिन तेल का पैकेट

इस परिस्थिति में दुकानदार के लिए यह संभव है कि वह बेचे गये तेल के पैकेटों का मध्यमान (औसत) ज्ञात कर सके।

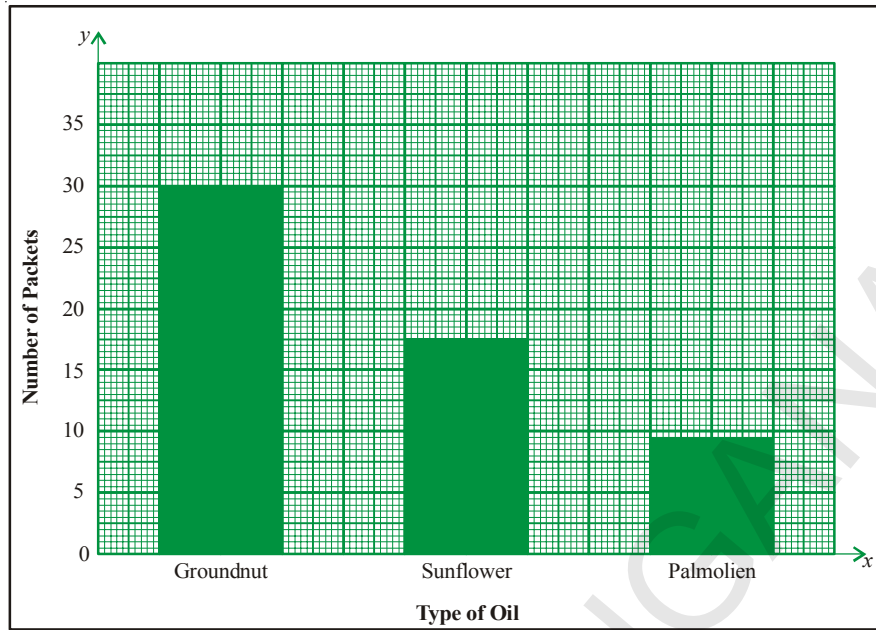
हल : दुकानदार सबसे पहले उसके द्वारा आदेश दिये गये तेल के पैकेटों का औसत ज्ञात करेगा।

$$\text{तेल के पैकेटों का औसत} = \frac{18+30+9}{3} = \frac{57}{3} = 19.$$

क्या दुकानदार को हर प्रकार के तेलों के 19 पैकेट अपनी दुकान में रखने होंगे?

दुकानदार अब अपनी दैनिक विक्रयता को देखेगा। यह जाँच करके उसने पता लगाया कि मूंगफली के तेल की मांग सबसे अधिक है, जबकि पामोलिन तेल की मांग सबसे कम है। यदि वह प्रत्येक ब्रांड के 19 पैकेट का आदेश देता है तो उसके पास मूंगफली के तेल की कमी तथा पामोलिन तेल अधिक मात्रा में बच जायेगा। इसलिए दुकानदार को चाहिए कि वह मूंगफली का तेल अधिक मंगाये और पामोलिन तेल कम मात्रा में। इसलिए सुरजमुखी तेल (30 पैकेट) दत्तों का प्रतिनिधित्व मान है जो कि ज्यादातर बेचा जाता है।

दत्तों के निरीक्षण में अधिक बार पुनरावृत्ति होने वाली संख्या को बहुलक कहते हैं। आलेख में उपस्थित सबसे लम्बा स्तम्भ दत्तों का बहुलक दर्शाता है। बहुलक को आलेख द्वारा इस प्रकार दर्शाया जाता है।



उदाहरण:-4 :- नीचे दी गई संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए - 2,3,5,3,4,7,3,2,1,7,3

हल:- दी हुई संख्याओं को व्यवस्थित करने पर 1,2,2,3,3,3,3,4,5,7,7

इन संख्याओं में संख्या तीन की पुनरावृत्ति अधिक बार हुई है। इसलिए बहुलक-3

उदाहरण5: निम्न संख्याओं का 3, 5, 9, 6, 5, 9, 2, 9, 3, 5 बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल:- छोटी से बड़ी संख्याओं को व्यवस्थित करने पर 2, 3, 3, 5, 5, 5, 6, 9, 9, 9.

