B3N3A4

5 കേന്ദ്രപ്രവണത (Central Tendency)

ആമുഖം

സാംഖ്യക വിശകലനത്തിനായി ഡാറ്റ എങ്ങനെ ശേഖരിക്കാമെന്നും ചിട്ടപ്പെടുത്താമെന്നും മുൻ അധ്യായങ്ങളിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ആവൃത്തി പട്ടികയും ഗ്രാഫ് രൂപത്തിലുള്ള അവതരണവും കൊണ്ട് ഡാറ്റയെ നമുക്ക് അർഥ പൂർണ്ണമാക്കാം. ഇതിനെ തുടർന്നുള്ള കാര്യങ്ങളാണ് ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്.

പരീക്ഷാക്കാലം കഴിഞ്ഞ് ഒരു ദിവസം നിങ്ങൾ ക്ലാസിൽ വരുന്നുവെന്ന് കരുതുക. പലരും നിങ്ങളോട് ചോദിക്കാവുന്ന ഒരു ചോദ്യം, നിങ്ങൾക്ക് ഈ പരീക്ഷയിൽ എത്ര സ്കോർ ലഭിക്കുമെന്നായിരിക്കും. നിങ്ങളുടെ മറുപടി എന്തായിരിക്കും? ഏകദേശം 70 ശതമാനം, 70 ശതമാനത്തിനടുത്ത്, 70 ശതമാനത്തോളം എന്നിങ്ങനെയായിരിക്കില്ലേ നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം? എന്തുകൊണ്ടാണ് 70 ശതമാനത്തിനോട്, 'ഏകദേശം', 'അടുത്ത്' തുടങ്ങിയ വാക്കുകൾ നിങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതെന്നറിയാമോ? ഇവിടെ വിവിധ പരീക്ഷകളിൽ നിങ്ങൾക്ക് ലഭിക്കാവുന്ന സ്കോറുകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ ഒരു സംഖ്യ ഉപയോഗിച്ചെന്നേയുള്ളൂ. അതായത്, പലപ്പോഴും ഡാറ്റയെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ ഒരു സംഖ്യയെ നാം ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. ഇതുമൂലം ഒരേതരത്തിലുള്ള ഡാറ്റകളെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നത് എളുപ്പമാക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ ഡാറ്റയെ സൂചിപ്പിക്കാൻ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ ശരാശരികൾ അഥവാ കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു.

കേന്ദ്രപ്രവണത (Central Tendency)

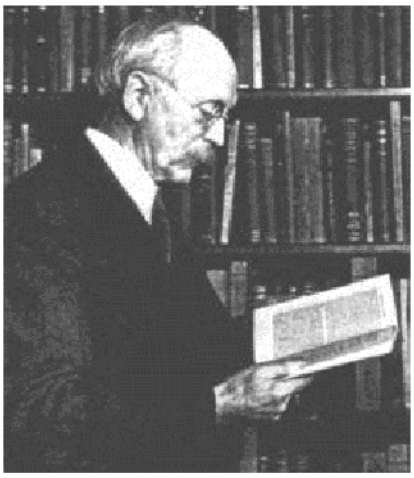
മൂന്നാമത്തെ അധ്യായത്തിൽ നാം ഒരു ക്ലാസിലെ 60 കുട്ടികളുടെ കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ശേഖരിച്ചിട്ടുണ്ടായിരുന്നു. പ്രസ്തുത ഡാറ്റശേഖരം പരിഗണിക്കുക. (പട്ടിക 3.8) അതിൽ കൂടുതൽ വിലകളും വിതരണത്തിന്റെ മധ്യഭാഗത്ത് കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നത് നമുക്ക് കാണുവാൻ സാധിക്കും. പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

കുടുംബാംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	ടാലി അടയാളം	ആവൃത്തി
2	||	2
3	𝍸 |	6
4	𝍸 ||||	9
5	𝍸 𝍸 ||||	14
6	𝍸 𝍸 |||	13
7	𝍸 ||	7
8	||||	4
9	||	2
10	||	2
11	|	1
ആകെ		60

ഇതേ പ്രത്യേകത തന്നെ 60 കുട്ടികളുടെ ഭാരത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഡാറ്റയുടെ വിതരണത്തിൽ (3-ാം അധ്യായത്തിലേത്) (പട്ടിക 3.9) നമുക്ക് കാണുവാൻ സാധിക്കും. ഇങ്ങനെ പല ആവൃത്തി വിതരണങ്ങളും പരിശോധിക്കുമ്പോൾ, മിക്ക വിതരണങ്ങളിലും ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ ഒരു മധ്യവിലയ്ക്ക് ചുറ്റും കൂടിച്ചേരുന്നുവെന്ന് നമുക്ക് മനസിലാക്കാൻ കഴിയുന്നു. ഒരു മധ്യവിലയ്ക്ക് ചുറ്റും കൂടിച്ചേരുന്നതിന് പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ കാണിക്കുന്ന ഈ പ്രവണത കേന്ദ്രപ്രവണത എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങൾ (ശരാശരികൾ) (Measures of Central Tendency)

ഒരു വിതരണത്തിലെ ഏത് വിലയ്ക്ക് ചുറ്റുമാണ് പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നതിനുള്ള പ്രവണത കാണിക്കുന്നത് ആ വിലയെ കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനം അഥവാ ശരാശരി എന്നു പറയുന്നു. അതായത് ഡാറ്റയിലെ കൂടുതൽ വിലകളും ഏത് വിലയ്ക്ക് ചുറ്റുമാണ് കൂടിച്ചേരുന്നത് എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരൊറ്റ വിലയാണ് ശരാശരി. പ്രൊഫസർ ആർതർ ലിയോൺ ബൗളിയുടെ അഭിപ്രായപ്രകാരം ശരാശരികൾ എന്നത് മുഴുവൻ ഡാറ്റയുടെയും പ്രാധാന്യം അനായാസം മനസിലാക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന സാംഖ്യക സറിരാങ്കങ്ങളാണ്.



സർ ആർതർ ലിയോൺ ബൗളി 1869 നവംബർ 6ന് ബ്രിട്ടനിൽ ജനിച്ച പ്രസിദ്ധനായ ഒരു സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റീഷ്യൻ ആണ്. ഇദ്ദേഹം സാമൂഹിക സർവേകളിൽ പ്രതിരൂപണ തന്ത്രങ്ങൾ (Sampling techniques)ഉപയോഗിക്കുന്നതിൽ വിദഗ്ധനായിരുന്നു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ എലമെന്റ്സ് ഓഫ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് (Elements of Statistics)എന്നത് ഇംഗ്ലീഷ് ഭാഷയിലുള്ള സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിന്റെ ആദ്യപാഠപുസ്തകമായി കണക്കാക്കുന്നു. ഈ പുസ്തകത്തിൽ അദ്ദേഹം സാമ്പത്തിക, സാമൂഹിക ശാസ്ത്രങ്ങളിൽ വിവരണാത്മ സാംഖ്യകത്തിന്റെ ഉപയോഗത്തെക്കുറിച്ച് പ്രതിപാദിക്കുന്നു.

ശരാശരികൾക്ക് അഭികാമ്യമായ പ്രത്യേകതകൾ

ഒരു നല്ല ശരാശരിക്ക് താഴെപറയുന്ന പ്രത്യേകതകൾ ഉണ്ടായിരിക്കേണ്ടതാണ്.

(i) ലളിതവും കൃത്യതയുമുള്ള നിർവചനം

(ii) മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് ലളിതവും കണക്കുകൂട്ടലിന് എളുപ്പവും

(iii) എല്ലാ വിലകളെയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതാകണം.

(iv) ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതും ഏറ്റവും കൂടിയതുമായ വിലകളുടെ സ്വാധീനം തീരെ കുറവാകണം.

(v) പ്രതിരൂപണങ്ങളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ സ്വാധീനം തീരെ കുറവാകണം.

