अध्याय 7

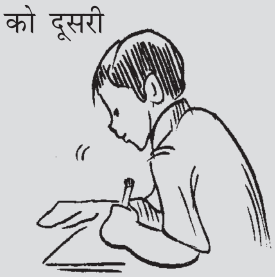
त्रिभुजों की सर्वांगसमता

7.1 भूमिका

अब आप एक बहुत ही महत्त्वपूर्ण ज्यामितीय संकल्पना 'सर्वांगसमता' को सीखने जा रहे हैं। विशेषकर, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता के बारे में बहुत कुछ पढ़ेंगे। सर्वांगसमता को समझने के लिए, हम कुछ क्रियाकलाप करेंगे।

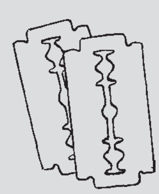
इन्हें कीजिए

एक ही प्रकार (denomination) की दो टिकटें लीजिए (आकृति 7.1)। एक टिकट को दूसरी पर रखिए। आप क्या देखते हैं ?

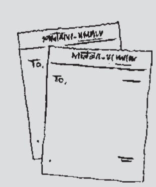


आकृति 7.1

एक टिकट दूसरे को पूर्णतया ढक लेती है। इसका अर्थ यह है कि दोनों टिकटें एक ही आकार और एक ही माप की हैं। ऐसी वस्तुएँ सर्वांगसम कहलाती हैं। आपके द्वारा प्रयोग की गई दोनों टिकटें एक दूसरे के सर्वांगसम हैं। सर्वांगसम वस्तुएँ एक दूसरे की हू-ब-हू प्रतिलिपियाँ होती हैं।



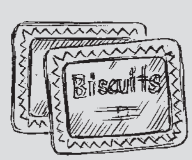
(i)



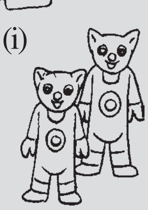
(ii)

क्या अब, आप, बता सकते हैं कि निम्न वस्तुएँ सर्वांगसम हैं या नहीं?

1. एक ही कंपनी के शेविंग ब्लेड [आकृति 7.2 (i)]
2. एक ही लेटर पैड की शीटें [आकृति 7.2 (ii)]
3. एक ही पैकट के बिस्कुट [आकृति 7.2 (iii)]
4. एक ही साँचे से बने खिलौने [आकृति 7.2 (iv)]



(iii)

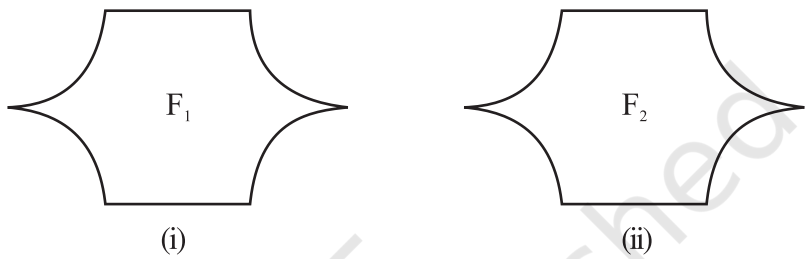


आकृति 7.2 (iv)

दो वस्तुओं के सर्वांगसम होने के संबंध को **सर्वांगसमता** कहते हैं। इस अध्याय में, हम केवल तल में बनी आकृतियों की चर्चा करेंगे यद्यपि सर्वांगसमता एक साधारण विषय है जिसका उपयोग हम त्रिआयामी (3-Dimensional) आकारों के लिए भी करते हैं। अब हम तल में बनी ऐसी आकृतियों की सर्वांगसमता का विधिपूर्वक अर्थ जानने की कोशिश करेंगे जिन्हें हम पहले से जानते हैं।

7.2 तल-आकृतियों की सर्वांगसमता

यहाँ दी गई दो आकृतियों को देखिए (आकृति 7.3)। क्या ये आकृतियाँ सर्वांगसम हैं?



आकृति 7.3

आप अध्यारोपण विधि का प्रयोग कर सकते हैं। इनमें से एक का अक्स (trace-copy) बनाकर दूसरी आकृति पर रखते हैं। यदि ये आकृतियाँ एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेती हैं तो वे सर्वांगसम कहलाती हैं। दूसरे ढंग से, आप इनमें से एक आकृति को काट कर उसे दूसरी आकृति पर रख सकते हैं। लेकिन सावधान! जिस आकृति को आपने काटा है (या अक्स बनाया है) उसे मोड़ने या फैलाने की आपको छूट नहीं है।

आकृति 7.3 में, यदि आकृति F_1, आकृति F_2 के सर्वांगसम है तो हम लिखेंगे $F_1 \cong F_2$.

7.3 रेखाखंडों में सर्वांगसमता

दो रेखाखंड कब सर्वांगसम होते हैं? नीचे दिए गए रेखाखंडों के दो युग्मों को देखिए।

आकृति 7.4

प्रत्येक रेखाखंड युग्म के लिए अक्स प्रतिलिपि बनाकर अध्यारोपण विधि का प्रयोग कीजिए [आकृति 7.4(i)] $\overline{CD}$ का अक्स बनाकर इसे $\overline{AB}$ पर रखें। आप देखेंगे कि $\overline{CD}$ $\overline{AB}$ को पूर्णतया ढक लेता है और C, A पर तथा D, B पर स्थित है। अत: हम कह सकते हैं कि दोनों रेखाखंड सर्वांगसम हैं और हम लिखेंगे $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

आकृति 7.4 (ii) के रेखाखंड युग्म के लिए इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप क्या देखते हैं? ये रेखाखंड सर्वांगसम नहीं हैं। यह आपने कैसे जाना? क्योंकि जब एक रेखाखंड को दूसरे रेखाखंड पर रखा जाता है तो वे एक दूसरे को पूर्णतया नहीं ढकते हैं।

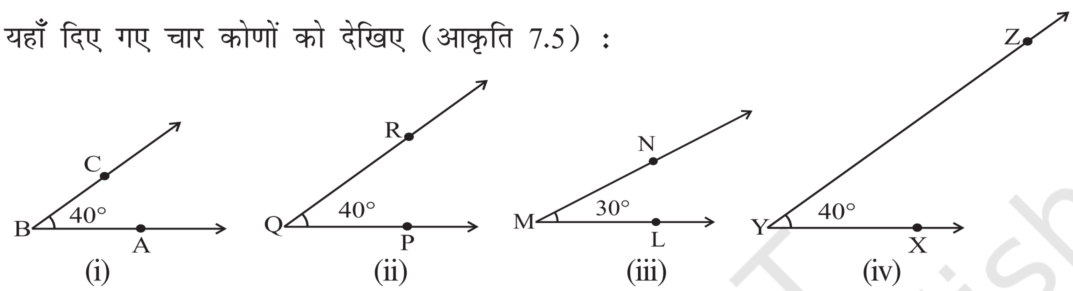
आकृति 7.4 (i) में आपने देखा होगा कि रेखाखंडों के युग्म का एक दूसरे के साथ सुमेलन (matching) होता है क्योंकि उनकी लंबाई बराबर है परंतु आकृति 7.4 (ii) में ऐसी स्थिति नहीं है।

> यदि दो रेखाखंडों की लंबाई समान (यानी बराबर) है तो वे सर्वांगसम होते हैं। यदि दो रेखाखंड सर्वांगसम हैं तो उनकी लंबाइयाँ समान होती हैं।

ऊपर दिए गए तथ्य को ध्यान में रखते हुए, जब दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं तो हम कहते हैं कि रेखाखंड बराबर हैं; और हम लिखते हैं $AB = CD$। (हमारा वास्तव में अर्थ है कि $\overline{AB} \cong \overline{CD}$)।

7.4 कोणों की सर्वांगसमता

यहाँ दिए गए चार कोणों को देखिए (आकृति 7.5) :



आकृति 7.5

$\angle PQR$ का अक्स बनाइए और इससे $\angle ABC$ को ढकने का प्रयास कीजिए। इसके लिए, सबसे पहले Q को B पर और $\overrightarrow{QP}$ को $\overrightarrow{BA}$ पर रखिए। $\overrightarrow{QR}$ कहाँ पर आएगा ? यह BC के ऊपर होगा।

इस प्रकार, $\angle PQR$ का सुमेलन $\angle ABC$ से होता है।

इस सुमेलन में $\angle ABC$ और $\angle PQR$ सर्वांगसम हैं।

(ध्यान दीजिए कि इन दोनों सर्वांगसम कोणों की माप समान है)

हम लिखते हैं $\qquad \angle ABC \cong \angle PQR \qquad$ (i)

या $\qquad m\angle ABC = m\angle PQR$ (इस स्थिति में माप 40° है)

अब आप $\angle LMN$ का अक्स बनाइए और इसे $\angle ABC$ पर रखिए। M को B पर तथा $\overrightarrow{ML}$ को $\overrightarrow{BA}$ पर रखिए। क्या $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$ पर आता है ? नहीं, इस स्थिति में ऐसा नहीं होता है। आपने देखा कि $\angle ABC$ और $\angle LMN$ एक दूसरे को पूर्णतया नहीं ढकते हैं। इसलिए वे सर्वांगसम नहीं हैं। (ध्यान दीजिए, इस स्थिति में $\angle ABC$ और $\angle LMN$ की माप बराबर नहीं है)