यहाँ 5 और 9 की पुनरावृत्ति 3 बार हुई है इसलिए इन दत्तों का बहुलक 5 और 9 है। इस प्रकार के दत्तों को द्विबहुलक दत्त कहते हैं।

नोट:- यदि दिये हुए दत्तों में प्रत्येक दत्त की पुनरावृत्ति बराबर हो तो उन दत्तों का बहुलक नहीं होगा।



इसे करें।

1. निम्न दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

(i) 5, 6, 3, 5, 4, 9, 5, 6, 4, 9, 5

(ii) 25, 14, 18, 15, 17, 16, 19, 13, 12, 24

(iii) 10, 15, 20, 15, 20, 10, 15, 20, 10

उदाहरण-6 एक मासिक परीक्षा में 50 विद्यार्थियों के अंक नीचे दिये गये हैं। दत्तों के बहुलक ज्ञात कीजिए। कुल अंक 10 हैं।

प्राप्त अंक	विद्यार्थियों की संख्या
00	2
1	1
2	2
3	1
4	-
5	4
6	10
7	15
8	9
9	5
10	1
कुल	50

हल : ऊपर दिये दत्तों के निरीक्षण से पता चलता है कि अधिकतर विद्यार्थियों ने 7 अंक प्राप्त किये। इसलिए बहुलक 7 है।

नोट:- निरीक्षण में 7 की पंद्रह बार पुनरावृत्ति हुई है इसलिए 15 को बहुलक नहीं समझना चाहिए।

उदाहरण : 7 नीचे दी गई कौन सी परिस्थितियों में बहुलक एक प्रतिनिधित्व मान है।

- एक दुकानदार किस तरह यह तय करे कि कौन से माप की कमीजे अधिक मात्रा में मंगवाये।
- 20 व्यक्तियों के लिए चावल की खरीददारी।
- आपके घर के दरवाजों की ऊँचाई ज्ञात करना।

हल: पहले प्रश्न में मान लो दुकानदार 4 तरह (माप) की कमीजों की बिक्री फरवरी माह में इस प्रकार है।

कमीज का माप	संख्या
M	15
L	18
XL	40
XXL	22
कुल	92

दुकानदार द्वारा बेची गई औसत कमीजों की संख्या = $\frac{12+18+40+22}{4} = 23$ कमीज

(a) इस परिस्थिति में क्या दुकानदार प्रत्येक माप की 23 कमीजें मंगवायेगा? वह दत्तों का फिर से निरीक्षण करेगा। उसे पता चलता है कि XL माप की कमीजें अधिक संख्या में बिकती हैं। यदि वह प्रत्येक माप की 23 कमीजें मंगवाता है तो उसे XL माप की कमीजों की कमी होगी, इसलिए वह सोचेगा कि XL माप की कमीजें ही अधिक संख्या में मंगवाई जायें और बाकी कमीजें कम संख्या में। इसलिए दुकानदार इस परिस्थिति में बहुलक का उपयोग करके निर्णय लेगा।

(b) हमें यह पता नहीं है कि कौन अधिकतम खाता है और कौन न्यूनतम। इस परिस्थिति में यदि हम अधिक खाने वाले के हिसाब से 20 गुणा चावल लें तो बच सकता है, यदि हम कम चावल खाने वाले व्यक्ति के हिसाब से 20 गुणा खरीदें तो चावल कम पड़ जायेगा। इसलिए इस प्रश्न में बहुलक का उपयोग करना सही नहीं होगा।

(c) यदि घर के व्यक्तियों की ऊँचाई क्रमशः 134 से.मी., 125 से.मी., 100 से.मी., 125 से.मी. और 144 से.मी. तो दत्तों का बहुलक 125 होगा और हम यह राय देंगे कि घर के दरवाजों की ऊँचाई 125 से.मी. हो। यदि हम 5 व्यक्तियों की ऊँचाइयों का मध्यमान भी ज्ञात करें तो वह 144 नहीं हो सकता। इसलिए यदि हम मध्यमान भी ज्ञात करें तो भी सभी व्यक्तियों के लिए कठिन होगा। इस प्रश्न में हम न तो मध्यमान को उपयोगी बता सकते हैं, न ही बहुलक को।



प्रयत्न करो:

1. एक ऐसा उदाहरण दीजिए जहाँ मध्यमान प्रतिनिधित्व मान हो।
2. एक ऐसा उदाहरण दीजिए जहाँ बहुलक प्रतिनिधित्व मान हो।



अभ्यास - 2

1. एक लंबकूद में 7 विद्यार्थियों का प्रदर्शन इस प्रकार रहा। 98 से.मी., 125 से.मी., 140 से.मी., 155 से.मी., 174 से.मी., 140 से.मी., 155 से.मी., इन दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए।
2. क्रिकेट टीम के सदस्यों की आयु है - 25, 26, 25, 27, 28, 30, 31, 27, 33, 27, 29 है (i) दत्तों का मध्यमान एवं बहुलक ज्ञात करो (ii) कितने खिलाड़ियों को और जोड़ सकते हैं जिससे कि दत्तों का बहुलक बदल जाये (जोड़े गये खिलाड़ियों की आयु क्या होनी चाहिए)
3. निम्नलिखित दत्तों का बहुलक ज्ञात कीजिए - 12, 24, 36, 46, 25, 38, 72, 36, 25, 38, 12, 24, 46, 25, 12, 24, 46, 25, 72, 12, 24, 36, 25, 38 और 36.
4. नीचे प्रश्नों में मध्यमान या बहुलक का उपयोग करना चाहिए या नहीं निर्णय लीजिए।
 - (i) एक दुकानदार विभिन्न प्रकार के मंजन बेचता है और यह निर्णय लेने की सोच रहा है कि किस प्रकार के मंजन अधिक संख्या में खरीदे जायें।