(vi) തുടർഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് ഉതകുന്നതാകണം.

വിവിധതരം കേന്ദ്ര പ്രവണതാമാനങ്ങൾ

ഒരു കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനം മുഴുവൻ ഡാറ്റയെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു വിലയോ വിലയുടെ സ്ഥാനത്തേയോ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. വിവിധ തരം കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നു.

1. മാധ്യം (Mean)
2. മധ്യാങ്കം (Median)
3. മോഡ് (Mode)
4. ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (Geometric Mean)
5. സന്തുലിത മാധ്യം (Harmonic Mean)

5.1 മാധ്യം (Arithmetic Mean)

സർവ്വ സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ഒരു ശരാശരിയാണ് മാധ്യം. എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്കും ഇവിടെ തുല്യപ്രാധാന്യമാണുള്ളത്. സാധാരണയായി ശരാശരി എന്നു പറയുന്ന മിക്ക അവസരത്തിലും നാം മാധ്യത്തെയാണ് പരിഗണിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, ഒരു CFL ബൾബിന്റെ ശരാശരി ആയുസ്സ്, ഒരു പട്ടണത്തിലെ ശരാശരി താപനില ഇവിടെയെല്ലാം ശരാശരിയായി കണക്കാക്കുന്നത് മാധ്യത്തെയാണ്.

ഒരു ദിവസം 5 ചില്ലറ വിൽപ്പനശാലകളിൽ നടന്ന കച്ചവടത്തിലെ വരവുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ചില്ലറ വ്യാപാരി	:	1	2	3	4	5
വിൽപ്പന (1000 രൂപയിൽ)	:	8	23	4	8	2

ഈ ചെറുകിട വ്യാപാരിയുടെ ശരാശരി വിൽപ്പന കാണുന്നതിന്, നാം ചെയ്യുന്നത് വിൽപ്പനയുടെ എല്ലാ വിലകളും കൂട്ടിയതിന് ശേഷം എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയാണ്. ഇത്തരം ശരാശരിയെയാണ് മാധ്യം എന്ന് പറയുന്നത്.

$$\text{മാധ്യം } (AM) = \frac{8+23+4+8+2}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

അതായത്, ശരാശരി പ്രതിദിന വില്പന 9000/- രൂപയാണ്.

ഒരു കൂട്ടം പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ മാധ്യം നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക}}{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

സാധാരണയായി മാധ്യത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ $\bar{x}$ (x ബാർ) എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\bar{x} = \frac{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക}}{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നവിധം

(i) അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ (raw data) മാധ്യം

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നീ n വിലകൾ അടങ്ങിയ ഒരു അസംസ്കൃതഡാറ്റ പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

$$\bar{x} = \frac{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക}}{\text{പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}\right)$$

$$= \frac{\sum x}{n}$$

$$\text{മാധ്യം } = \frac{\sum x}{n}$$

'Σ' എന്നത് തുക കാണുന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിഹ്നമാണ്.

കുറിപ്പ് : ഒരു സംഖ്യാശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക എന്നത് $\sum x = n\bar{x}$ ആണ്.

വിവരണം 5.1

ഒരു കുട നിർമാണകമ്പനി പുതിയ ഒരു ഉൽപ്പന്നം പുറത്തിറക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. അതിനുവേണ്ടി കഴിഞ്ഞ 5 വർഷങ്ങളിൽ പെയ്ത മഴയുടെ അളവ് (സെ.മീറ്ററിൽ) ശേഖരിക്കുന്നു. അവ 120,135,110,142,150 എന്നിവയായാൽ മഴയുടെ ശരാശരി അളവ് കാണുക.

പരിഹാരം

മഴയുടെ ശരാശരി അളവ്

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{120+135+110+142+150}{5} = 131.4 \text{ സെ.മീ.}$$

വിവരണം 5.2

4 ക്ലാസ് പരീക്ഷകളിൽ ഒരു കുട്ടിക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ യഥാക്രമം 52, 48, 33, 27 എന്നിവയാണ്.

a) സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം കാണുക

b) അഞ്ചാമത്തെ പരീക്ഷയിൽ അയാൾ നേടിയ സ്കോർ 45 ആയാൽ, സ്കോറുകളുടെ പുതിയ മാധ്യം എന്തായിരിക്കും.

പരിഹാരം

a) ആദ്യ 4 പരീക്ഷയുടെ ശരാശരി സ്കോർ

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= \frac{52+48+33+27}{4} = 40$$

b) 5-ാമത്തെ പരീക്ഷയ്ക്ക് ശേഷമുള്ള പുതിയ മാധ്യം

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{52+48+33+27+45}{5} = 41$$

വിവരണം 5.3

100 പ്രാപ്തങ്കാങ്ങളുടെ മാധ്യം 50 ആണ്. എന്നാൽ 192,88 എന്നീ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 92, 8 എന്നിങ്ങനെ തെറ്റായി ധരിച്ചാണ് മാധ്യം കണ്ടിരുന്നത്. ശരിയായ മാധ്യം കാണുക.

പരിഹാരം

$\bar{x} = 50, \quad n = 100$

പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക, $\sum x = n\bar{x} = 100 \times 50 = 5000$

എന്നാൽ ഇവിടെ 192, 88 എന്നിവയെ 92, 8 എന്നിങ്ങനെയാണ് ധരിച്ചിരുന്നത്. അതിനാൽ ഈ തുക തെറ്റാണ്.

ശരിയായ തുക $= 5000-92-8 + 192+88 = 5180$

$$\text{ശരിയായ മാധ്യം} = \frac{\text{ശരിയായ തുക}}{\text{എണ്ണം}} = \frac{5180}{100} = 51.8$$

ii) വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ (Discrete Frequency table) മാധ്യം

ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളും അവയുടെ ആവൃത്തിയും കാണും. ഇത്തരം സാഹചര്യത്തിൽ ഓരോ പ്രാപ്താങ്കത്തിനെയും അതിന്റെ ആവൃത്തികൊണ്ട് ഗുണിച്ചശേഷം ഗുണനഫലങ്ങളുടെ തുക കാണുക. ഇതാണ് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ ആകെ തുക. ഈ തുകയെ ആവൃത്തികളുടെ തുക കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ മാധ്യം ലഭിക്കുന്നു.

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\Sigma f}$$

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma fx}{N}$, $N = \Sigma f$ എന്നത് ആകെ ആവൃത്തിയാണ്

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ എന്നീ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ ആവൃത്തികൾ യഥാക്രമം $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയുടെ മാധ്യം കാണുന്നതിന് താഴെപറയുന്ന ക്രമം ഉപയോഗിക്കാം.

1 : $f_1x_1, f_2x_2, \ldots, f_nx_n$ എന്നിവ കാണുക.

2 : $\Sigma fx - f_1x_1 - f_2x_2 - f_3x_3 - \ldots + f_nx_n$ കാണുക.

3 : $\Sigma f - f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$ കാണുക.

4 : മാധ്യം കാണുന്നതിന് $\bar{x} = \dfrac{\sum fx}{\Sigma f}$ എന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുക.

വിവരണം 5.4

കായിക മത്സരത്തിൽ പങ്കെടുക്കുന്നവരുടെ ഉയരത്തെക്കുറിച്ച് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് ക്ലാസിലെ കുട്ടികൾ പഠനം നടത്തുകയാണ്. അവർ 20 മത്സരാർഥികളുടെ ഉയരം കണ്ടെത്തി. അത് ചുവടെ പട്ടികയിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഉയരം (ഇഞ്ചിൽ)	49	53	54	55	66	68	70	80
മത്സരാർഥികളുടെ എണ്ണം	1	2	4	5	3	2	2	1

മത്സരാർഥികളുടെ ഉയരത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

പരിഹാരം

ഉയരം *(x)*	മത്സരാർഥികളുടെ എണ്ണം *(f)*	*fx*
49	1	49
53	2	106
54	4	216
55	5	275
66	3	198
68	2	136
70	2	140
80	1	80
ആകെ	N = 20	1200

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{1200}{20} = 60$$

ഉയരത്തിന്റെ മാധ്യം = 60 ഇഞ്ച്

വിവരണം 5.5

കഴിഞ്ഞ 10 വർഷക്കാലം ഡൽഹി നിവാസികൾക്ക് സംഭവിച്ച കാറപകടങ്ങളെക്കുറിച്ച് സർവ്വെ നടത്തുന്നതിന് ഒരു ഇൻഷുറൻസ് കമ്പനി തീരുമാനിക്കുന്നു. ഒരു റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിൽ വന്നിറങ്ങിയ 200 പേരെ കമ്പനി സർവ്വെ നടത്തി. ഫലം ചുവടെ പട്ടികയിൽ കൊടുക്കുന്നു.

അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം	ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം
0	60
1	10
2	40
3	10
4	80

അപകടങ്ങളുടെ മാധ്യം കാണുക.

പരിഹാരം

x	f	fx
0	70	0
1	10	10
2	40	80
3	10	30
4	70	280
ആകെ	N = 200	400

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$= \frac{400}{200} = 2$$

അപകടങ്ങളുടെ മാധ്യം = 2

iii) തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ (Continuous Frequency Table) മാധ്യം

ഒരു തുടരാവൃത്തി പട്ടികയിൽ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ ക്ലാസുകളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മാധ്യം കാണുന്നതിന് സമാനമായ രീതിയിലാണ് ഇവിടെയും മാധ്യം കാണുന്നത്. എന്നാൽ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ ക്ലാസുകളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നതിനാൽ ഓരോ പ്രാപ്താങ്കത്തിന്റെയും വില നമുക്ക് അറിയാൻ സാധിക്കില്ല. അതിനാൽ ഈ വിലകളെക്കുറിച്ച് നമുക്ക് ചില ഊഹങ്ങൾ നടത്തേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ ഒരു ക്ലാസിൽ വരുന്ന എല്ലാ വിലകൾക്കും തുല്യ വിലയാണെന്നും അത് ക്ലാസിന്റെ മധ്യവിലയ്ക്ക് തുല്യമായിരിക്കുമെന്നും നമ്മൾ അനുമാനിക്കുന്നു. അതായത് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ വിലയായി ക്ലാസുകളുടെ മധ്യവിലയെ കണക്കാക്കുന്നു. മാധ്യം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം.

$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$, N = ആകെ ആവൃത്തി

ഇവിടെ നാം കാണുന്നത് മാധ്യത്തിന്റെ ഏകദേശ വിലയാണ് (കാരണമെന്തായിരിക്കും?)

വിവരണം 5.6

ഒരു പ്രത്യേക മരുന്നിന്റെ ഫലത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിനായി തെരഞ്ഞെടുത്ത 55 രോഗികളുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണമാണ് ചുവടെ പട്ടികയിലുള്ളത്.

വയസ്സ്	രോഗികളുടെ എണ്ണം
0 - 10	5
10 - 20	7
20 - 30	17
30 - 40	12
40 - 50	5
50 - 60	2
60 - 70	7

രോഗിയുടെ വയസ്സിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

പരിഹാരം

വയസ്സ്	മധ്യവില (x)	രോഗികളുടെ എണ്ണം (f)	fx
0 - 10	5	5	25
10 - 20	15	7	105
20 - 30	25	17	425
30 - 40	35	12	420
40 - 50	45	5	225
50 - 60	55	2	110
60 - 70	65	7	455
ആകെ		N =55	1765

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{1765}{55} = 32.09$$

വയസ്സുകളുടെ മാധ്യം = 32.09

വിവരണം 5.7

ഒരു ചെറുകിട പാർസൽ കമ്പനി വിതരണം ചെയ്ത പാഴ്സലുകളുടെ ഭാരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. പാഴ്സലുകളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

ഭാരം	പാഴ്സലുകളുടെ എണ്ണം
10.0-10.9	2
11.0-11.9	3
12.0-12.9	5
13.0-13.9	8
14.0-14.9	12
15.0-15.9	15
16.0-16.9	13
17.0-17.9	11
18.0-18.9	6
19.0-19.9	2

പരിഹാരം

ഭാരം(കി.ഗ്രാം)	മധ്യവില (x)	പാഴ്സലുകളുടെ എണ്ണം (f)	fx
10.0 - 10.9	10.45	2	20.90
11.0 - 11.9	11.45	3	34.35
12.0 - 12.9	12.45	5	62.25
13.0 - 13.9	13.45	8	107.60
14.0 - 14.9	14.45	12	173.40
15.0 - 15.9	15.45	15	231.75
16.0 - 16.9	16.45	13	213.85
17.0 - 17.9	17.45	11	191.95
18.0 - 18.9	18.45	6	110.70
19.0 - 19.9	19.45	2	38.90
ആകെ		N = 67	1185.65

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{1185.65}{67} = 15.4$$

ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം = 15.4 kg

മാധ്യത്തിന്റെ ഗണിത പ്രത്യേകതകൾ (Mathematical properties of mean)

ഒരു വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യത്തിന് താഴെ പറയുന്ന ഗണിത പ്രത്യേകതകൾ ഉണ്ട്.

1. മാധ്യത്തിൽ നിന്നും എല്ലാ വിലകൾക്കുമുള്ള അന്തരങ്ങളുടെ തുക എല്ലായ്പ്പോഴും പൂജ്യം ആയിരിക്കും.

   അതായത്, $\sum(x-\bar{x})=0$

2. ഒരു ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ അന്തരങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക ഏറ്റവും കുറവാകുന്നത് മാധ്യത്തിൽ നിന്നും അന്തരങ്ങളെടുക്കുമ്പോഴാണ്.

   അതായത്, $\Sigma(x-a)^2$ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വില സ്വീകരിക്കുന്നത് $a=\bar{x}$ ആകുമ്പോഴാണ്.

3. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നിവയുടെ മാധ്യം $\bar{x}$ ആണെങ്കിൽ $(x_1 \pm a),(x_2 \pm a),\ldots,(x_n \pm a)$ എന്നിവയുടെ മാധ്യം $(\bar{x} \pm a)$ ആയിരിക്കും.

   അതായത്, എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളോടും കൂടി 'a' എന്ന വില കൂട്ടിയാൽ മാധ്യത്തിത്തിന്റെ വില 'a' കൂടും. എല്ലാത്തിൽ നിന്നും 'a' കുറച്ചാൽ മാധ്യത്തിന്റെ വില 'a' കുറയും

4. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നിവയുടെ മാധ്യം $\bar{x}$ ആണ്. എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെയും $p,(p \neq 0)$ എന്ന സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പുതിയ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ മാധ്യം $p\bar{x}$ ആയിരിക്കും.

പ്രവർത്തനം

10, 25, 17, 22, 20, 35, 28, 42, 68, 53 എന്നീ വിലകൾ പരിഗണിക്കുക.

a) ഈ ഡാറ്റയിൽ $\sum(x-\bar{x})=0$ ആണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

b) മുകളിൽ രണ്ടാമതായി പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പ്രത്യേകതയുടെ ആധികാരികത 'a' യ്ക്ക് ഏതെങ്കിലും ഒരു വില നൽകി പരിശോധിക്കുക.

c) താഴെ പറയുന്ന അവസരങ്ങളിൽ മാധ്യത്തിന് എന്ത് സംഭവിക്കും.

   i) എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളോടും 3 കൂട്ടുന്നു.

   ii) എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളിൽ നിന്നും 3 കുറയ്ക്കുന്നു.

d) താഴെ പറയുന്ന അവസരത്തിൽ മാധ്യത്തിന് സംഭവിക്കുന്നതെന്ത്?

   i) എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേയും 2 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നു.

   ii) എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെയും 2 കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നു.