$\angle XYZ$ और $\angle ABC$ के बारे में आप क्या कहेंगे। आकृति 7.5 (iv) में किरण $\overrightarrow{YX}$ और $\overrightarrow{YZ}$ क्रमशः किरण $\overrightarrow{BA}$ और $\overrightarrow{BC}$ से अधिक लंबी प्रतीत होती है। इसके आधार पर आप सोच सकते हैं कि $\angle ABC$, $\angle XYZ$ से छोटा है। परंतु याद रखिए कि आकृति में किरण केवल दिशा को ही प्रदर्शित करती है न कि लंबाई को। आप देखेंगे कि ये दोनों कोण भी सर्वांगसम हैं।

हम लिखते हैं $\qquad \angle ABC \cong \angle XYZ \qquad$ (ii)

या $\qquad m\angle ABC = m\angle XYZ$

(i) और (ii) को ध्यान में रखते हुए, हम यह भी लिख सकते हैं :

$$\angle ABC \cong \angle PQR \cong \angle XYZ$$

यदि दो कोणों की माप समान हो तो वे सर्वांगसम होते हैं। यदि दो कोण सर्वांगसम हैं तो उनकी माप भी समान होती है।

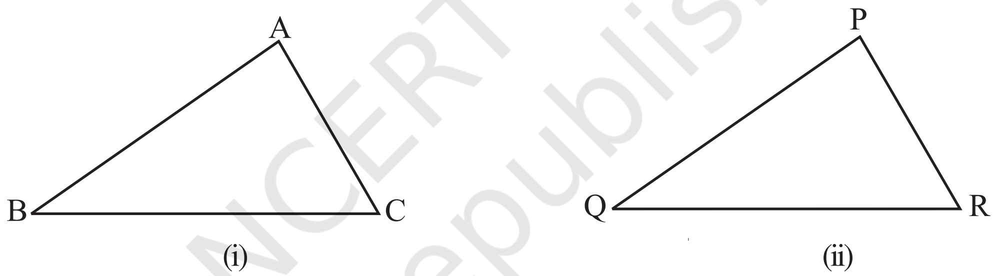
कोणों की सर्वांगसमता पूर्णतया उनके मापों की समानता के ऊपर निर्भर करती है जैसाकि रेखाखंडों की स्थिति में बताया गया है। इस प्रकार, यह कहना कि दो कोण सर्वांगसम हैं, हम कई बार केवल यही कहते हैं कि कोण बराबर हैं; और हम लिखते हैं:

$$\angle ABC = \angle PQR \text{ (अर्थात } \angle ABC \cong \angle PQR).$$

7.5 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

हमने देखा कि दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं जब उनमें से एक, दूसरे की प्रतिलिपि हो। इसी प्रकार, दो कोण सर्वांगसम होते हैं यदि उनमें से एक, दूसरे की प्रतिलिपि हो। हम इस संकल्पना को अब त्रिभुजों के लिए भी देखते हैं।

दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि वे एक दूसरे की प्रतिलिपियाँ हों और एक को दूसरे के ऊपर रखे जाने पर, वे एक दूसरे को आपस में पूर्णतया ढक लें।



आकृति 7.6

ΔABC और ΔPQR समान आकार एवं समान आमाप के हैं। ये सर्वांगसम हैं। अतः इनको निम्नलिखित प्रकार से दर्शाएँगे :

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR.$$

इसका अर्थ यह है कि यदि आप ΔPQR को ΔABC पर रखते हैं, तो P, A के ऊपर; Q, B के ऊपर और R, C के ऊपर आता है। इसी प्रकार $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$ के अनुदिश; $\overline{QR}$, $\overline{BC}$ के अनुदिश तथा $\overline{PR}$, $\overline{AC}$ के अनुदिश आते हैं। यदि दिए गए सुमेलन (correspondence) में दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो उनके संगत भाग (अर्थात् कोण और भुजाएँ) समान होते हैं। अतः इन दोनों सर्वांगसम त्रिभुजों में, हमें प्राप्त होता है :

संगत शीर्ष : A और P, B और Q, C और R.

संगत भुजाएँ : $\overline{AB}$ और $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ और $\overline{QR}$, $\overline{AC}$ और $\overline{PR}$.

संगत कोण : $\angle A$ और $\angle P$, $\angle B$ और $\angle Q$, $\angle C$ और $\angle R$.

यदि आप ΔPQR को ΔABC पर इस प्रकार से आरोपित करते हैं कि P, B के ऊपर रखें तो क्या दूसरे शीर्ष भी यथायोग्य सुमेलित होंगे? *ऐसा होना आवश्यक नहीं है?* आप त्रिभुजों की अक्स प्रतिलिपियाँ लीजिए और यह ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। यह दर्शाता है कि त्रिभुजों की

सर्वांगसमता के बारे में चर्चा करते समय न केवल कोणों की माप और भुजाओं की लंबाइयाँ महत्त्व रखती हैं, परंतु शीर्षों का सुमेलन भी उतना ही महत्त्व रखता है। ऊपर दी गई स्थिति में, सुमेलन है :

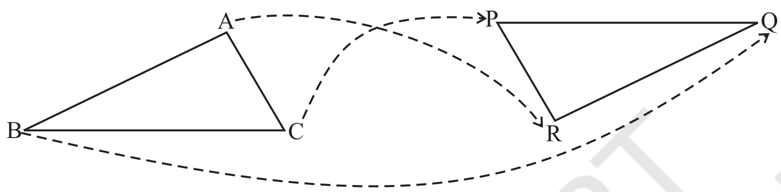
$$A \leftrightarrow P,\ B \leftrightarrow Q,\quad C \leftrightarrow R$$

हम इसे, इस प्रकार भी लिख सकते हैं $ABC \leftrightarrow PQR$

उदाहरण 1 यदि ΔABC और ΔPQR सुमेलन $ABC \leftrightarrow RQP$ के अंतर्गत सर्वांगसम हों, तो ΔABC के वे भाग लिखिए जो निम्न के संगत हों

(i) $\angle P$ (ii) $\angle Q$ (iii) $\overline{RP}$

हल इस सर्वांगसमता को अच्छे ढंग से समझने के लिए, आइए हम एक आकृति (आकृति 7.7) का प्रयोग करते हैं।



आकृति 7.7

यहाँ सुमेलन $ABC \leftrightarrow RQP$ है। अर्थात् $A \leftrightarrow R$; $B \leftrightarrow Q$; $C \leftrightarrow P$.

अत: (i) $\overline{PQ} \leftrightarrow \overline{CB}$ (ii) $\angle Q \leftrightarrow \angle B$ (iii) $\overline{RP} \leftrightarrow \overline{AB}$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

जब दो त्रिभुज, मान लीजिए ABC और PQR, दिए हुए हों तो उनमें आपस में कुल छः संभव सुमेलन होते हैं। उनमें से दो सुमेलन ये हैं :

(i) $ABC \leftrightarrow PQR$ और (ii) $ABC \leftrightarrow QRP$

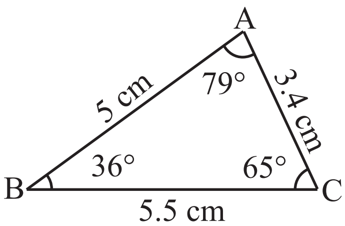
दो त्रिभुजों के कट-आउट (cutouts) का प्रयोग करके अन्य चार सुमेलनों को ज्ञात कीजिए। क्या ये सभी सुमेलन सर्वांगसमता दर्शाते हैं? इसके बारे में विचार कीजिए।

प्रश्नावली 7.1

1. निम्न कथनों को पूरा कीजिए :
   (a) दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं यदि ____________।
   (b) दो सर्वांगसम कोणों में से एक की माप 70° है, दूसरे कोण की माप ____________ है।
   (c) जब हम $\angle A = \angle B$ लिखते हैं, हमारा वास्तव में अर्थ होता है ____________।
2. वास्तविक जीवन से संबंधित सर्वांगसम आकारों के कोई दो उदाहरण दीजिए।
3. यदि सुमेलन $ABC \leftrightarrow FED$ के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta FED$ तो त्रिभुजों के सभी संगत सर्वांगसम भागों को लिखिए।
4. यदि $\Delta DEF \cong \Delta BCA$ हो, तो ΔBCA के उन भागों को लिखिए जो निम्न के संगत हो :
   (i) $\angle E$ (ii) $\overline{EF}$ (iii) $\angle F$ (iv) $\overline{DF}$

7.6 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध

हम अपने दैनिक जीवन में त्रिभुजाकार संरचनाओं और नमूनों का प्रायः प्रयोग करते हैं। अतः यह ज्ञात करना लाभकारी होगा कि दो त्रिभुजाकार आकृतियाँ कब सर्वांगसम होंगी। यदि आपकी नोटबुक में दो त्रिभुज बने हैं और आप प्रमाणित करना चाहते हैं कि क्या वे सर्वांगसम हैं तब आप हर बार उनमें से एक को काटकर दूसरे पर रखने (आरोपण) वाली विधि का प्रयोग नहीं कर सकते हैं। इसके बदले यदि हम सर्वांगसमता को सटीक मापों द्वारा निश्चित कर सकें तो यह अधिक उपयोगी होगा। चलिए ऐसा करने का प्रयत्न करें।