- (ii) यदि अध्यापक परीक्षा कक्ष में समुचित उत्तर पुस्तिकाएँ लाना चाहता है।
- (iii) यदि शादी-विवाह के लिए बनाये जाने वाले लड्डुओं की संख्या
- (iv) अपनी कक्षा के लोगों के पसंदीदा क्रिकेटर को जानने के लिए।

7.5 माध्यिका (Median)

माध्यिका अभी तक मध्यमान एवं बहुलक को प्रतिनिधित्व मान के रूप में देखा गया है। आइए, अब इनके अलावा अन्य परिस्थिति में इन्हें जाने।

मैनेजर	-	₹ 40,000
मजदूर 1	-	₹ 3,300
मजदूर 2	-	₹ 5,000
मजदूर 3	-	₹ 4,000
मजदूर 4	-	₹ 4,200
मजदूर 6	-	₹ 4,500
मजदूर 7	-	₹ 4,200
मजदूर 8	-	₹ 4,300
मजदूर 9	-	₹ 3,500
मजदूर 10	-	₹ 3,500



क्या हम वेतन के मध्यमान या बहुलक के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं?

आइए, इस वेतन का मध्यमान ज्ञात करें।

$$\text{वेतन का मध्यमान} = \frac{\text{कुल वेतन}}{\text{मजदूरों की संख्या}}$$

$$= \frac{3300 + 5000 + 4000 + 4200 + 3500 + 4500 + 4200 + 4300 + 3500 + 3500 + 40000}{11}$$

$$= ₹ 7272.72$$

क्या यह वेतन मैनेजर या मजदूरों के वेतन का प्रतिनिधित्व करता है? नहीं, यह मैनेजर के वेतन से बहुत कम है तथा मजदूरों के वेतन से कहीं अधिक है।

आइए प्रतिनिधित्व मान ज्ञात करने की अन्य विधि देखें।

इन संख्याओं को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

3300, 3500, 3500, 3500, 4000, 4200, 4200, 4300, 4500, 5000, 40000

अर्थात्, दोनों ओर 5 संख्याओं का समूह है। इनमें से 5 कर्मचारी ₹ 4200 से कम और अन्य 5 कर्मचारी ₹ 4200 से अधिक कमाते हैं।

इस संख्या (4200) को 'माधिका' कहते हैं।

उपरोक्त उदाहरण में दत्तों की संख्या 11 है। इसलिए दिये गये दत्तों को दो समान समूहों में बांटती है।

आइए यह ज्ञात करे जब दिये हुए दत्तों की संख्या सम हो।

मान लो उपरोक्त उदाहरण में और एक मजदूर को जोड़ लिया जाये जिसकी वेतन 4000 है।

अब दत्तों का आरोही क्रम

3300, 3500, 3500, 3500, 4000, 4200, 4200, 4300, 4500, 5000, 40000

यहाँ पर मध्य भाग में दो दत्त हैं। (4000 और 4200)

इसलिए इस परिस्थिति में माधिका ज्ञात करने के लिए हम 4000 और 4200 का औसत लेना होगा।