മാധ്യത്തിന്റെ മേന്മകളും പോരായ്മകളും (Merits and demerits of mean)

ഒരു നല്ല കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനത്തിന് വേണ്ട മിക്ക പ്രത്യേകതകളും ഉള്ള ഒരളവാണ് മാധ്യം. മാധ്യത്തിന്റെ ചില മേന്മകളും പോരായ്മകളും താഴെ പറയുന്നു.

മേന്മകൾ (Merits)

1. കൃത്യമായ നിർവചനം ഉണ്ട്.
2. കണക്കാക്കുന്നതിനും മനസിലാക്കുന്നതിനും എളുപ്പമാണ്.
3. എല്ലാ വിലകളേയും അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ് മാധ്യം കാണുന്നത്.
4. പ്രതിരൂപണത്തിലെ മാറ്റം കൂടുതലായി ബാധിക്കുന്നില്ല.
5. തുടർഗണിത പ്രവർത്തനങ്ങൾക്ക് അനുയോജ്യമാണ്.

പോരായ്മകൾ (Demerits)

1. അഗ്ര വിലകളുടെ സ്വാധീനം കൂടുതലാണ്.
2. കണക്കുകൂട്ടാതെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല.
3. ബുദ്ധിശക്തി, സത്യസന്ധത, സൗന്ദര്യം തുടങ്ങിയ ഗുണാത്മക പ്രത്യേകതകൾക്ക് ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയില്ല.
4. ഉയർന്ന പരിധിയോ താഴ്ന്ന പരിധിയോ ഇല്ലാത്ത ക്ലാസുകൾ ഉണ്ടായിരുന്നാൽ മാധ്യം കണക്കുകൂട്ടാൻ കഴിയില്ല.

പരിഗണനാ മാധ്യം (Weighted Arithmatic Mean)

സാധാരണയായി മാധ്യം കാണുമ്പോൾ ഡാറ്റയിലെ എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്കും തുല്യ പരിഗണനയാണ് നൽകാറുള്ളത്. എന്നാൽ എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്കും തുല്യ പ്രാധാന്യം ഇല്ലാത്ത അവസരങ്ങളുമുണ്ട്. ചില പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്ക് മറ്റു ചിലതിനെ അപേക്ഷിച്ച് പ്രാധാന്യം കൂടുതൽ നൽകേണ്ട അവസരങ്ങൾ ഉണ്ടാകാറുണ്ട്. ഇത്തരം അവസരങ്ങളിലാണ് പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്ക് വ്യത്യസ്ത പരിഗണനകൾ നൽകേണ്ടി വരുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന്, ജനങ്ങളുടെ ജീവിതനിലവാരത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങൾ പഠിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. നാം ഇതുവരെ ഉപയോഗിച്ചതരം മാധ്യം കാണുന്നത് ഇവിടെ അപ്രായോഗികമാണ്. എന്തെന്നാൽ ആളുകൾ പല സാധനങ്ങൾക്കും തുല്യ പ്രാധാന്യമല്ല നൽകുന്നത്. അരി, ഗോതമ്പ് തുടങ്ങിയവ, പഞ്ചസാര, തേയില, ഉപ്പ് തുടങ്ങിയവയേക്കാൾ കൂടുതൽ അളവിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. അതിനാൽ തന്നെ ഈ എല്ലാ സാധനങ്ങൾക്കും ഒരേ പരിഗണന നൽകാൻ സാധിക്കില്ല.

ഓരോ പ്രാപ്താങ്കത്തിനും അതിന്റെ പ്രാധാന്യമനുസരിച്ചുള്ള പരിഗണന നൽകിക്കൊണ്ട് കണക്കാക്കുന്ന മാധ്യമാണ് പരിഗണനാ മാധ്യം (Weighted Arithmatic Mean). വില സൂചികകളുടെ നിർണയത്തിൽ പരിഗണനാമാധ്യങ്ങൾ വ്യാപകമായി ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്.

പരിഗണനാ മാധ്യം കണക്കാക്കുന്ന വിധം

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നീ വിലകളുടെ പരിഗണനാസംഖ്യ $w_1, w_2, \ldots, w_n$ എന്നിവയാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അങ്ങനെയെങ്കിൽ പരിഗണനാമാധ്യം എന്നത്

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

വിവരണം 5.8

ഒരു കുട്ടിക്ക് ഒരു പരീക്ഷയിൽ ഗണിതം, ഭൗതികം, രസതന്ത്രം, ഇംഗ്ലീഷ് എന്നിവയ്ക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ യഥാക്രമം 82, 86, 90, 70 എന്നിവയാണ്. ഇവയ്ക്ക് ലഭിച്ച ക്രഡിറ്റുകൾ യഥാക്രമം 3, 5, 3, 1 എന്നിവ ആയാൽ മാധ്യം കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ 82, 86, 90, 70 എന്നിവയുടെ പരിഗണനാ സംഖ്യ യഥാക്രമം 3, 5, 3, 1 എന്നിവയാണ്.

x :	82	86	90	70
w :	3	5	3	1

$$\bar{x} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

$$= \frac{82\times3+86\times5+90\times3+70\times1}{3+5+3+1}$$

$$= \frac{1016}{12}$$

$$= 84.67$$

സംയുക്ത മാധ്യം (Combined Arithmetic Mean)

4 ആൺകുട്ടികൾക്കും 6 പെൺകുട്ടികൾക്കുമായി നടത്തിയ ഒരു ക്ലാസ് പരീക്ഷയിൽ ആൺകുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 35 ഉം പെൺകുട്ടികളുടേത് 75 ഉം ആണ്. എല്ലാ കുട്ടികളെയും ഒരുമിച്ച് പരിഗണിച്ചാലുള്ള സ്കോറിന്റെ മാധ്യം എന്താകും?

അത് $\frac{35+75}{2} = 55$ ആണോ?

തീർച്ചയായും അല്ല, ഇവിടെ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണവും പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണവും തുല്യമല്ല. പെൺകുട്ടികളുടെ സ്കോറിന്റെ മാധ്യത്തിന് ആൺകുട്ടികളുടെ സ്കോറിന്റെ മാധ്യത്തിനേക്കാൾ പ്രാധാന്യമുണ്ട് (എന്തുകൊണ്ടായിരിക്കാം?)

ഇനി നമുക്ക് എല്ലാ കുട്ടികളുടേയും കൂടി സ്കോറിന്റെ മാധ്യം കാണാൻ ശ്രമിക്കാം.

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\text{കുട്ടികളുടെ ആകെ സ്കോർ}}{\text{കുട്ടികളുടെ എണ്ണം}}$$

$$= \frac{\text{ആൺകുട്ടികളുടെ ആകെ സ്കോർ} + \text{പെൺകുട്ടികളുടെ ആകെ സ്കോർ}}{\text{ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം} + \text{പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം}}$$

$$= \frac{4\times35+6\times75}{4+6} = \frac{140+450}{10} = 59$$

അതായത് ആൺകുട്ടികളും പെൺകുട്ടികളും ചേർന്ന കൂട്ടത്തിന്റെ സ്കോറിന്റെ മാധ്യം 59 ആണ്.

> പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം n_1, n_2 ആയിട്ടുള്ള രണ്ട് ഗ്രൂപ്പുകളുടെ മാധ്യങ്ങൾ $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ എന്നിവ ആയാൽ ഇവരുടെ സംയുക്തഗ്രൂപ്പിന്റെ മാധ്യം,
>
> $\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2}$ ആയിരിക്കും.

വിവരണം 5.9

100 കുട്ടികൾക്ക് ഒരു പരീക്ഷയിൽ ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 50 ആണ്. അതേ പരീക്ഷയ്ക്ക് വേറെ 200 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 57 ആണ്. എങ്കിൽ ആകെ കുട്ടികളുടെ സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം എന്തായിരിക്കും?

