1. **ધન પૂર્ણાંક n માટે, $(1-i)^n \left(1-\frac{1}{i}\right)^n$ ની કિંમત મેળવો.**

➡ આપેલ બહુપદી $= (1-i)^n \left(1-\frac{1}{i}\right)^n$

$= (1-i)^n (i-1)^n \cdot i^{-n} = (1-i)^n (1-i)^n (-1)^n \cdot i^{-n}$

$= [(1-i)^2]^n (-1)^n \cdot i^{-n} = (1+i^2-2i)^n (-1)^n\ i^{-n}$ [$\because\ i^2 = -1$]

$= (1-1-2i)^n (-1)^n\ i^{-n} = (-2)^n \cdot i^n\ (-1)^n\ i^{-n}$

$= (-1)^{2n} \cdot 2^n = 2^n$

2. **$\sum_{n=1}^{13} \left(i^n + i^{n+1}\right)$, જ્યાં $n \in N$ નું મૂલ્ય મેળવો.**

➡ અહીં $\sum_{n=1}^{13} \left(i^n + i^{n+1}\right)$, $n \in N$

$= (i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} +$
$i^{11} + i^{12} + i^{13}) + (i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7$
$+ i^8 + i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13} + i^{14})$

$= (i + 2i^2 + 2i^3 + 2i^4 + 2i^5 + 2i^6 + 2i^7 + 2i^8 + 2i^9 + 2i^{10} + 2i^{11} + 2i^{12} + 2i^{13} + i^{14})$

$= i - 2 - 2i + 2 + 2i + 2(i^4)i^2 + 2(i)^4 i^3 + 2(i^2)^4 + 2(i^2)^4 i + 2(i^2)^5 + 2(i^2)^5 \cdot i + 2(i^2)^6 + 2(i^2)^6 \cdot i + (i^2)^7$

$= i - 2 - 2i + 2 + 2i - 2 - 2i + 2 + 2i - 2 - 2i + 2 + 2i - 1$

$= i - 1$

અન્ય રીત :

$\sum_{n=1}^{13} \left(i^n + i^{n+1}\right)$, $n \in N = \sum_{n=1}^{13} i^n (1+i)$

$= (1+i)[i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13}]$

$= (1+i)[i^{13}]$ [$\because\ i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$, જ્યાં $n \in N$ *i.e.,* $\sum_{n=1}^{12} i^n = 0$

$= (1+i)i$ [$\because\ (i^4)^3 \cdot i = i$]

$= (i^2 + i) = i - 1$

3. **જો $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = x + iy$ હોય, તો (x, y) મેળવો.**

➡ અહીં, $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = x + iy$ ....(i)

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = \frac{1+i^3+3i(1+i)}{1-i^3-3i(1-i)} = \frac{1-i+3i+3i^2}{1+i-3i+3i^2}$

$= \frac{2i-2}{-2i-2} = \frac{i-1}{-i-1} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i^2-2i}{1+1} = \frac{1-1-2i}{2}$

$\therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = -i$ ....(ii)

આજ પ્રમાણે, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = \frac{-1}{i} = \frac{i^2}{i} = i$ ....(iii)

પરિણામ (i) અને (ii) પરથી નીચેનું પરિણામ મળે.

$-i - i = x + iy$

$\therefore 0 + -2i = x + iy$

હવે વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગ સરખાવતાં,

$x = 0$ અને $y = -2$

આમ, $(x, y) = (0, -2)$

4. જો $\frac{(1+i)^2}{2-i} = x + iy$ હોય, તો $x + y$ નું મૂલ્ય મેળવો.

➡ અહીં $\frac{(1+i)^2}{2-i} = x + iy$ આપેલ છે.