$$\text{अर्थात् वेतन की माधिका} = \frac{4000 + 4200}{2} = ₹ 4100.$$

उदा 8 : 7 स्नातकों (ग्रजूएटों) का मासिक वेतन ₹ 8000, ₹ 9000, ₹ 8200, ₹ 7900,

₹ 8500, ₹ 8600 और ₹ 60000. हो तो उनके वेतन की माधिका वेतन ज्ञात करो

हल: स्नातकों का वेतन आरोही क्रम में 7900, 8000, 8200, 8500, 8600, 9000, 60000

परीक्षणों की संख्या = 7

मध्यपद (चौथा पद) = 8500

माधिका वेतन = ₹ 8500

उदा 10 : 49, 48, 15, 20, 28, 17, 14 और 110 की माधिका ज्ञात करो।

हल : आरोही क्रम = 14, 15, 17, 20, 28, 48, 49, 110

परीक्षणों की संख्या = 8

मध्य-पद(चौथा-और पाँचवा पद) 20 और 28

$$\text{माध्यिका 4वें एवं 5वें पद का औसत} = \frac{20+28}{2} = 24$$

इसलिए माध्यिका 24 है।



अभ्यास - 3

क्यों सत्य असत्य है बताइए।

- 1) किन्हीं दत्तों में सबसे बड़े और सबसे छोटे निरीक्षण को मध्यमान कहते हैं।
 - i) सोपान आलेख में सबसे बड़े स्तंभ को बहुलक कहते हैं।
 - ii) माध्यिका ज्ञात करते समय दत्तों के प्रत्येक निरीक्षण मान को लिया जाता है।
 - iii) चार संख्याओं (दत्तों) की माध्यिका दिये हुए दत्तों की एक संख्या होती है।
- 2) एक गाँव में 7 परिवारों की मासिक आय 1200, 1500, 1400, 1000, 1000, 1600, 10000 है।
 - i) परिवारों की आय की माध्यिका ज्ञात कीजिए
 - ii) यदि एक और परिवार जिसकी मासिक आय 1500 हो, उसे जोड़ा जाए तो अब माध्यिका क्या होगी?
3. कुछ दत्तों का परीक्षण 16, 72, 0, 55, 65, 55, 10 और 41 है। चैतन्या से शून्य '0' को छोड़कर शेष निरीक्षणों के बहुलक और माध्यिका ज्ञात की। क्या चैतन्या ने सही किया?
- 4) तीन धनात्मक पूर्णांकों के कितने विभिन्न समुच्चय बनाये जा सकते हैं? जिसका मध्यमान 6 और माध्यिका 7 हो और बहुलक न हो,
- 5) 3, 4, 5, 5 और 8 में चार पूर्णांकों को जोड़ा गया। यदि इन दत्तों के मध्यमान, माध्यिका और बहुलक में 1 जोड़ा जाये हो इन पूर्णांकों में सबसे बड़ा पूर्णांक कौनसा होगा।

खेल खेलो :

एक पासा लो जिसके फलक पर अंक लिखे हैं। अब तीन छात्रों का एक समूह बनाओ और हर छात्र को पासा जमीन पर डालने के लिये कहो। सभी छात्रों



द्वारा पासा की संख्याएँ नोट करो। प्रत्येक छात्र इस क्रिया को 10 बार करेगा। इस प्रकार प्रत्येक छात्र की 10 संख्याएँ होंगी। अन्त में इन दत्तों का मध्यमान, माध्यिका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए।

7.6 दत्तों को दर्शाना :

हमने पिछली कक्षा में पढ़ा है कि दत्तों को किस प्रकार सोपान आलेख द्वारा दर्शाया जाता है। चित्रलेखन द्वारा वस्तुओं को चित्रों द्वारा दर्शाया जाता है। चित्रलेखन आलेख द्वारा दत्तों को दर्शाना अधिक समय के साथ-साथ कठिन भी होता है,

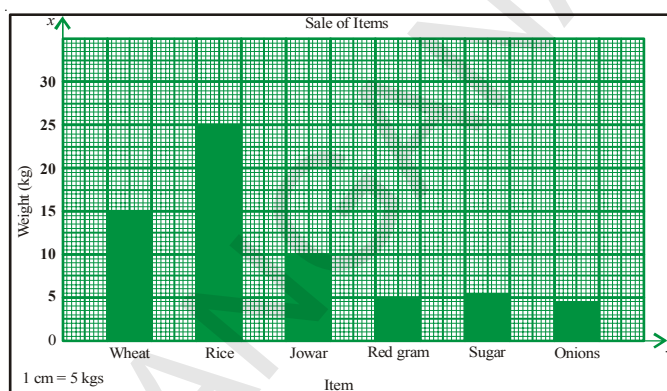
इसलिए सोपान आलेख द्वारा दत्तों को दर्शाना काफी सरल प्रक्रिया है।

7.6.1 सोपान आलेख (Bar Graph)

इस भाग में हम सोपान आलेख को आसानी से समझने का प्रयास करेंगे। हम जानते हैं कि सोपान आलेख एक ही चौड़ाई वाले स्तंभ क्षितिजीय या उर्ध्वाधर रूप में एक दूसरे से समान दूरी पर होते हैं। प्रत्येक स्तंभ की लम्बाई किसी विशेष दत्त की बारंबारिता को दर्शाती है। इन स्तंभों की लम्बाई के लिए भी एक पैमाना लिया जाता है।