പരിഹാരം

നമുക്ക് അറിയാവുന്നത്,

$\overline{x}_1 = 50, \overline{x}_2 = 57, n_1 = 100, n_2 = 200$

രണ്ട് കൂട്ടരുടേയും കൂടിയുള്ള സംയുക്ത മാധ്യം,

$$\bar{x} = \frac{n_1\overline{x_1} + n_2\overline{x_2}}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{100 \times 50 + 200 \times 57}{100 + 200}$$

$$= 54.67$$

വിവരണം 5.10

ഒരു ക്ലാസിലെ 150 കുട്ടികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം 60 കി.ഗ്രാം ആണ്. ആ ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം 70 കി.ഗ്രാമും പെൺകുട്ടികളുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം 55 കി. ഗ്രാമും ആണ്. എന്നാൽ ആ ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടേയും പെൺകുട്ടികളുടേയും എണ്ണം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്നവ,

സംയുക്തമാധ്യം, $\bar{x}$ = 60 കി.ഗ്രാം

ആൺകുട്ടികളുടെ മാധ്യം, $\overline{x_1}$ = 60 കി.ഗ്രാം

പെൺകുട്ടികളുടെ മാധ്യം, $\bar{x}_2$ = 55 കി.ഗ്രാം

ആകെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം = 150

ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം 'x' എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം 150-x ആയിരിക്കും

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

അതായത്, $60 = \dfrac{70x + 55(150 - x)}{150}$

$$\Rightarrow 9000 = 70x + 8250 - 55x$$

$$\Rightarrow 15x = 9000 - 8250 = 750$$

$$\Rightarrow x = \frac{750}{15} = 50$$

$\therefore$ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം = 50

പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണം = 150-50=100

> പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം യഥാക്രമം $n_1, n_2, \dots, n_k$ ആയ k ഗ്രൂപ്പുകളുടെ മാധ്യങ്ങൾ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$ എന്നിവയായാൽ ഇവയുടെ സംയുക്തമാധ്യം
>
> $$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \dots + n_k\bar{x}_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$$ ആയിരിക്കും

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. തെരഞ്ഞെടുത്ത 10 നോവലുകളിലെ പേജുകളുടെ എണ്ണം 415, 398, 497, 399, 402, 405, 395, 412, 407, 400 എന്നിവയാണ്. പേജുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.
2. 20 സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം 25 ആണ്. 52,15 എന്നീ വിലകളെ 42, 51 എന്നിങ്ങനെ തെറ്റായാണ് ധരിച്ചിരുന്നത്. ശരിയായ മാധ്യം കാണുക.
3. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ 70 ജോലിക്കാരുടെ ഭാരങ്ങൾ ചുവടെ പട്ടികയിൽ കൊടുക്കുന്നു. ഭാരങ്ങളുടെ മാധ്യം കാണുക.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
60	5
62	10
63	12
65	18
67	15
68	10

4. 30 വാഹനങ്ങളിൽ നടത്തിയ ഇന്ധനക്ഷമതാ പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മാധ്യം കാണുക.

ഇന്ധനക്ഷമത (കി.മീ/ലിറ്റർ)	വാഹനങ്ങളുടെ എണ്ണം
7.5-12.5	3
12.5-17.5	5
17.5-22.5	15
22.5-27.5	5
27.5-32.5	2

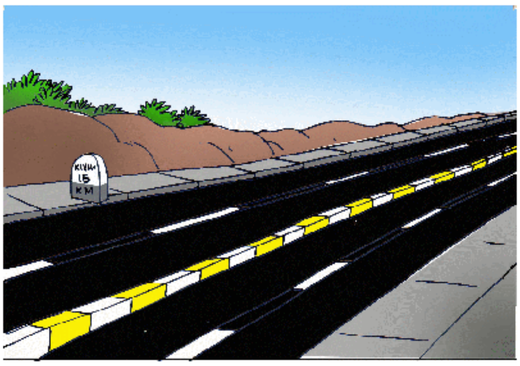
5. വളരെ പഴക്കം ചെന്ന 50 കാറുകളിൽ നടത്തിയ പരിശോധനയിൽ അവയുടെ കാലപ്പഴക്കത്തെ സംബന്ധിച്ച് ചുവടെയുള്ള പട്ടിക ലഭിച്ചു. കാലപ്പഴക്കത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

കാറിന്റെ കാലപ്പഴക്കം(വർഷത്തിൽ)	കാറുകളുടെ എണ്ണം
16-18	20
19-21	18
22-24	8
25-27	4

6. ഒരു ക്ലാസിലെ 100 കുട്ടികളുടെ മാർക്കിന്റെ മാധ്യം 39 ആണ്. ആൺകുട്ടികളുടെ മാർക്കിന്റെ മാധ്യം 35 ഉം പെൺകുട്ടികളുടേത് 45 ഉം ആണ്. ക്ലാസിലെ ആൺകുട്ടികളുടേയും പെൺകുട്ടികളുടേയും എണ്ണം കാണുക.

7. ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് ഒരു കുട്ടിക്ക് വിവിധ വിഷയങ്ങളിൽ ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ഇംഗ്ലീഷ് - 46, ഇക്കണോമിക്സ് - 58, അക്കൗണ്ടൻസി - 72, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് - 67. ഇംഗ്ലീഷിനും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിനും ഇരട്ടി പരിഗണന നൽകാൻ തീരുമാനിക്കുന്നു. മാർക്കുകളുടെ മാധ്യം കാണുക.

5.2. മധ്യാങ്കം (Median)



ഒരു കുടുംബത്തിൽ 5 കുട്ടികളുണ്ട്. അവരുടെ വയസ്സുകൾ 10, 8, 5, 4, 12 എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഇതിൽ പ്രായത്തിനനുസരിച്ച് മധ്യഭാഗത്തെയാളിന് എത്ര വയസ്സായിരിക്കും. നിങ്ങൾക്ക് കാണാമോ? അതിനായി നമുക്ക് ഈ വയസ്സുകളെ ആരോഹണ ക്രമത്തിലെഴുതാം.

4, 5, 8, 10, 12.

മധ്യഭാഗത്ത് വരുന്ന കുട്ടിയുടെ വയസ്സ് എന്നത് ഇതിലെ ഏറ്റവും മധ്യഭാഗത്തെ സംഖ്യയായിരിക്കും. ഇവിടെ അത് 8 ആണ്. ഈ 8 നെയാണ് നാം തന്നിരിക്കുന്ന 5 സംഖ്യകളുടെ മധ്യാങ്കം എന്ന് പറയുന്നത്.

> ഒരു ഡാറ്റയിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണ ക്രമത്തിലോ എഴുതുമ്പോൾ ഏറ്റവും മധ്യത്തിൽ വരുന്ന വിലയാണ് മധ്യാങ്കം.

അതായത്, ഒരു വിതരണത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം എന്ന് പറയുന്നത് ആ വിതരണത്തെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കി വേർതിരിക്കുന്ന വിലയാണ്. വിതരണത്തിന്റെ പകുതി ഭാഗം മധ്യാങ്കത്തേക്കാൾ ചെറുതും പകുതി ഭാഗം മധ്യാങ്കത്തിനേക്കാൾ വലുതും ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് മധ്യാങ്കത്തെ ഒരു സ്ഥാനീയ ശരാശരി (Positional average) എന്നു വിളിക്കുന്നു.

മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കുന്നവിധം

i) അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ മധ്യാങ്കം കണക്കാക്കൽ

n വിലകളുള്ള ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റ പരിഗണിക്കുക. മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് ആദ്യം ഇതിലെ വിലകളെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതുക. മധ്യാങ്കം ഇതിലെ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാമത്തെ വിലയായിരിക്കും.

> ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ മധ്യാങ്കം എന്നത് ആ ഡാറ്റ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതുമ്പോൾ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാമത്തെ സ്ഥാനത്ത് വരുന്ന വിലയായിരിക്കും.

വിവരണം 5.11

രഹനയ്ക്ക് ഒമ്പത് ഗണിത ക്വിസ് മത്സരങ്ങളിൽ ലഭിച്ച സ്കോറുകളാണ് 88, 97, 87, 92, 90, 88, 93, 98, 95 എന്നിവ. സ്കോറുകളുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ആരോഹണക്രമത്തിലാക്കിയാൽ.