आकृति 7.8
अप्पू द्वारा निर्मित त्रिभुज

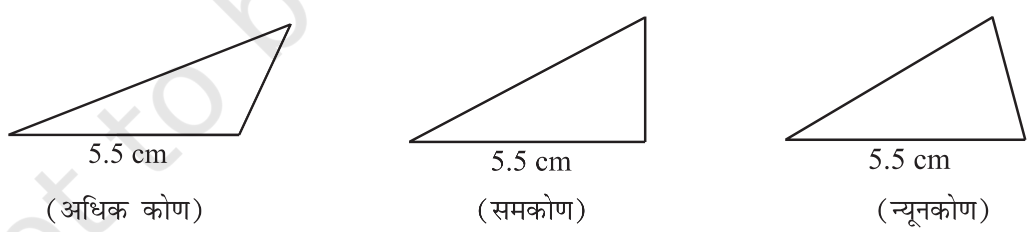
एक खेल

अप्पू और टिप्पू एक खेल खेलते हैं। अप्पू ने एक त्रिभुज ABC(आकृति 7.8) बनाया। उसने प्रत्येक भुजा की लंबाई और इसके प्रत्येक कोण की माप को ध्यान में रख लिया। टिप्पू ने यह सब ध्यान से नहीं देखा। अप्पू, टिप्पू को चुनौती देता है कि क्या वह कुछ दी सूचनाओं के आधार पर उसके ΔABC की प्रतिलिपि बना सकता है? अप्पू द्वारा दी गई सूचनाओं का प्रयोग करके टिप्पू ΔABC के सर्वांगसम एक त्रिभुज बनाने का प्रयास करता है। खेल आरंभ होता है। सावधानी से उनके वार्तालाप और उनके खेल का अवलोकन कीजिए।

SSS खेल

अप्पू : ΔABC की एक भुजा 5.5 cm है।

टिप्पू : इस सूचना से, मैं अनेक त्रिभुजों को बना सकता हूँ (आकृति 7.9)। लेकिन यह आवश्यक नहीं कि वे ΔABC की प्रतिलिपि हों। मैं जो त्रिभुज बनाता हूँ वह त्रिभुज अधिक कोण (obtuse angled) या समकोण (Right angled) या न्यून कोण (acute angled) हो सकता है। यहाँ पर कुछ उदाहरण दिए गए हैं :



आकृति 7.9

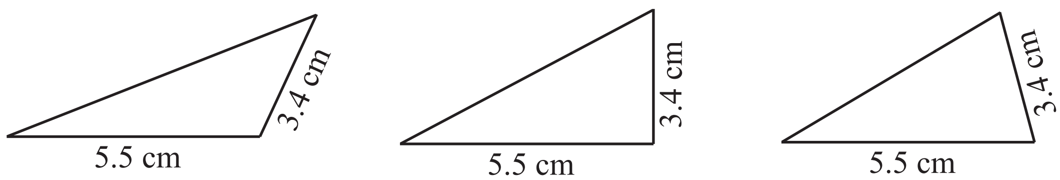
मैंने अन्य भुजाओं के लिए स्वेच्छा से लंबाइयों का प्रयोग किया। इससे मुझे 5.5 cm लंबाई के आधार वाले कई त्रिभुज मिलते हैं।

अतः दी गई केवल एक ही भुजा की लंबाई से ΔABC की प्रतिलिपि बनाना, मेरे लिए संभव नहीं।

अप्पू : अच्छा। मैं तुम्हें एक और भुजा की लंबाई दूँगा। ΔABC की दो भुजाओं की लंबाइयाँ 5.5 cm और 3.4 cm हैं।

टिप्पू : यह सूचना भी त्रिभुज बनाने के लिए पर्याप्त नहीं है। मैं इस दी गई सूचना से बहुत से त्रिभुज बना सकता हूँ जो ΔABC की प्रतिलिपि नहीं होंगे।

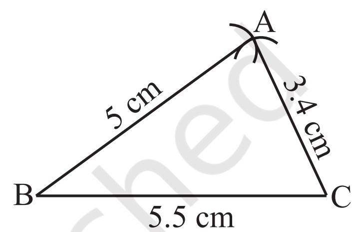
यहाँ पर कुछ त्रिभुज दिए गए हैं जो मेरी बात का समर्थन करते हैं,



आकृति 7.10

आपके त्रिभुज जैसी प्रतिलिपि कोई भी नहीं बना सकता यदि केवल दो भुजाओं की लंबाइयाँ दी गई हों।

अप्पू : ठीक है ! मैं तुम्हें त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप देता हूँ। ΔABC में, मेरे पास $AB = 5$ cm, $BC = 5.5$ cm और $AC = 3.4$ cm है।



आकृति 7.11

टिप्पू : मैं सोचता हूँ कि त्रिभुज बनाना अब संभव होना चाहिए। मैं अब कोशिश करता हूँ। सबसे पहले मैं एक खाका (कच्ची) आकृति बनाता हूँ जिससे मैं आसानी से लंबाइयाँ याद रख सकूँ। मैं 5.5 cm $\overline{BC}$ खींचता हूँ।

'B' को केंद्र लेकर, मैं 5 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचता हूँ। बिंदु 'A' इस चाप पर कहीं स्थित होना चाहिए। 'C' को केंद्र लेकर 3.4 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचता हूँ। बिंदु 'A' इस चाप पर भी होना चाहिए। अर्थात्, 'A' बिंदु खींची गई दोनों चापों पर स्थित है। अर्थात् 'A' दोनों चापों का प्रतिच्छेदी बिंदु है।

मैं अब बिंदुओं A, B और C की स्थिति जानता हूँ। अहा! मैं इन्हें मिलाकर ΔABC प्राप्त कर सकता हूँ। (आकृति 7.11)

अप्पू : बहुत अच्छा ! अत: एक दिए हुए ΔABC की प्रतिलिपि बनाने के लिए (अर्थात् ΔABC के सर्वांगसम) हमें तीनों भुजाओं की लंबाइयों की आवश्यकता होती है। क्या हम इस स्थिति को भुजा-भुजा-भुजा (side-side-side) प्रतिबंध कह सकेंगे?

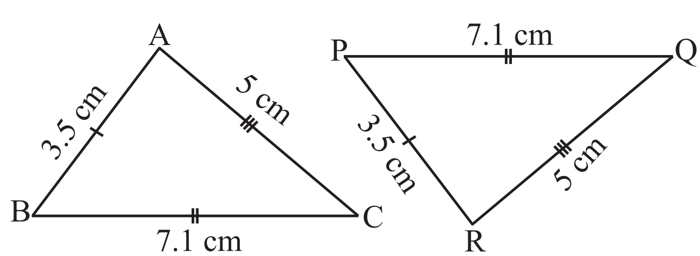
टिप्पू : क्यों न हम इसे संक्षेप में, SSS प्रतिबंध कहें।

SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध

यदि दिए गए सुमेलन के अंतर्गत, एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमश: किसी दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

उदाहरण 2 त्रिभुज ABC और PQR में $AB = 3.5$ cm, $BC = 7.1$ cm, $AC = 5$ cm, $PQ = 7.1$ cm, $QR = 5$ cm, और $PR = 3.5$ cm है (आकृति 7.1)। जाँचिए कि क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं या नहीं? यदि हाँ, तो सुमेलन संबंध को सांकेतिक रूप में लिखिए।

हल यहाँ, $AB = RP$ (= 3.5 cm),
$BC = PQ$ (= 7.1 cm)
$AC = QR$ (= 5 cm)



आकृति 7.12

यह दर्शाता है कि पहले त्रिभुज की तीनों भुजाएँ, दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हैं। अतः SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। ऊपर दी गई तीनों समानता वाले संबंधों से, यह आसानी से देखा जा सकता है कि $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow P$ और $C \leftrightarrow Q$.

अतः $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

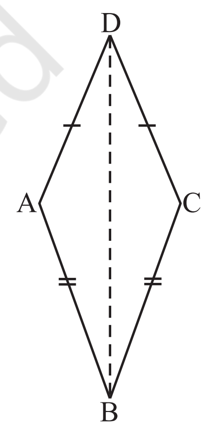
महत्त्वपूर्ण जानकारी : सर्वांगसम त्रिभुजों के नामों में अक्षरों का क्रम संगत संबंधों को दर्शाता है। इस प्रकार, जब आप $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$, लिखते हैं, आपको ज्ञात हो जाता है कि A, R पर; B, P पर; C, Q पर; $\overline{AB}$, $\overline{RP}$ की दिशा में; $\overline{BC}$, $\overline{PQ}$ की दिशा में तथा $\overline{AC}$, $\overline{RQ}$ की दिशा में है।

उदाहरण 3 आकृति 7.13 में, $AD = CD$ और $AB = CB$ है।

(i) ΔABD और ΔCBD में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ABD \cong \Delta CBD$? क्यों या क्यों नहीं ?