$\therefore \frac{(1+i^2+2i)}{2-i} = x + iy \Rightarrow \frac{2i}{2-i} = x + iy$

$\therefore \frac{2i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = x + iy \Rightarrow \frac{4i+2i^2}{4-i^2} = x + iy$

$\therefore \frac{4i-2}{4+1} = x + iy \Rightarrow \frac{-2}{5} + \frac{4i}{5} = x + iy$

બંને તરફ વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગ સરખાવો.

$\therefore x = -\frac{2}{5}$ અને $y = \frac{4}{5}$ મળે.

$\therefore x + y = \frac{-2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

5. જો $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} = a + ib$ હોય, તો (a, b) મેળવો.

➡ અહીં, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100} = a + ib$

$\therefore \left[\frac{(1-i)}{(1+i)} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)}\right]^{100} = a + ib \Rightarrow \left(\frac{1+i^2-2i}{1-i^2}\right)^{100} = a + ib$

$\therefore \left(\frac{-2i}{2}\right)^{100} = a + ib$ $[\because i^2 = -1]$

$\therefore (i^4)^{25} = a + ib \Rightarrow 1 + io$ $[\because i^4 = 1]$

$a = 1$ અને $b = 0$

$\therefore (a, b) = (1, 0)$

6. જો $(1+i)z = (1-i)\bar{z}$ હોય, તો બતાવો કે $z = -i\bar{z}$.

➡ અહીં $(1+i)z = (1-i)\bar{z}$ $\therefore \frac{z}{\bar{z}} = \frac{(1-i)}{(1+i)}$

$\therefore \frac{z}{\bar{z}} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} = \frac{1+i^2-2i}{1-i^2}$ $[\because i^2 = -1]$

$\therefore \dfrac{z}{\overline{z}} = \dfrac{1-1-2i}{2} \Rightarrow \dfrac{z}{\overline{z}} = -i$

$\therefore z = -i\overline{z}$

જે માંગેલ પરિણામ છે.

7. જો $z = x + iy$ હોય તો સાબિત કરો કે $z\overline{z} + 2(z + \overline{z}) + b = 0$ વર્તુળ દર્શાવે છે. જ્યાં $b \in R$.

➡ અહીં $z = x + iy$ આપેલ છે.

$\therefore \overline{z} = x - iy$ (અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા)

હવે $z\overline{z} + 2(z + \overline{z}) + b = 0$

$\therefore (x + iy)(x - iy) + 2(x + iy + x - iy) + b = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + 4x + b = 0$ જે વર્તુળનું સમીકરણ છે.

8. જો $a = \cos\theta + i\sin\theta$ હોય, તો $\dfrac{1+a}{1-a}$ મેળવો.

➡ અહીં, $a = \cos\theta + i\sin\theta$

$\therefore \dfrac{1+a}{1-a} = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$

$= \dfrac{1+2\cos^2\theta/2 - 1 + 2i\sin\theta/2\cdot\cos\theta/2}{1-1+2\sin^2\theta/2 - 2i\sin\theta/2\cdot\cos\theta/2} = \dfrac{2\cos\theta/2\,(\cos\theta/2 + i\sin\theta/2)}{2\sin\theta/2\,(\sin\theta/2 - i\cos\theta/2)}$

$= -\dfrac{2\cos\theta/2\,[\cos\theta/2 + i\sin\theta/2]}{2i\sin\theta/2\,[\cos\theta/2 + i\sin\theta/2]} = -\dfrac{1}{i}\cot(\theta/2)$

$= \dfrac{+i^2}{i}\cdot\cot(\theta/2) = i\cot(\theta/2) \qquad \left[\because \dfrac{-1}{i} = \dfrac{i^2}{i}\right]$

9. સંકર સંખ્યા $\dfrac{\overline{z}+2}{\overline{z}-1}$ નો વાસ્તવિક ભાગ 4 છે. તો બતાવો કે z નો બિંદુપથ વર્તુળ થાય.