87, 88, 88, 90, 92, 93, 95, 96, 98

ഇവിടെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം, n = 9

മധ്യാങ്കം $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാമത്തെ വില

$= \left(\frac{9+1}{2}\right)$-ാമത്തെ വില

= 5-ാമത്തെ വില

= 92

വിവരണം 5.12

ആനന്ദിന്റെ കുടുംബം വേനലവധിക്ക് തിരുവനന്തപുരത്ത് നിന്നും വയനാട്ടിലേക്ക് ഒരു യാത്ര പോകുകയാണ്. അവർ 8 ജില്ലകളിലൂടെ സഞ്ചരിച്ചു. ആ ദിവസങ്ങളിൽ ഈ 8 ജില്ലകളിലെ പെട്രോൾ വിലകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

71.9, 72.3, 72.4, 72.32, 73, 73.1, 72.2, 72.48 (രൂപയിൽ) പെട്രോൾ വിലകളുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

പരിഹാരം

ആരോഹണക്രമത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ളവയെ ക്രമീകരിച്ചാൽ,

71.9, 72.2, 72.3, 72.32, 72.4, 72.48, 73, 73.1

ഇവിടെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം, n=8

മധ്യാങ്കം $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$-ാമത്തെ വില

$= \left(\frac{8+1}{2}\right)$-ാമത്തെ വില $=$ 4.5-ാമത്തെ വില

പക്ഷേ, ഇവിടെ 4.5 എന്ന സ്ഥാനമില്ല അപ്പോൾ നാം ചെയ്യേണ്ടത് 4-ാമത്തെയും 5-ാമത്തെയും വിലകളുടെ മാധ്യം എടുക്കുക എന്നതാണ്.

$\therefore$ മധ്യാങ്കം = 4, 5 എന്നീ സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം

$$= \frac{72.32 + 72.4}{2} = 72.36$$

പെട്രോൾ വിലകളുടെ മധ്യാങ്കം = 72.36 രൂപ

ii) വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മധ്യാങ്കം

ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് വിലകളെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ ക്രമീകരിച്ചതിന് ശേഷം $\frac{N+1}{2}$ എന്ന സഞ്ചിതാവൃത്തിവരുന്ന വില കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി. ഇതിന് വേണ്ടി താഴെപറയുന്ന ക്രമം ഉപയോഗിക്കാം.

1 : ഡാറ്റയെ ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതുക.

2 : സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക കാണുക.

3 : $\frac{N+1}{2}$ കാണുക, N ആകെ ആവൃത്തി.

4 : $\frac{N+1}{2}$-ാമത്തെ വിലയായിരിക്കും മധ്യാങ്കം .

വിവരണം 5.13

ഒരു നിർമാണ കമ്പനിയിലെ ജോലിക്കാരുടെ ദിവസവേതനം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

ദിവസവേതനം (100 രൂപയിൽ)	6	8	10	12	15	18
ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	20	14	7	16	12	2

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വിലകൾ ആരോഹണക്രമത്തിലാണ്. സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ദിവസവേതനം (100 രൂപയിൽ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	സഞ്ചിതാവൃത്തി
6	20	20
8	14	34
10	7	41
12	16	57
15	12	69
18	2	71

ആകെ ആവൃത്തി, N=71, $\frac{N+1}{2} = \frac{72}{2} = 36$

$\therefore$ ഡാറ്റയിൽ 36-ാമത് വിലയാണ് മധ്യാങ്കം. അത് 10 ആണ്

$\therefore$ മധ്യാങ്കം = രൂപ 1000/-

വിവരണം 5.14

42 കുട്ടികൾക്ക് ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ വിവരം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

സ്കോറുകൾ	9	20	25	40	50	80
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	4	6	11	13	7	2

സ്കോറുകളുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന വിലകൾ ആരോഹണക്രമത്തിലാണ്. അവയുടെ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

സ്കോർ	ആവൃത്തി	സഞ്ചിതാവൃത്തി
9	4	4
20	6	10
25	11	21
40	13	33
50	7	40
80	2	42
	N = 42	

ആകെ ആവൃത്തി, N = 42

$$\frac{N+1}{2} = \frac{43}{2} = 21.5$$

$\therefore$ മധ്യാങ്കം 21-ാമത്തേതിന്റെയും 22-ാമത്തേതിന്റെയും മാധ്യമായിരിക്കും.

മധ്യാങ്കം $= \frac{25+40}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$

സ്കോറുകളുടെ മധ്യാങ്കം $= 32.5$

iii) തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ മധ്യാങ്കം

മധ്യാങ്കം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ആദ്യം സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കുക. ആകെ ആവൃത്തി N എന്നിരിക്കട്ടെ. $\frac{N}{2}$ സഞ്ചിതാവൃത്തിയുള്ള ക്ലാസ് കണ്ടെത്തുക. ഇതിനെ നാം മധ്യാങ്ക ക്ലാസ് എന്ന് പറയുന്നു.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം,

$$\text{മധ്യാങ്കം} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$$

ഇവിടെ,

l - മധ്യാങ്ക ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി.

c - മധ്യാങ്ക ക്ലാസിന്റെ അന്തരം.

f - മധ്യാങ്ക ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി.

m - മധ്യാങ്ക ക്ലാസിന് തൊട്ടുമുമ്പുള്ള ക്ലാസിന്റെ സഞ്ചിതാവൃത്തി.

മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് പ്രവർത്തന ക്രമം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1 : ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസ് (Inclusive class) ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയെ കേവല ക്ലാസുകൾ (exclusive class) ആക്കുക.

2 : സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ കാണുക

3 : $\frac{N}{2}$ കാണുക, N- എന്നത് ആകെ ആവൃത്തി

4 : $\frac{N}{2}$ സഞ്ചിതാവൃത്തിയുള്ള ക്ലാസ് കണ്ടെത്തുക.

5 : സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുക.

വിവരണം 5.15

63 കുടുംബങ്ങളുടെ വരുമാനത്തിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

വരുമാനം (100 രൂപയിൽ)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം	6	12	18	13	9	4	1

വരുമാനത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

പരിഹാരം

സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

ക്ലാസ്സ്	ആവൃത്തി	സഞ്ചിതാവൃത്തി
30-40	6	6
40-50	12	18
50-60	18	36
60-70	13	49
70-80	9	58
80-90	4	62
90-100	1	63
	N = 63	

$\frac{N}{2} = 31.5$

∴ മധ്യാങ്ക ക്ലാസ് 50-60 ആകുന്നു

മധ്യാങ്കം $= l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f}$

ഇവിടെ $l = 50$, $c = 10$, $f = 18$, $m = 18$

$$\text{മധ്യാങ്കം} = 50 + \frac{(31.5 - 18) \times 10}{18}$$

$$= 50 + \frac{135}{18} = 57.5$$

വിവരണം 5.16

ഇക്ണോമിക്സ് പരീക്ഷയിൽ 50 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകളുടെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

മാർക്കുകൾ	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	4	6	10	5	7	3	9	6

പരിഹാരം

ഇവിടെ ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസുകളാണുള്ളത് മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് അവയെ കേവല ക്ലാസുകളാക്കി മാറ്റണം.

മാർക്ക്	കേവല ക്ലാസ്സ്	ആവൃത്തി	സഞ്ചിതാവൃത്തി
10-14	9.5-14.5	4	4
15-19	14.5-19.5	6	10
20-24	19.5-24.5	10	20
25-29	24.5-29.5	5	25
30-34	29.5-34.5	7	32
35-39	34.5-39.5	3	35
40-44	39.5-44.5	9	44
45-49	44.5-49.5	6	50
		$N = 50$	

$N = 50 \qquad \therefore \frac{N}{2} = 25$

മധ്യാങ്ക ക്ലാസ് 24.5 - 29.5 ആകുന്നു.