(iii) क्या BD, $\angle ABC$ को समद्विभाजित करता है ? कारण बताइए।



आकृति 7.13

हल

(i) ΔABD और ΔCBD में, बराबर भागों के तीन युग्म निम्नलिखित हैं :

$AB = CB$ (दिया गया है)

$AD = CD$ (दिया गया है)

और $BD = BD$ (दोनों में उभयनिष्ठ)

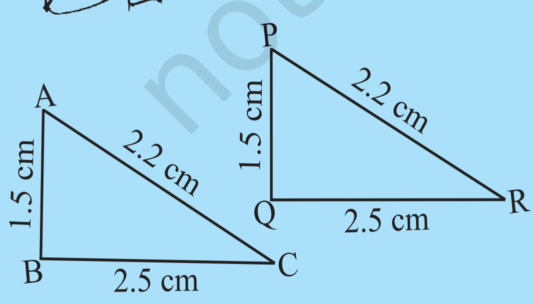
(ii) ऊपर दिए गए (i) से , $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध)

(iii) $\angle ABD = \angle CBD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

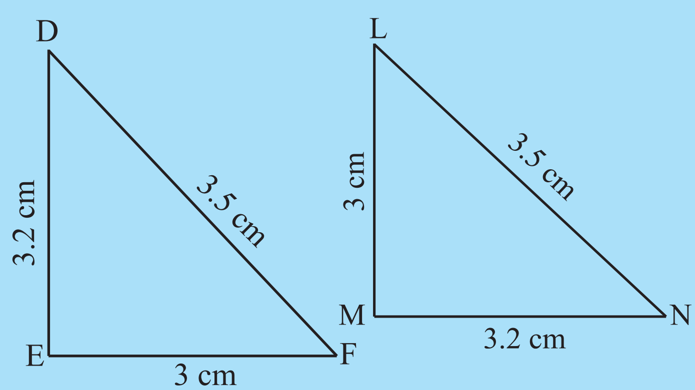
अतः BD, $\angle ABC$ को समद्विभाजित करता है।

प्रयास कीजिए

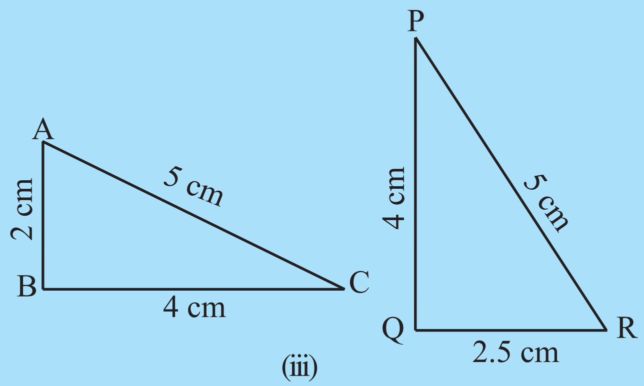
1. आकृति 7.14 में, त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाइयाँ दर्शाई गई हैं। SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज-युग्म सर्वांगसम हैं। सर्वांगसमता की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में लिखिए :



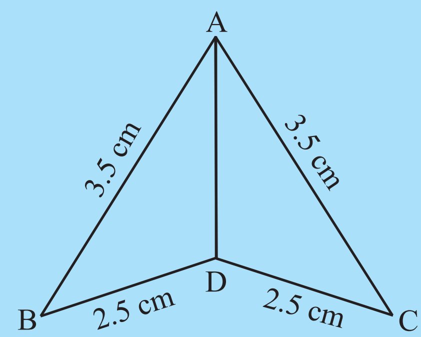
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

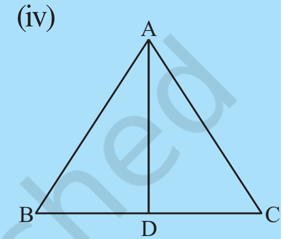
आकृति 7.14

2. आकृति 7.15 में AB = AC और D, $\overline{BC}$ का मध्य बिंदु है।

(i) ΔADB और ΔADC में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है? कारण दीजिए ।

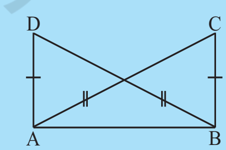
(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है? क्यों?



आकृति 7.15

3. आकृति 7.16 में, AC = BD और AD = BC है। निम्नलिखित कथनों में कौन-सा कथन सत्य है?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$



आकृति 7.16

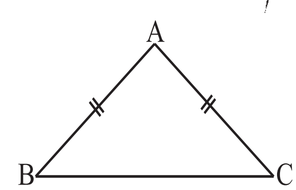
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC (आकृति 7.17) है। ΔABC की एक अक्स प्रतिलिपि लीजिए और इसे भी ΔABC का नाम दीजिए

(i) ΔABC और ΔACB में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए ।

(ii) क्या $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ है ? क्यों अथवा क्यों नहीं ?

(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है ? क्यों अथवा क्यों नहीं ?



आकृति 7.17

अप्पू और टिप्पू अब पिछले खेल में कुछ परिवर्तन करके पुनः खेलते हैं।

SAS खेल

अप्पू : अब मैं त्रिभुजों की प्रतिलिपि बनाने वाले खेल के नियमों में परिवर्तन करता हूँ।

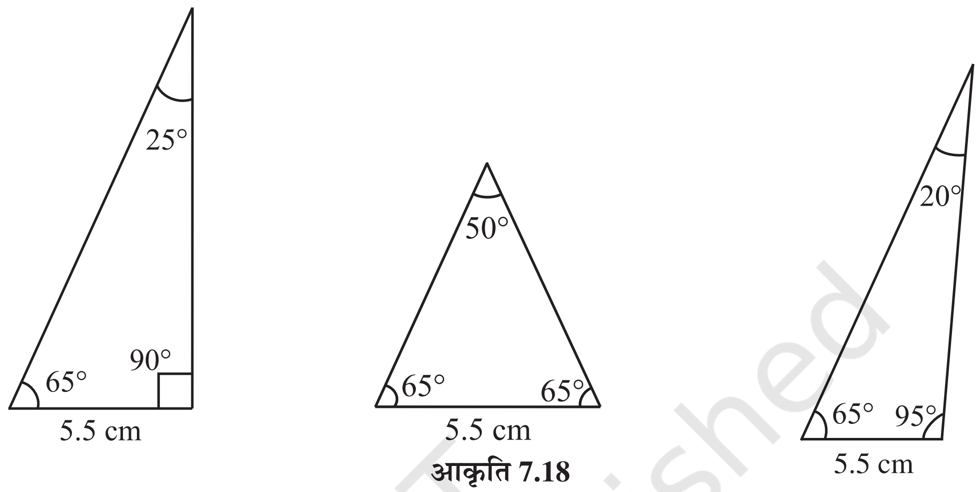
टिप्पू : ठीक है, करिए ।

अप्पू : आप पहले से जान चुके हैं कि त्रिभुज की केवल एक भुजा की लंबाई का दिया जाना ही पर्याप्त नहीं होता है।

टिप्पू : हाँ ।

अप्पू : उस स्थिति में, मैं कहता हूँ कि ΔABC में एक भुजा 5.5 cm और एक कोण 65° का है।

टिप्पू : यह, फिर त्रिभुज बनाने के लिए पर्याप्त नहीं है। मैं ऐसे बहुत सारे त्रिभुजों को बना सकता हूँ जो आपकी सूचना को संतुष्ट करते हों, परंतु वे ΔABC की प्रतिलिपि न हों। उदाहरण के लिए, मैंने कुछ त्रिभुजों को यहाँ पर दिया है (आकृति 7.18)।



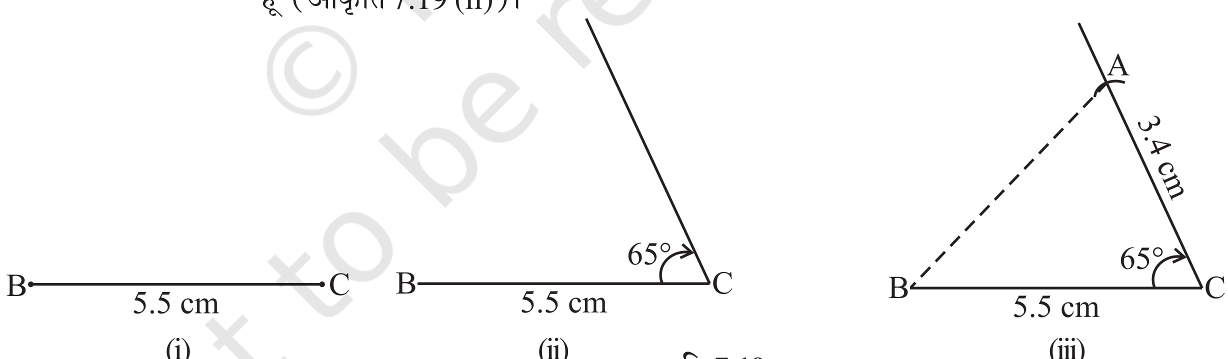
आकृति 7.18

अप्पू : अतः, हम क्या करें ?