➡ ધારો કે $z = x + iy$

હવે $\dfrac{\overline{z}+2}{\overline{z}-1} = \dfrac{x-iy+2}{x-iy-1}$

$= \dfrac{[(x+2)-iy][(x-1)+iy]}{[(x-1)-iy][(x-1)+iy]}$

$= \dfrac{(x-1)(x+2) - iy(x-1) + iy(x+2) - y^2}{(x-1)^2 + y^2}$

$= \dfrac{(x-1)(x+2) + y^2 + i[(x+2)y - (x-1)y]}{(x-1)^2 + y^2} \quad [\because -i^2 = 1]$

અહીં વાસ્તવિક ભાગ લેતાં, $\dfrac{(x-1)(x+2)+y^2}{(x-1)^2 + y^2} = 4$

$\therefore x^2 - x + 2x - 2 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2)$

$\therefore 3x^2 + 3y^2 - 9x + 6 = 0$, જે વર્તુળ દર્શાવે છે.

આમ, આર્ગન્ડ આકૃતિમાં z એ વર્તુળ પર છે.

10. જો સંકર સંખ્યા z એ $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ નું સમાધાન કરે તો બતાવો કે તે વર્તુળ પર છે તેમ બતાવો.

➡ ધારો કે $z = x + iy$

$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \pi/4$ આપેલ છે.

$\therefore \arg(z-1) - \arg(z+1) = \pi/4$

$\therefore \arg(x+iy-1) - \arg(x+iy+1) = \pi/4$

$\therefore \arg(x-1+iy) - \arg(x+1+iy) = \pi/4$

$$\therefore \tan^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+1}\right) = \pi/4$$

$$\therefore \tan^{-1}\left[\frac{\frac{y}{x-1} - \frac{y}{x+1}}{1+\left(\frac{y}{x-1}\right)\left(\frac{y}{x+1}\right)}\right] = \pi/4$$

$$\therefore \frac{y\left[\frac{x+1-x+1}{x^2-1}\right]}{\frac{x^2-1+y^2}{x^2-1}} = \tan\pi/4$$

$$\therefore \frac{2y}{x^2+y^2-1} = 1$$

$\therefore x^2 + y^2 - 1 = 2y$

$\therefore x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ જે વર્તુળ દર્શાવે છે.

11. સમીકરણ ઉકેલો : $|z| = z + 1 + 2i$.

➡ આપેલ સમીકરણ $|z| = z + 1 + 2i$ ....(i)

ધારો કે $z = x + iy$

$|x + iy| = x + iy + 1 + 2i$ ($\because$ પરિણામ (i) પરથી)

$\therefore \sqrt{x^2+y^2} = x + iy + 1 + 2i$ $\left[\because |z| + \sqrt{x^2 = y^2}\right]$

$\therefore \sqrt{x^2+y^2} = (x+1) + i(y+2)$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$\therefore x^2 + y^2 = (x+1)^2 + i^2(y+2)^2 + 2i(x+1)(y+2)$

$\therefore x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 - y^2 - 4y - 4 + 2i(x+1)(y+2)$

હવે વાસ્તવિક અને કાલ્પનિક ભાગ સરખાવો,

$\therefore x^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 - y^2 - 4y - 4$

અર્થાત્ $2y^2 = 2x - 4y - 3$ ....(ii)

અને $2(x+1)(y+2) = 0$

$(x+1) = 0$ અથવા $(y+2) = 0$

$\therefore x = -1$ અથવા $y = -2$

$x = -1$ માટે

$2y^2 = -2 - 4y - 3$ મળે.

$2y^2 + 4y + 5 = 0$ ($\because$ સમી. (ii) પરથી)

$$\therefore y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 2\times 4\times 5}}{4}$$

$$\therefore y = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{4} \notin R$$

$y = -2$ હોય તો

$\therefore 2(-2)^2 = 2x - 4(-2) - 3$ ($\because$ સમી. (ii) પરથી)

$\therefore 8 = 2x + 8 - 3$

$\therefore\ 2x = 3 \Rightarrow x = 3/2$

$\therefore\ z = x + iy = 3/2 - 2i$