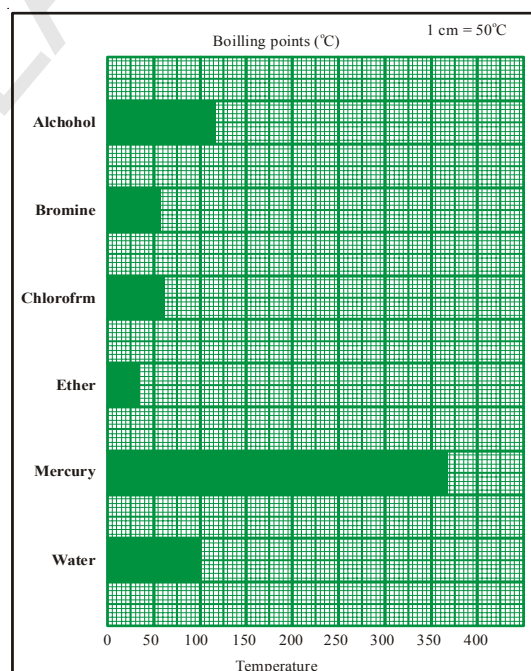
उदाहरण 10 : उपरोक्त सोपान आलेख एक दुकान में बेची जाने वाली विभिन्न वस्तुओं की बिक्री दर्शाता है।

- x-अक्ष और y-अक्ष पर क्या लिया गया है?
- y-अक्ष पर कौन सा पैमाना है?
- इनमें से किसकी अधिक बिक्री हुई है और कितनी?
- क्या प्याज की बिक्री चने की बिक्री से अधिक है?
- जवार और चने की बिक्री का अनुपात क्या है?



उदाहरण 11 : सोपान आलेख का निरीक्षण करो।

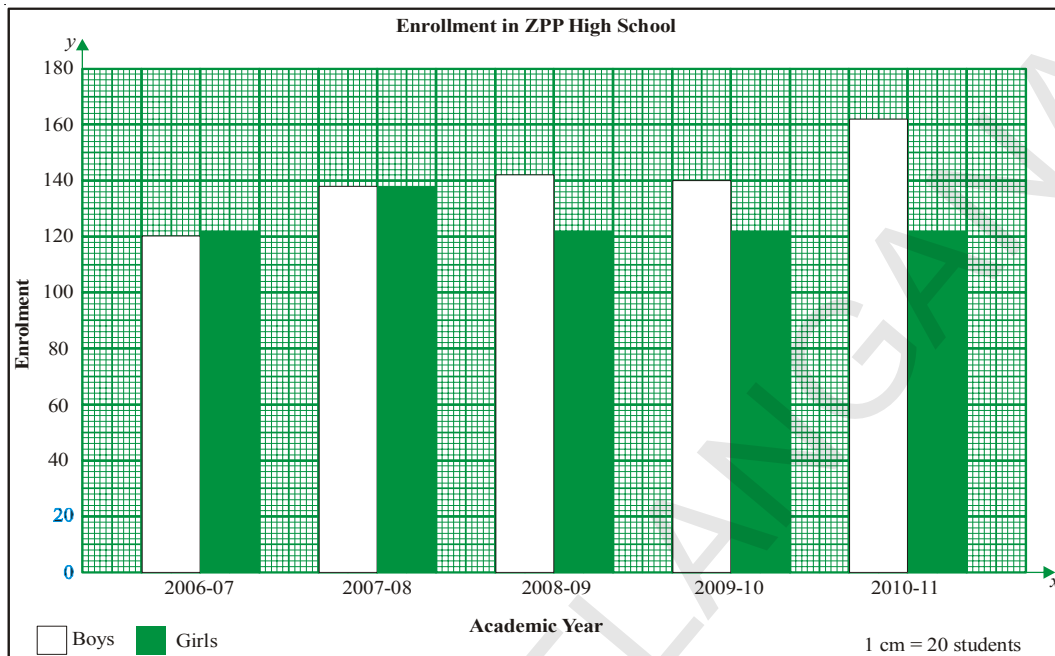
- यह अलेख किसकी जानकारी दे रहा है?
- x-अक्ष और y-अक्ष पर क्या लिया गया है?
- निम्न लिखित द्रवों में किस द्रव का क्वथनांक अधिक है?
- किस द्रव का क्वथनांक सबसे कम है?
- पारा और ईथर के क्वथनांक में क्या अनुपात है?