टिप्पू : हमें और सूचना की आवश्यकता है।

अप्पू : तब, मैं अपने पहले वाले कथन में परिवर्तन करता हूँ। ΔABC में, दो भुजाओं की लंबाई 5.5 cm और 3.4 cm है, तथा इन भुजाओं के अंतर्गत 65° का कोण है।

टिप्पू : यह सूचना मेरी सहायता करेगी। मैं कोशिश करता हूँ। मैं पहले 5.5 cm लंबाई वाला रेखाखंड BC खींचता हूँ (आकृति 7.19 (i))। अब मैं 'C' पर 65° का कोण बनाता हूँ (आकृति 7.19 (ii))।



आकृति 7.19

हाँ, मुझे बिंदु A प्राप्त हो गया। यह C से खींची गई इस कोणीय भुजा की दिशा में, C से 3.4 cm की दूरी पर स्थित होना चाहिए। C को केंद्र लेकर, मैं 3.4 cm की एक चाप खींचता हूँ। यह कोण की भुजा को A पर काटता है। अब मैं AB को मिलाता हूँ और ΔABC को प्राप्त करता हूँ (आकृति 7.19 (ii))।

अप्पू : आपने यहाँ भुजा-कोण-भुजा का उपयोग किया है जहाँ कोण भुजाओं के बीच में स्थित है।

टिप्पू : हाँ। हम इस प्रतिबंध को क्या नाम देंगे ?

अप्पू : यह SAS प्रतिबंध है, क्या आप समझ गए हैं ?

टिप्पू : हाँ। अवश्य।

SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध

यदि एक सुमेलन के अंतर्गत, एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो ये त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

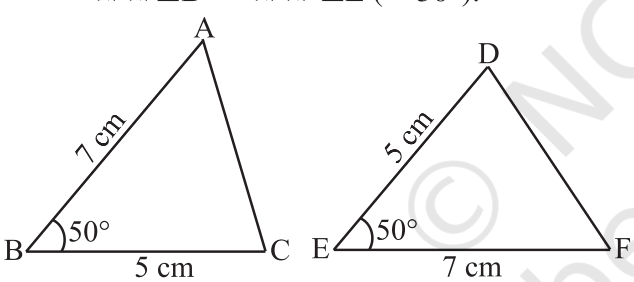
उदाहरण 4 दो त्रिभुजों के कुछ भागों की निम्न माप दी गई है। SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके जाँच कीजिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं अथवा नहीं ? यदि त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो उन्हें सांकेतिक रूप में लिखिए ।

	Δ**ABC**	Δ**DEF**
(a)	$AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm, $\angle B = 50°$	$DE = 5$ cm, $EF = 7$ cm, $\angle E = 50°$
(b)	$AB = 4.5$ cm, $AC = 4$ cm, $\angle A = 60°$	$DE = 4$ cm, $FD = 4.5$ cm, $\angle D = 55°$
(c)	$BC = 6$ cm, $AC = 4$ cm, $\angle B = 35°$	$DF = 4$ cm, $EF = 6$ cm, $\angle E = 35°$

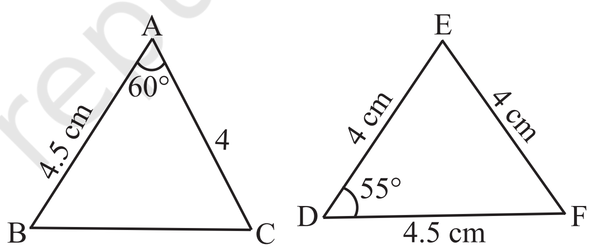
(यह हमेशा बहुत उपयोगी होगा कि पहले एक खाका (कच्ची) आकृति को बनाकर उनकी मापों को अंकित कर दिया जाए और उसके बाद प्रश्न को देखा जाए)।

हल

(a) यहाँ, $AB = EF$ $(= 7$ cm$)$, $BC = DE$ $(= 5$ cm$)$ और अंतर्गत $\angle B$ = अंतर्गत $\angle E$ $(= 50°)$.



आकृति 7.20



आकृति 7.21

इस प्रकार , $A \leftrightarrow F$ $B \leftrightarrow E$ और $C \leftrightarrow D$.

अत:, $\Delta ABC \cong \Delta FED$ (SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत) (आकृति 7.20)

(b) यहाँ, $AB = FD$ और $AC = DE$ है (आकृति 7.21)।

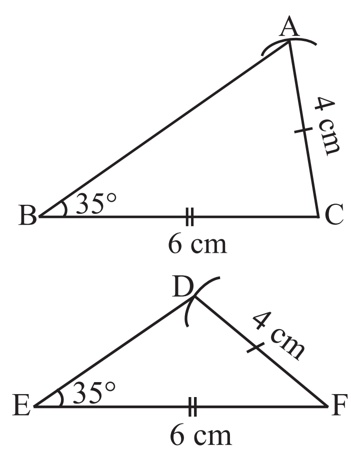
परंतु अंतर्गत $\angle A \neq$ अंतर्गत $\angle D$; अत: हम नहीं कह सकते हैं कि त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

(c) यहाँ, $BC = EF$, $AC = DF$ और $\angle B = \angle E$.

परंतु $\angle B$ भुजाओं AC और BC का अंतर्गत कोण नहीं है।

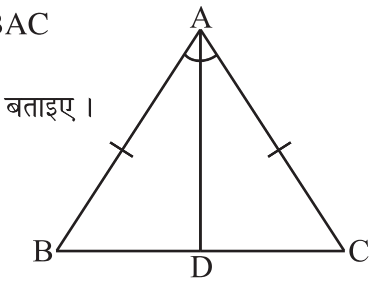
इसी प्रकार, $\angle E$ भुजाओं EF और DF का अंतर्गत कोण नहीं है।

अत: यहाँ पर SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग नहीं कर सकते हैं और हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं अथवा नहीं।



आकृति 7.22

उदाहरण 5 आकृति 7.23 में, AB = AC है और AD, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।



आकृति 7.23

(i) त्रिभुज ADB और ADC में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$? कारण दीजिए।

(iii) क्या $\angle B = \angle C$? कारण दीजिए।

हल

(i) बराबर भागों के तीन युग्म निम्न हैं :

AB = AC (दिया गया है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (AD, $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है) और AD = AD (उभयनिष्ठ)

(ii) हाँ, $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ (SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत)

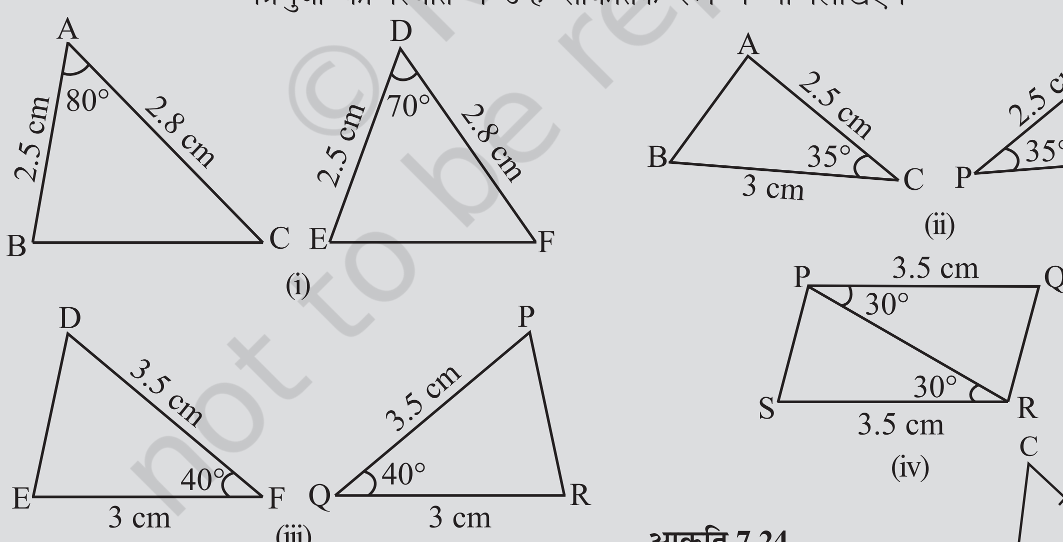
(iii) $\angle B = \angle C$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

इन्हें कीजिए

1. ΔDEF की भुजाओं $\overline{DE}$ और $\overline{EF}$ का अंतर्गत कोण कौन-सा है ?

2. SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके आप $\Delta PQR \cong \Delta FED$ स्थापित करना चाहते हैं। यह दिया गया है कि PQ = FE और RP = DF है। सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए अन्य किस तथ्य या सूचना की आवश्यकता होगी ?

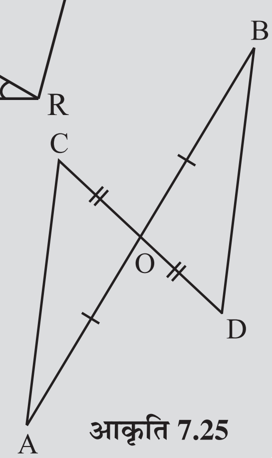
3. आकृति 7.24 में, त्रिभुजों के युग्मों में कुछ भागों की माप अंकित की गई है। SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके, इनमें वे युग्म छाँटिए जो सर्वांगसम हैं। सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में उन्हें सांकेतिक रूप में भी लिखिए।



आकृति 7.24

4. आकृति 7.25 में, $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ एक दूसरे को O पर समद्विभाजित करते हैं।

(i) दोनों त्रिभुजों AOC और BOD में बराबर भागों के तीन युग्मों को बताइए।



आकृति 7.25

(ii) निम्न कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं ?