$l = 24.5$, $c = 5$, $f = 5$, $m = 20$

$$\text{മധ്യാങ്കം} = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)c}{f} = 24.5 + \frac{(25-20)5}{5} = 29.5$$

5.2.1 ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നവിധം

മധ്യാങ്കത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ഗുണം അതിനെ ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് കാണാൻ സാധിക്കുമെന്നതാണ്. മധ്യാങ്കം ഒരു സറാനീയ ശരാശരി ആണ്. ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് രണ്ട് മാർഗങ്ങളാണുള്ളത്.

i) ഒരു സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം ഉപയോഗിച്ച് (ആരോഹണ അല്ലെങ്കിൽ അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം)

ii) രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രങ്ങളും ഉപയോഗിച്ച്

i) ഒരു സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നവിധം

ആരോഹണ അല്ലെങ്കിൽ അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന ഘട്ടങ്ങളുണ്ട്.

ഘട്ടം 1 : ആരോഹണ (അവരോഹണ) സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം വരയ്ക്കുക.

ഘട്ടം 2 : $\frac{N}{2}$ കണ്ടുപിടിച്ച് Y അക്ഷത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തുക. N- ആകെ ആവൃത്തി.

ഘട്ടം 3 : $\frac{N}{2}$ വിൽ നിന്നും Y അക്ഷത്തിന് ഒരു ലംബം വരയ്ക്കുക. ഇത് സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു A എന്ന് കരുതുക.

ഘട്ടം 4 : A യിൽ നിന്ന് X അക്ഷത്തിന് ലംബം വരയ്ക്കുക. ഇത് X അക്ഷത്തിൽ k ỳ Ài ŋ pП _ ŋu ḫ ŋsâ x വിലയാണ് മധ്യാങ്കം

വിവരണം 5.17

100 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം ഗ്രാഫുപയോഗിച്ച് കാണുക.

മാർക്ക്	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	7	10	21	27	22	9	4

പരിഹാരം

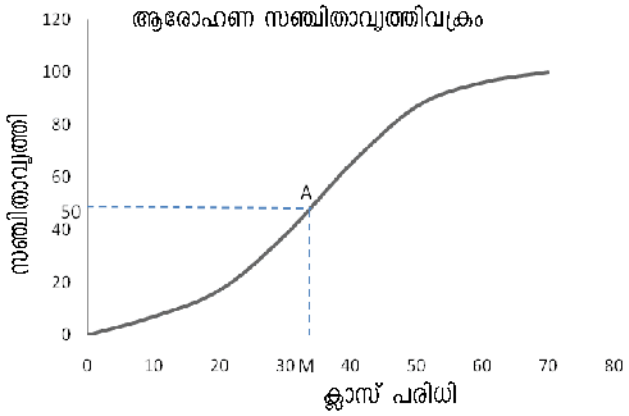
a) ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം ഉപയോഗിച്ച്

ആദ്യം നമുക്ക് ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക കാണാം.

ഉയർന്ന ക്ലാസ്സ് പരിധി	ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി
10	7
20	17
30	38
40	65
50	87
60	96
70	100

$N = 100, \quad \therefore \frac{N}{2} = 50$

ഒരു ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം വരയ്ക്കുക



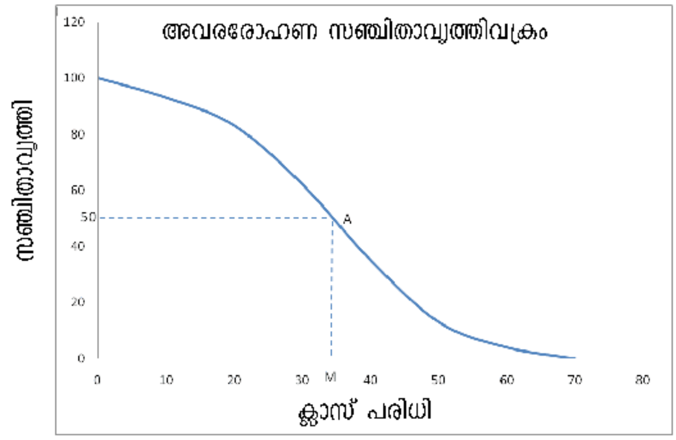
$\therefore$ മധ്യാങ്കം = 34

b) അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം ഉപയോഗിച്ച്

അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം വരയ്ക്കുന്നതിന് ആദ്യം അവരോഹണ സഞ്ചി താവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കണം.

താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധി	അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി
0	100
10	93
20	83
30	62
40	35
50	13
60	4

ഒരു അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രം വരയ്ക്കുക.



മധ്യാങ്കം = 34

ii) രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നവിധം

രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് ചുവടെ കൊടുക്കുന്ന ഘട്ടങ്ങൾ ഉണ്ട്.

ഘട്ടം 1 : ഒരു പേപ്പറിൽ ഒരേ അക്ഷങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നു.

ഘട്ടം 2 : രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങളും കൂടിച്ചേരുന്ന ബിന്ദുവിനെ A എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു.

ഘട്ടം 3 : A യിൽ നിന്നും X അക്ഷത്തിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക. ഈ ലംബം X അക്ഷത്തിൽ സ്പർശിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x വിലയാണ് മധ്യാങ്കം.

വിവരണം 5.18

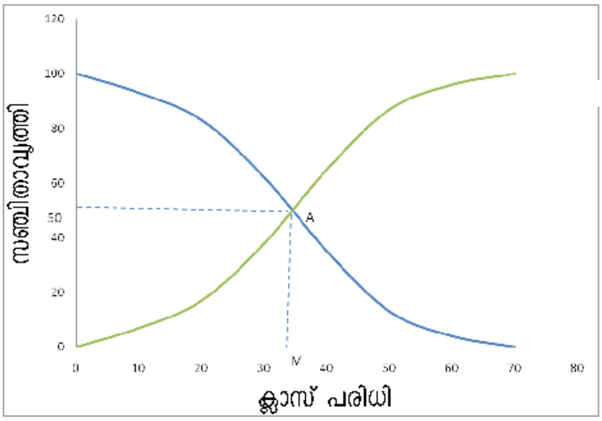
വിവരണം 5.17 ലെ ഡാറ്റ ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കാണുക.

പരിഹാരം

രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടികകളും നിർമിക്കുക.

ഉയർന്ന ക്ലാസ് പരിധി	ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി	താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധി	അവരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി
10	7	0	100
20	17	10	93
30	38	20	83
40	65	30	62
50	87	40	35
60	96	50	13
70	100	60	4

രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തി വക്രങ്ങളും ഒരേ പ്രതലത്തിൽ വരയ്ക്കുക



മധ്യാങ്കം = 34

5.2.2. മധ്യാങ്കത്തിന്റെ മേൻമകളും പോരായ്മകളും (Merits and demerits of Median)

മേന്മകൾ

1) ഇതിന് കൃത്യമായ നിർവചനം ഉണ്ട്.
2) കണക്ക് കൂട്ടുന്നതിന് എളുപ്പമാണ്. ചില അവസരങ്ങളിൽ ഒരു ചെറിയ പരിശോധന വഴിയും മധ്യാങ്കം കാണാം.
3) അഗ്ര വിലകൾ ബാധിക്കുന്നില്ല.
4) ഉയർന്നപരിധിയോ, താഴ്ന്നപരിധിയോ ഇല്ലാത്ത ക്ലാസുകളുള്ള അവസരത്തിലും മധ്യാങ്കം കാണുവാൻ സാധിക്കും.
5) ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതുവാൻ കഴിയുന്ന, എന്നാൽ സംഖ്യാരൂപത്തിലെഴുതാൻ കഴിയാത്ത ഗുണാത്മക ഡാറ്റയ്ക്ക് കാണാൻ സാധിക്കുന്ന ഒരേയൊരു ശരാശരിയാണ് മധ്യാങ്കം.
6) മറ്റ് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേക്കാൾ തീർത്തും വ്യത്യസ്ഥമായ ഒരു പ്രാപ്താങ്കം വരുന്ന അവസരത്തിൽ ശരാശരിയായി ഉപയോഗിക്കുന്നതിന് ഏറ്റവും യോജിച്ചത് മധ്യാങ്കമാണ്.