7.6.2 द्विसोपान आलेख (Double Bar Graph)

आइए, अब अन्य प्रकार के सोपान आलेख देखें।

उदाहरण 13 : इस आलेख में जिला परिषद स्कूल में सत्र के अनुसार विद्यार्थियों की संख्या को दर्शाया गया है। इस आलेख पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



उपरोक्त आलेख में प्रत्येक सत्र में दो-दो स्तंभ हैं। ये क्या दर्शाते हैं? इस प्रकार के आलेख को द्विसोपान आलेख कहते हैं। यह दो निरीक्षणों को एक साथ दर्शाता है।

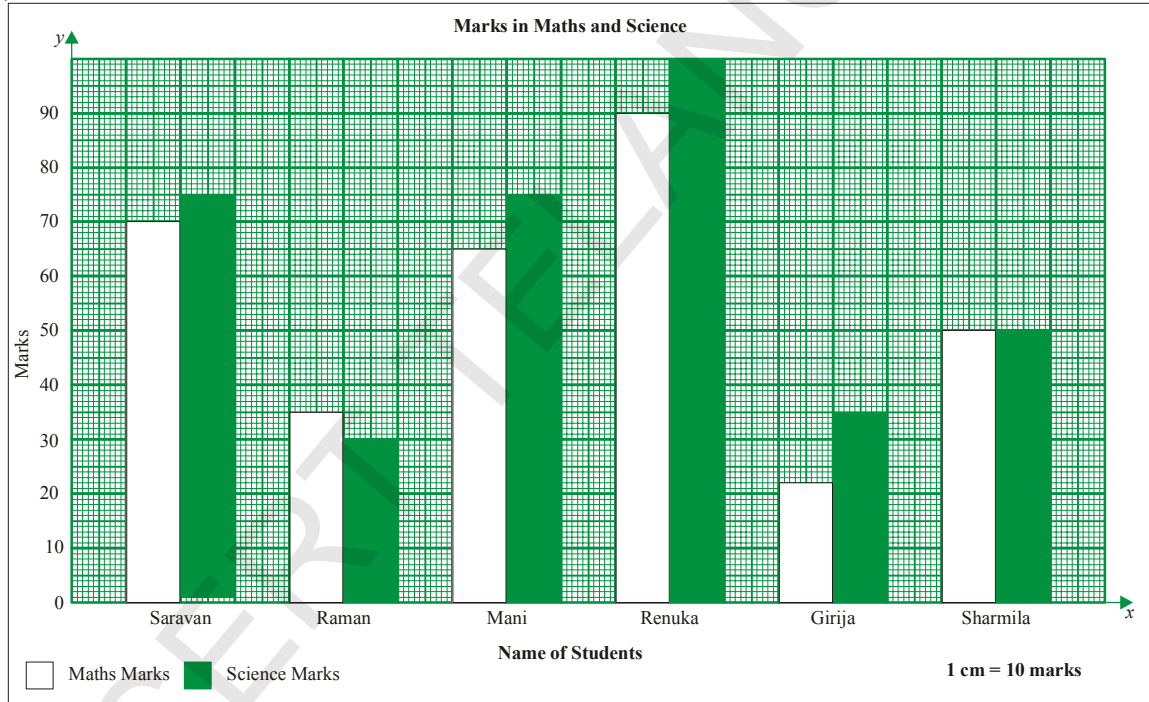
- किस वर्ष विद्यालय में लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से अधिक रही?
- किस वर्ष विद्यालय में लड़कों एवं लड़कियों की संख्या समान रही?
- किस वर्ष में लड़कियों की संख्या न्यूनतम रही?
- सत्र 2007-08 में विद्यालय में कुल विद्यार्थियों की संख्या क्या थी?

उदाहरण : सातवीं कक्षा के पाँच विद्यार्थियों के गणित और विज्ञान विषय के अंक तालिका में दिये गये हैं। इन दत्तों को द्विसोपान आलेख द्वारा दर्शाइए।

छात्र का नाम	गणित	विज्ञान
श्रवण	70	75
रमन	35	30
मणि	65	75
रेणुका	90	100
गिरिजा	22	35
शर्मिला	50	50

हल: द्विसोपान आलेख की रचना के पद

1. ग्राफ पेपर पर x -अक्ष (क्षितिजीय) और y -अक्ष (ऊर्ध्वाधर) बनाओ। वे आपस में '0' बिन्दु पर मिलते हैं।
2. अक्ष पर विद्यार्थियों के नाम लिखिए।
3. गणित और विज्ञान विषय के अंक y -अक्ष पर लें।;
4. y -अक्ष के लिए उचित पैमाना लीजिए, ताकि दोनों विषयों के अंक आसानी से लिये जा सकें। अंक y -अक्ष पर 100, इस तरह प्रति 1 से.मी. = 10 अंक के लगभग होगा
5. अंक को 10 से भाग देकर प्रत्येक स्तम्भ की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
6. गणित और विज्ञान के अंकों को साथ-साथ स्तम्भों द्वारा प्रदर्शित करो:

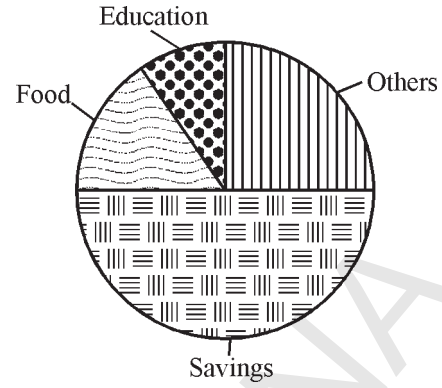


7.6.3 पाई चित्र/चार्ट (Pie Chart)

एक परिवार का मासिक बजट एक तालिका द्वारा प्रदर्शित किया गया है। इस दत्त को पाई तालिका द्वारा दर्शाया गया है।

यदि खर्च अधिक होगा तो वह पाई चार्ट में अधिक स्थान घरेगा।

बजट	खर्च
भोजन	1500
पढ़ाई	750
अन्य	2250
बचत	4500
कुल आय	9000



उपरोक्त पाई चित्र को देखकर निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

- पाई चित्र की आकृति किस प्रकार होती है?
- पाई चित्र में प्रत्येक आकृति को दर्शाने वाले भागों के नाम क्या हैं?
- हाँ या नहीं में उत्तर दीजिए। (a) कुल आय का अधिकतर भाग बचत में जाता है।
(b) कुल आय का न्यूनतम भाग पढ़ाई के लिए खर्च होता है।

7.6.4 पाई चार्ट (तालिका) की रचना

आइए, ज्ञात करें कि किस प्रकार पाई चार्ट की रचना की जाती है।

पाई चार्ट में कुल आय को प्रत्येक मद वृत्त के हिस्से में दर्शाया जाता है।

हम जनते हैं कि वृत्त का कोण 360° होता है। मान लो कुल आय (₹.9000) के प्रत्येक मद (हिस्से) को इस वृत्त की सहायता से दर्शाना है।

खर्च का प्रत्येक कारण, कुल आय का हिस्सा है इसलिए वृत्तखण्ड का कोण या वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल, प्रत्येक मद और कुल आय के अनुपात पर निर्भर करता है।

$$\text{इसलिए प्रत्येक भाग का कोण} = \frac{\text{कुल खर्च}}{\text{कुल आय}} \times 360$$

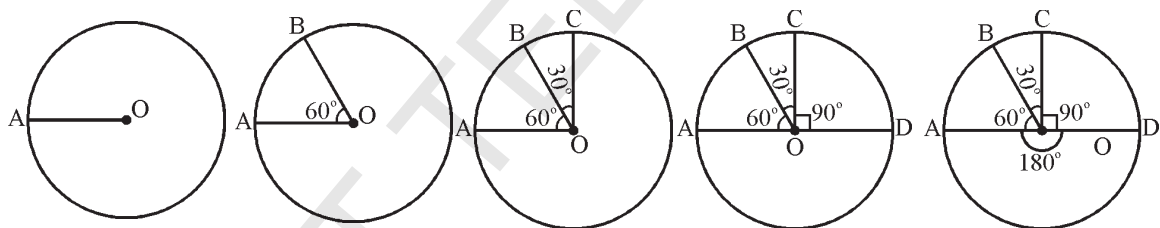
वृत्तखण्ड के कोण जानने के लिए हम एक तालिका बनायेंगे। इसकी रचना के चरण निम्न प्रकार से हैं-

- सुविधानुसार किसी भी त्रिज्या का वृत्त बनाइए। मान लो 'O' केन्द्र है।
- सुविधानुसार वृत्त की परिधि पर एक बिन्दु 'A' बनाइए, उससे वृत्त केन्द्र 'O' से जोड़िए। यह रेखा 'OA' बनेगी।
- भोजन के लिए वृत्तखण्ड का कोण 60° बनाइए। $\angle AOB = 60^\circ$

4. पढ़ाई के लिए वृत्त खण्ड के कोण 30° बनाइए। $\angle BOC = 30^\circ$
5. अन्य खर्चों के लिए वृत्तखण्ड के कोण 90° $\angle COD = 90^\circ$
6. अब $\angle DOA = 180^\circ$ होगा जो कि बचत के लिए कोण है।

बजट मद	खर्च	खर्च और कुल आय का अनुपात	वृत्तखण्ड का कोण या वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल
भोजन	1500	$\frac{1500}{9000} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ$
शिक्षा	750	$\frac{750}{9000} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12} \times 360^\circ = 30^\circ$
अन्य	2250	$\frac{2250}{9000} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$
बचत	4500	$\frac{4500}{9000} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$

नोट : जाँच कीजिए कि क्या वृत्तखण्ड के सभी कोणों का योग 360° है?