(a) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$

(b) $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

ASA खेल

क्या आप अप्पू के त्रिभुज को बना सकते हैं, यदि आप जानते हैं :

(i) इसके केवल एक कोण को ? (ii) इसके केवल दो कोणों को ?

(iii) दो कोणों और कोई एक भुजा को ?

(iv) दो कोण ओर उनके बीच की भुजा को ?

उपरोक्त प्रश्नों के हल निकालने के प्रयास हमें निम्न प्रतिबंध से अवगत कराते हैं ।

ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध :
यदि एक सुमेलन में, एक त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा, किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

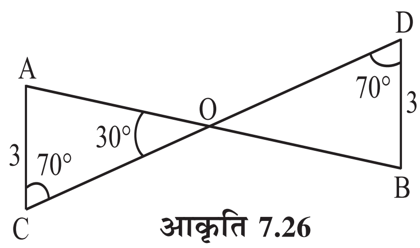
उदाहरण 6 ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ स्थापित करना है यदि यह दिया गया है कि $BC = RP$। इस सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए अन्य किन तथ्यों की आवश्यकता है ?

हल ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध के लिए हमें दो दिए कोणों के साथ अंतर्गत भुजाओं BC और RP की आवश्यकता है। अतः अन्य आवश्यक तथ्य निम्न हैं :

$\angle B = \angle R$

और $\angle C = \angle P$

उदाहरण 7 आकृति 7.26 में, क्या आप ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ है ?



आकृति 7.26

हल दो त्रिभुजों AOC और BOD में, $\angle C = \angle D$ (प्रत्येक $70°$)

और $\angle AOC = \angle BOD = 30°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः $\angle A = 180° - (70° + 30°) = 80°$

(त्रिभुज के कोणों का योग गुणधर्म का प्रयोग)

इसी प्रकार $\angle B = 180° - (70° + 30°) = 80°$

अतः हमारे पास, $\angle A = \angle B$, $AC = BD$ और $\angle C = \angle D$ है।

अब, $\angle A$ और $\angle C$ के अंतर्गत भुजा AC तथा $\angle B$ और $\angle D$ के अंतर्गत भुजा BD है ।

अतः ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध से, $\Delta AOC \cong \Delta BOD$.

टिप्पणी

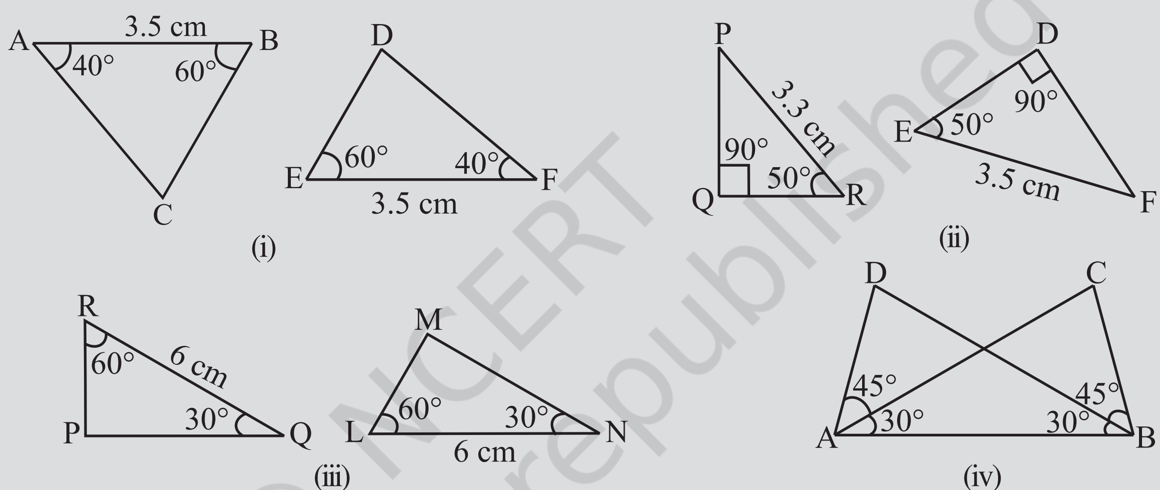
यदि एक त्रिभुज के दो कोण दिए हुए हों तो आप त्रिभुज के तीसरे कोण को हमेशा ज्ञात कर सकते हैं। अतः जब एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और एक भुजा के बराबर हो, तब आप इसे 'दो कोणों और अंतर्गत भुजा' वाली सर्वांगसमता में रूपांतरित कर सकते हैं और तब सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग कर सकते हैं।

इन्हें कीजिए

1. ΔMNP में कोणों, M तथा N के अंतर्गत भुजा क्या है ?

2. ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके आप $\Delta DEF \cong \Delta MNP$ स्थापित करना चाहते हैं। आपको दिया गया है कि $\angle D = \angle M$ और $\angle F = \angle P$। इस सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए और कौन-से तथ्य की आवश्यकता है ? (खाका आकृति बनाकर कोशिश कीजिए)।

3. आकृति 7.27 में, त्रिभुजों के कुछ भागों की माप अंकित की गई है। ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके बताइए कौन-से त्रिभुजों के युग्म सर्वांगसम हैं । सर्वांगसमता की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में लिखिए।



आकृति 7.27

4. दो त्रिभुजों के कुछ भागों की निम्न माप दी गई है। ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके जाँचिए कि क्या ये दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं या नहीं। सर्वांगसमता की स्थिति में उत्तर को सांकेतिक रूप में भी लिखिए।

	Δ**DEF**	Δ**PQR**
(i)	$\angle D = 60^\circ$, $\angle F = 80^\circ$, DF = 5 cm	$\angle Q = 60^\circ$, $\angle R = 80^\circ$, QR = 5 cm
(ii)	$\angle D = 60^\circ$, $\angle F = 80^\circ$, DF = 6 cm	$\angle Q = 60^\circ$, $\angle R = 80^\circ$, QP = 6 cm
(iii)	$\angle E = 80^\circ$, $\angle F = 30^\circ$, EF = 5 cm	$\angle P = 80^\circ$, PQ = 5 cm, $\angle R = 30^\circ$

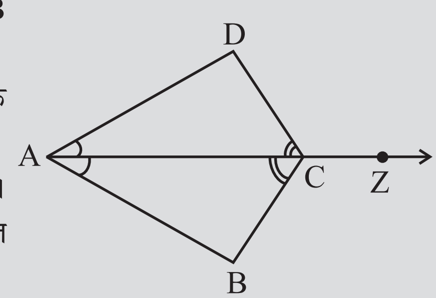
5. आकृति 7.28 में, किरण AZ, $\angle DAB$ तथा $\angle DCB$ को समद्विभाजित करती है।

(i) त्रिभुजों BAC और DAC में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए ।

(ii) क्या $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ हैं ? कारण दीजिए।

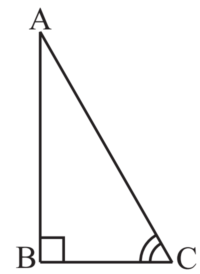
(iii) क्या AB = AD है ? अपने उत्तर का उचित कारण दीजिए।

(iv) क्या CD = CB है ? कारण दीजिए ।



आकृति 7.28

7.7 समकोण त्रिभुजों में सर्वांगसमता



आकृति 7.29

दो समकोण त्रिभुजों की स्थिति में सर्वांगसमता को यथायोग्य विशेष ध्यान देना होता है। ऐसे त्रिभुजों में, दो समकोण पहले ही बराबर होते हैं। अत: सर्वांगसमता प्रतिबंध आसान हो जाता है।

क्या आप एक ΔABC बना सकते हैं जिसमें $\angle B = 90°$ हो (आकृति 7.29 में दिखाया गया) यदि :

(i) केवल भुजा BC ज्ञात हो ? (ii) केवल $\angle C$ का पता हो ?

(iii) $\angle A$ और $\angle C$ की जानकारी हो ? (iv) भुजा AB और BC की जानकारी हो ?

(v) कर्ण AC और AB या BC में से एक भुजा की जानकारी हो ?

इनकी खाका आकृतियाँ बनाने का प्रयास कीजिए। आप देखेंगे कि (iv) और (v) त्रिभुज बनाने में आपकी सहायता करते हैं। परंतु स्थिति (iv) साधारणतया SAS प्रतिबंध ही है। स्थिति (v) कुछ नयी है। यह निम्न प्रतिबंध की ओर अग्रसर करता है।

> **RHS** सर्वांगसमता प्रतिबंध
> यदि एक सुमेलन के अंतर्गत, किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमश: किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

हम इसें RHS सर्वांगसमता क्यों कहते हैं? इसके बारे में सोचिए।

उदाहरण 8 त्रिभुजों के युग्मों के कुछ भागों के निम्न माप दिए गए हैं। RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करके बताइए कि क्या ये त्रिभुज युग्म सर्वांगसम हैं या नहीं। सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में भी लिखिए :

	ΔABC	**ΔPQR**
(i)	$\angle B = 90°$, AC = 8 cm, AB = 3 cm	$\angle P = 90°$, PR = 3 cm, QR = 8 cm
(ii)	$\angle A = 90°$, AC = 5 cm, BC = 9 cm	$\angle Q = 90°$, PR = 8 cm, PQ = 5 cm

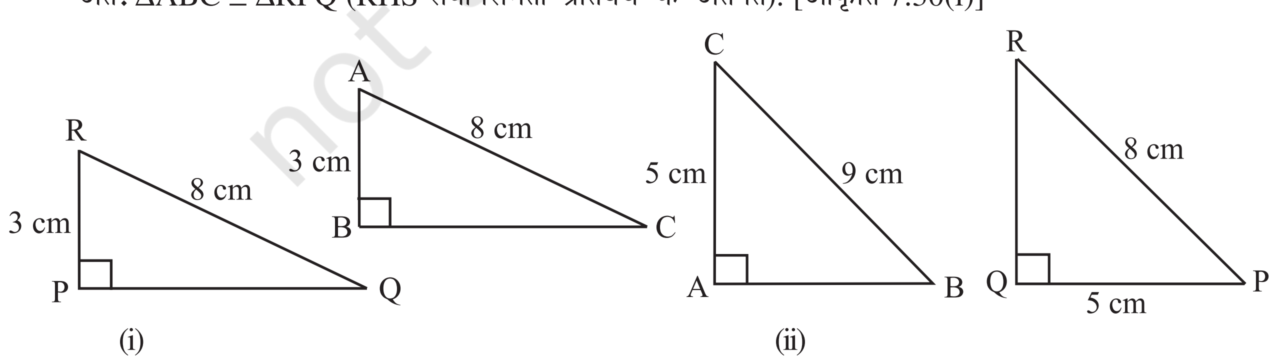
हल

(i) यहाँ, $\angle B = \angle P = 90°$,

कर्ण AC = कर्ण RQ (= 8 cm) और

भुजा AB = भुजा RP (= 3 cm)

अत: $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत). [आकृति 7.30(i)]



आकृति 7.30

(ii) यहाँ, $\angle A = \angle Q (= 90^\circ)$ और
भुजा $AC =$ भुजा $PQ\ (= 5\text{ cm})$
लेकिन कर्ण $BC \neq$ कर्ण PR [आकृति 7.30 (ii)]
अत: त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

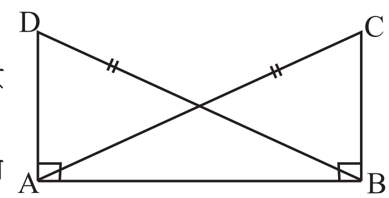


Fig 7.31

उदाहरण 9 आकृति 7.31 में, $DA \perp AB$, $CB \perp AB$ और $AC = BD$ है।

(a) ΔABC और ΔDAB में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(b) निम्न में कौन-सा कथन सत्य है?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

हल बराबर भागों के तीन युग्म ये हैं :

$\angle ABC = \angle BAD\ (= 90^\circ)$
$AC = BD$ (दिया गया है)
$AB = BA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

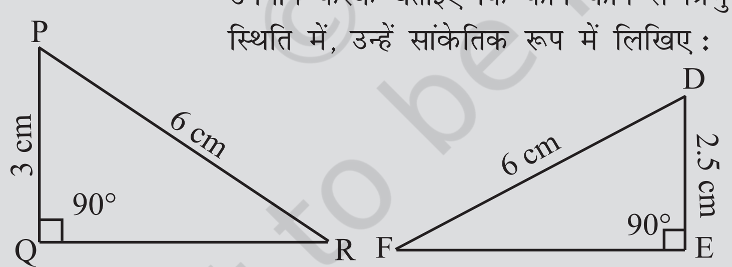
अत: $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध से)

इसलिए कथन (i) सत्य है।

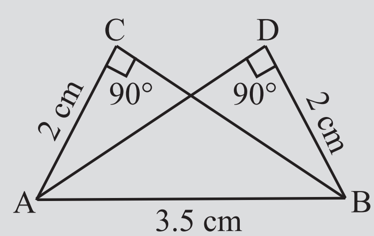
कथन (ii) सत्य नहीं है क्योंकि शीर्षों में सुमेलन सही नहीं है।

इन्हें कीजिए

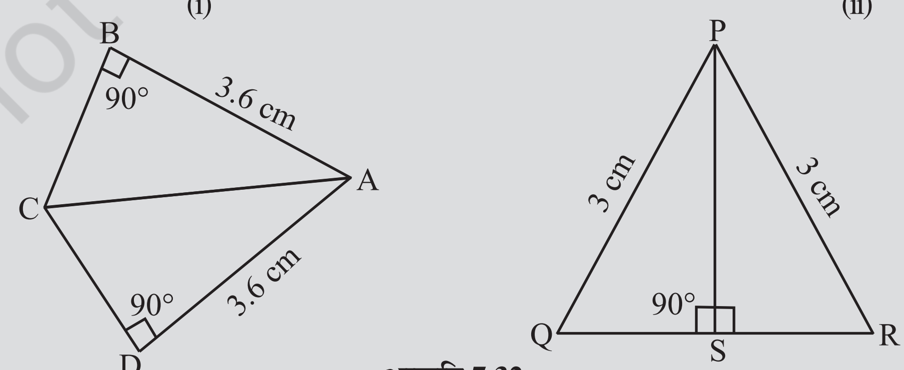
1. आकृति 7.32 में, त्रिभुजों के कुछ भागों की माप दी गई है। RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज युग्म सर्वांगसम हैं। सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में, उन्हें सांकेतिक रूप में लिखिए :



(i)



(ii)



आकृति 7.32

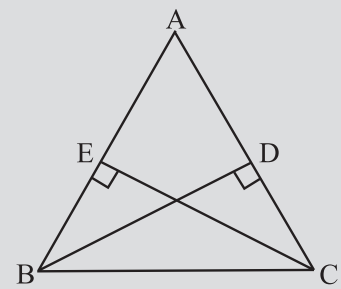
2. RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध से $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ स्थापित करना है। यदि यह दिया गया हो कि $\angle B = \angle P = 90^\circ$ और $AB = RP$ है तो अन्य किस और सूचना की आवश्यकता है?

3. आकृति 7.33 में, BD और CE, ΔABC के शीर्ष लंब हैं और $BD = CE$.

(i) ΔCBD और ΔBCE में, बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

(iii) क्या $\angle DCB = \angle EBC$ है? क्यों या क्यों नहीं?



आकृति 7.33

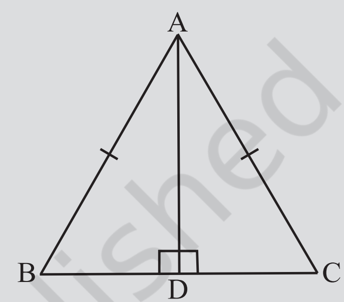
4. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ और AD इसका एक शीर्षलंब है (आकृति 7.34)।

(i) ΔADB और ΔADC में, बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है? क्यों या क्यों नहीं?

(iv) क्या $BD = CD$ है? क्यों या क्यों नहीं?



आकृति 7.34

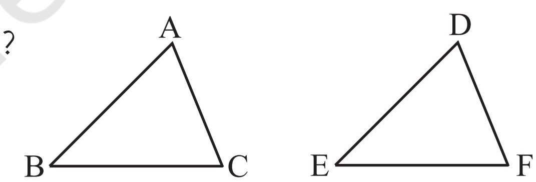
अब हम अभी तक देखे गए प्रतिबंधों पर आधारित कुछ उदाहरणों और प्रश्नों को देखेंगे।

प्रश्नावली 7.2

1. निम्न में आप कौन से सर्वांगसम प्रतिबंधों का प्रयोग करेंगे?