अभ्यास - 4

1. निम्न दत्तों का सोपान आलेख बनाइए।
क्रमगत वर्षों में भारत की जनगणना वर्ष नीचे तालिका में दी गई है।

वर्ष	1941	1951	1961	1971	1981	1991	2001
जनसंख्या	320	360	440	550	680	850	1000

जनसंख्या (लगभग) 1991 और 2001 जनगणना के आधार पर है।

2. निम्न दत्तों को पाई चार्ट द्वारा दर्शाइए।

विभिन्न खर्च	भोजन	चिकित्सा	वस्त्र	शिक्षा	बचत
राशी	₹ 3750	₹ 1875	₹ 1875	₹ 1200	₹ 7500

3. निम्न दत्तों के द्विसोपान आलेख बनाइए।
वर्ष 1999 में राज्यों में जन्म और मृत्यु दर इस प्रकार है।

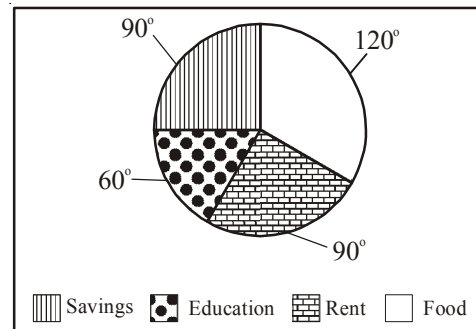
राज्य	जन्म दर	मृत्यु दर (प्रति 1000 पर)
आन्ध्र प्रदेश	22	8
कर्नाटक	22	8
तमिलनाडु	19	8
केरल	18	6
महाराष्ट्र	21	8
उड़ीसा	24	11

स्रोत: यह तालिका SRS 1999 की विटल सांख्यिकी से ली गई हैं।

4. निम्न दत्तों को पाई चार्ट द्वारा दर्शाइए
बालक की प्रतिदिन क्रियाओं का ब्यौरा इस प्रकार है।

प्रतिदिन क्रियाएँ	निद्रा	विद्यालय	खेलने	अन्य
समय	8 घंटे	6 घंटे	2 घंटे	8 घंटे

5. दिये गये चित्र में परिवार द्वारा एक महीने भर में होने वाले खर्च का विवरण दिया गया है। खर्च को कोणों के रूप में दर्शाया गया है। इसी पर आधारित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



- किस मद (वस्तु) पर खर्च न्यूनतम है?
- किस मद पर खर्च सबसे अधिक है?
- यदि परिवार की मासिक आय ₹ 9000 हो तो किराये पर खर्च क्या होगा?
- यदि परिवार का भोजन पर खर्च ₹ 3000 हो तो शिक्षा पर होने वाला खर्च क्या है?



परियोजना कार्य

1. अपने घर के आस-पास विभिन्न प्रकार के घरों के विवरण लीजिए और उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।
2. अपने परिवार द्वारा विभिन्न प्रकार के खर्चों को पाई चार्ट द्वारा दर्शाइए।
3. विविध समाचार पत्रों, पत्रिकाओं आदि में दिये गये आलेखों व पाई चार्टों को एकत्रित कर उन्हें स्कूल के सूचना बोर्ड पर दर्शाइए।



मुख्यांश

- मध्यमान, बहुलक एवं माधिका दत्तों को प्रतिनिधित्व मान हैं।
- दत्तों के समुच्चय को जोड़कर निरीक्षणों की संख्या से भाग देने पर मध्यमान प्राप्त होता है जो कि दत्तों के न्यूनतम एवं अधिकतम मान के बीच होता है।
- दत्तों में जिस निरीक्षणों की संख्या अधिक होती है, उसे बहुलक कहते हैं। दत्तों का बहुलक एक या एक से अधिक या कभी नहीं भी होता है।
- दत्तों के निरीक्षणों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद बीच वाले परीक्षण को माधिका कहते हैं। (निरीक्षणों की संख्या सम होने पर बीच के दो परीक्षणों के मध्यमान, माधिका कहलाती है।
- पाई चार्ट एक वृत्ताकार चार्ट होता है जो कि वृत्तखंडों में विभजित होता है।
- उसका उपयोग दत्तों को प्रदर्शित करने के लिए किया जाता है। प्रत्येक पाई चार्ट में प्रत्येक वृत्तखण्ड का कोण उसके द्वारा दर्शाई गई मात्रा के समानुपाती होता है।

डॉ. सी. आर. राव (भारत)
सन् 1920 ई.

एक प्रसिद्ध सांख्यिकी ज्ञाता जो अपने अनुमान के सिद्धांत (1945) के लिए प्रसिद्ध हुए। उन्होंने क्रेमर-राव असमानता (Cramer-Rao Inequality) और फिशर-राव प्रमेय (Fisher-Rao theorem) पर कार्य किया।