(a) **दिया है :** $AC = DF$, $AB = DE$, $BC = EF$

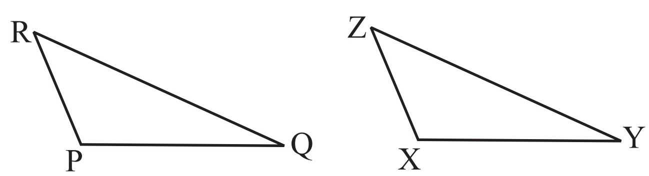
इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



(b) **दिया है :** $ZX = RP$, $RQ = ZY$

$\angle PRQ = \angle XZY$

इसलिए, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

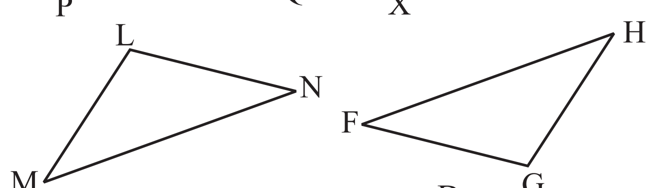


(c) **दिया है :** $\angle MLN = \angle FGH$

$\angle NML = \angle GFH$

$ML = FG$

इसलिए, $\Delta LMN \cong \Delta GFH$

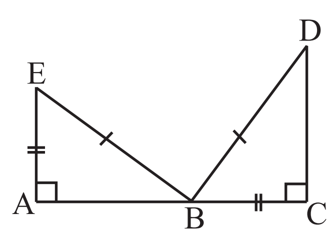


(d) **दिया है :** $EB = DB$

$AE = BC$

$\angle A = \angle C = 90^\circ$

इसलिए, $\Delta ABE \cong \Delta CDB$



2. आप $\Delta ART \cong \Delta PEN$ दर्शाना चाहते हैं,

(a) यदि आप SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करें तो आपको दर्शाने की आवश्यकता है :

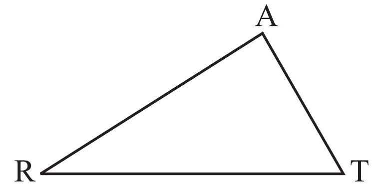
(i) $AR =$ (ii) $RT =$ (iii) $AT =$

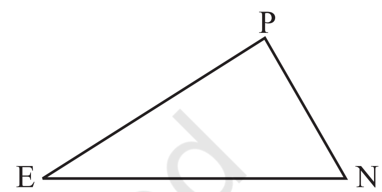
(b) यदि यह दिया गया है कि $\angle T = \angle N$ और आपको SAS प्रतिबंध का प्रयोग करना है, तो आपको आवश्यकता होगी :

(i) $RT =$ और (ii) $PN =$

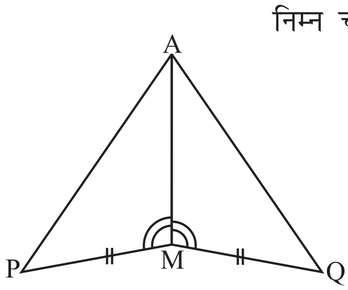
(c) यदि यह दिया गया है कि $AT = PN$ और आपको ASA प्रतिबंध का प्रयोग करना है तो आपको आवश्यकता होगी :

(i) $? =$ (ii) $? =$





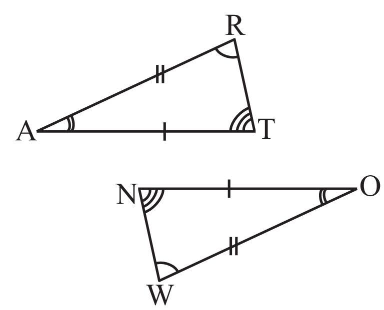
3. आपको $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ दर्शाना है।
निम्न चरणों में, रिक्त कारणों को भरिए।



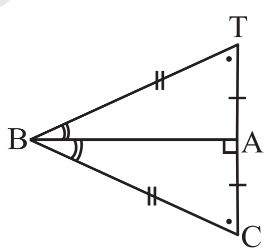
क्रम	कारण
(i) $PM = QM$	(i) ...
(ii) $\angle PMA = \angle QMA$	(ii) ...
(iii) $AM = AM$	(iii) ...
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv) ...

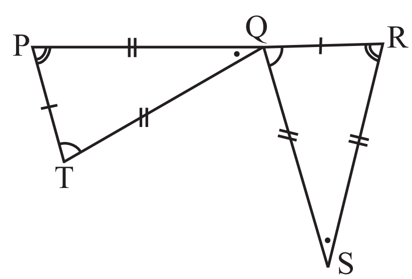
4. ΔABC में, $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$ और $\angle C = 110°$
ΔPQR में, $\angle P = 30°$, $\angle Q = 40°$ और $\angle R = 110°$
एक विद्यार्थी कहता है कि AAA सर्वांगसमता प्रतिबंध से $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है। क्या यह कथन सत्य है ? क्यों या क्यों नहीं ?

5. आकृति में दो त्रिभुज ART तथा OWN सर्वांगसम हैं जिनके संगत भागों को अंकित किया गया है। हम लिख सकते हैं $\Delta RAT \cong$?



6. कथनों को पूरा कीजिए :





$\Delta BCA \cong$? $\Delta QRS \cong$?

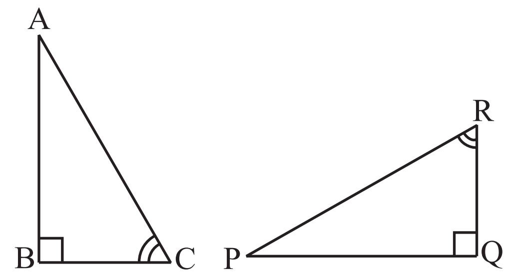
7. एक वर्गांकित शीट पर, बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों को इस प्रकार बनाइए कि

(i) त्रिभुज सर्वांगसम हो।

(ii) त्रिभुज सर्वांगसम न हो।

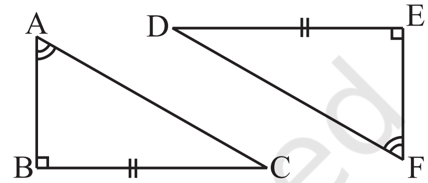
आप उनके परिमाप के बारे क्या कह सकते हैं ?

8. आकृति में एक सर्वांगसम भागों का एक अतिरिक्त युग्म बताइए जिससे ΔABC और ΔPQR सर्वांगसम हो जाएँ। आपने किस प्रतिबंध का प्रयोग किया ?



9. चर्चा कीजिए, क्यों ?

$\Delta ABC \cong \Delta FED$.



ज्ञानवर्धक क्रियाकलाप (Enrichment Activity)

हमने देखा कि अध्यारोपण तल-आकृतियों की सर्वांगसमता को जाँचने की एक उपयोगी विधि है। हमने रेखाखंडों, कोणों और त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंधों का वर्णन किया। अब आप इस संकल्पना को बढ़ाकर तल की दूसरी आकृतियों के लिए प्रयत्न कर सकते हैं।

1. अलग-अलग माप के वर्गों के कट-आउट (cutout) सोचिए। अध्यारोपण विधि का प्रयोग वर्गों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध ज्ञात करने के लिए कीजिए। कैसे "सर्वांगसम भागों" की संकल्पना सर्वांगसम के अंतर्गत उपयोग होती है ? क्या यहाँ संगत भुजाएँ हैं ? क्या यहाँ संगत विकर्ण हैं ?
2. यदि आप वृत्त लेते हैं तो क्या होता है ? दो वृत्तों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध क्या है ? क्या, आप फिर अध्यारोपण विधि का प्रयोग कर सकते हैं, पता लगाइए।
3. इस संकल्पना को बढ़ाकर तल की दूसरी आकृतियाँ, जैसे समषट्भुज इत्यादि के लिए प्रयत्न कीजिए।
4. एक त्रिभुज की दो सर्वांगसम प्रतिलिपियाँ लीजिए। कागज को मोड़कर पता लगाइए कि क्या उनके शीर्षलंब बराबर हैं। क्या उनकी माध्यिकाएँ समान हैं ? आप उनके परिमाप तथा क्षेत्रफलों के बारे में क्या कह सकते हैं ?

हमने क्या चर्चा की ?

1. सर्वांगसम वस्तुएँ एक दूसरे की प्रतिलिपियाँ होती हैं।

2. अध्यारोपण विधि तल-आकृतियों की सर्वांगसमता की जाँच करती है।

3. दो तल आकृतियाँ, माना, F_1 और F_2 सर्वांगसम होती हैं यदि F_1 की अक्स-प्रतिलिपि F_2. को पूर्णतया ढक लेती है। हम इसे $F_1 \cong F_2$ के रूप में लिखते हैं।

4. दो रेखाखंड, माना, $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$, सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी लंबाइयाँ बराबर हों। हम इसे $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ के रूप में लिखते हैं। यद्यपि, साधारणतया इसे $\overline{AB} = \overline{CD}$ लिखते हैं।

5. दो कोण, माना, $\angle ABC$ और $\angle PQR$, सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी माप बराबर हो। हम इसे $\angle ABC \cong \angle PQR$ या $m\angle ABC = m\angle PQR$. के रूप में लिखते हैं। यद्यपि, अभ्यास में इसे साधारणतया $\angle ABC = \angle PQR$ के रूप में लिखते हैं।
6. दो त्रिभुजों की SSS सर्वांगसमता :
एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ किसी दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हो।
7. दो त्रिभुजों की SAS सर्वांगसमता :
एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत कोण, दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हो।
8. दो त्रिभुजों की ASA सर्वांगसमता :
एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हो।
9. दो त्रिभुजों की RHS सर्वांगसमता :
एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और संगत भुजा के बराबर हो।
10. दो त्रिभुजों में AAA सर्वांगसमता नहीं होती है।
यह आवश्यक नहीं है कि बराबर संगत कोणों के दो त्रिभुज सर्वांगसम हों। ऐसे सुमेलनों में, इनमें से एक, दूसरे की बढ़ी हुई प्रतिलिपि हो सकती है। (वे सर्वांगसम होंगे यदि वे एक दूसरे की एक जैसी प्रतिलिपि हो)।