പോരായ്മകൾ

1) ചില അവസരങ്ങളിൽ മധ്യാങ്കത്തെ കൃത്യമായി കാണുവാൻ സാധിക്കില്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ട സംഖ്യയാണെങ്കിൽ മധ്യാങ്കം കാണുന്നതിന് മധ്യത്തിലുള്ള രണ്ട് വിലകളുടെ മാധ്യമാണ് കാണുന്നത്. ഇത് ഒരു ഏകദേശ വിലമാത്രമാകുന്നു.
2) ഇത് എല്ലാ വിലകളെയും അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതല്ല.
3) പ്രതിരൂപണത്തിൽ വരുന്ന മാറ്റങ്ങൾ ഇതിനെ ബാധിക്കുന്നു.
4) തുടർഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് ഇതിനെ ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയില്ല.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു കായികോപകരണ വിൽപ്പന സ്ഥാപനത്തിലെ മാനേജർ കഴിഞ്ഞ ഏഴു മാസങ്ങളിൽ വിറ്റ ക്രിക്കറ്റ് പന്തുകളുടെ കണക്ക് രേഖപ്പെടുത്തിയത് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

   132, 121, 119, 116, 130, 121, 131. മധ്യാങ്കം കാണുക.

2. 10 കുട്ടികളുടെ ഭാരം (കിലോഗ്രാമിൽ) കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

   31, 35, 27, 29, 32, 43, 37, 41, 34, 28. മധ്യാങ്കം കാണുക. 43 കി.ഗ്രാം എന്ന ഭാരം മാറ്റി 48 കി.ഗ്രാം ഭാരം പരിഗണിച്ചാൽ പുതിയ മധ്യാങ്കം ഏതായിരിക്കും.

3. 43 കുട്ടികളുടെ മാർക്കുകൾ പട്ടികയിൽ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

മാർക്ക് :	20	9	25	50	40	80
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം :	6	4	16	7	8	2

4. ബൾബുകളുടെ പ്രവർത്തനദൈർഘ്യം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് 80 ബൾബുകൾ തെരഞ്ഞെടുത്ത് പരിശോധിക്കുന്നു. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക ലഭിക്കുന്നു. പ്രവർത്തനദൈർഘ്യത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

പ്രവർത്തന ദൈർഘ്യം (മണിക്കൂറിൽ)	52.5 - 63.5	63.5 - 74.5	74.5 - 85.5	85.5 - 96.5	96.5 - 107.5	107.5 - 118.5
ബൾബുകളുടെ എണ്ണം	12	23	18	6	14	5

5. 100 കുട്ടികളുടെ മാർക്കിന്റെ വിതരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു. മാർക്കിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

മാർക്ക്	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	10	14	26	20	18	12

5.3. മോഡ് (Mode)

നിത്യജീവിതത്തിൽ നാം പലപ്പോഴും ഭൂരിപക്ഷം എന്ന ആശയം പ്രയോഗിക്കാറുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന് സ്കൂൾ പാർലമെന്റ് തെരഞ്ഞെടുപ്പിൽ ഭൂരിപക്ഷം വോട്ടുകൾ കിട്ടുന്നയാളായിരിക്കും നിങ്ങളുടെ ക്ലാസ് ലീഡറായി വരുന്നത്. നിങ്ങളുടെ ക്ലാസ് ലീഡർ സ്കൂൾ പാർലമെന്റിൽ നിങ്ങളുടെ ക്ലാസിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കും. അതായത് ചില അവസരങ്ങളിൽ ഡാറ്റകളെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത് ഭൂരിപക്ഷമുള്ള പ്രാപ്താങ്കമായിരിക്കും. ഭൂരിപക്ഷം എന്ന ആശയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന അളവാണ് മോഡ്.

> ഒരു ഡാറ്റയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്ന വിലയാണ് ആ ഡാറ്റയുടെ മോഡ് . ഇത് ഡാറ്റയിലെ ഏറ്റവും ആവൃത്തി കൂടിയ പ്രാപ്താങ്കമായിരിക്കും.

മോഡിനെ ചിലപ്പോൾ നടപ്പു ശരാശരിയെന്നോ (Fashionable Average) വ്യാപാര ശരാശരിയെന്നോ (Business Average) വിളിക്കാറുണ്ട്.

മോഡ് കണക്കാക്കുന്ന വിധം

i) അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ മോഡ്

ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്ന വിലയാണ് അതിന്റെ മോഡ് .

വിവരണം 5.19

ഒരു അഭിമുഖ പരീക്ഷയിൽ പങ്കെടുത്ത 8 പേരുടെ വയസ്സുകളാണ് $20, 21, 21, 24, 25, 24, 21, 27$ എന്നിവ. ഈ ഡാറ്റയുടെ മോഡ് കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ 21 എന്ന പ്രാപ്താങ്കം 3 പ്രാവശ്യവും 24 രണ്ട് പ്രാവശ്യവും ബാക്കിയെല്ലാം ഒരോ പ്രാവശ്യവുമാണ് ഉള്ളത്. അതിനാൽ കൂടുതൽ തവണ ആവർത്തിക്കുന്ന വില 21 ആണ്.

അതുകൊണ്ട് മോഡ് $= 21$ വയസ്സ്

> ഒരു വിതരണത്തിന് ഒന്നോ രണ്ടോ അതിലധികമോ മോഡുകൾ ഉണ്ടാകാം. ഏറ്റവും കൂടുതൽ പ്രാവശ്യം ആവർത്തിച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ട് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ ഈ രണ്ട് പ്രാപ്താങ്കളേയും ആ വിതരണത്തിന്റെ മോഡായി കണക്കാക്കാം. ഒരു വിതരണത്തിന് ഒരേയൊരു മോഡ് മാത്രമേയുള്ളൂവെങ്കിൽ ആ വിതരണത്തെ ഏകമോഡ് (Unimodal) വിതരണമെന്നും രണ്ട് മോഡുള്ളതിനെ ദ്വിമോഡ് (bimodal) വിതരണമെന്നും രണ്ടിൽ കൂടുതൽ മോഡുള്ള വിതരണത്തെ ബഹുമോഡ് വിതരണം എന്നും പറയുന്നു.

വിവരണം 5.20

ഒരു സ്കൂളിലെ കായികാധ്യാപകനായ ശ്രീ. വിജയകുമാർ ആ സ്കൂളിലെ ക്രിക്കറ്റ് ടീമിലുള്ള കുട്ടികളുടെ ശരാശരി ഉയരം കാണുവാനുദ്ദേശിക്കുന്നു. ടീമംഗങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങൾ (ഇഞ്ചിൽ) 70, 72, 72, 74, 74, 74, 75, 76, 76, 76, 77 എന്നിവയാണ്. ഉയരങ്ങളുടെ മോഡ് കാണുക.

പരിഹാരം

ഇവിടെ 74, 76 എന്നീ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ മൂന്ന് പ്രാവശ്യം വീതം ആവർത്തിച്ചിട്ടുണ്ട്. മറ്റെല്ലാ പ്രാപ്താങ്കളുടെയും ആവൃത്തി മൂന്നിൽ കുറവാണ്. ആയതിനാൽ ഈ ഉയരങ്ങളുടെ മോഡ് 74 ഉം 76 ഉം ആണ്.

ഉയരങ്ങളുടെ മോഡ് = 74, 76

വിവരണം 5.21

ഒരു കമ്പനിയുടെ CEO അദ്ദേഹത്തിന്റെ കമ്പനിയിലെ തൊഴിലാളികൾക്ക് ശമ്പളവർധനവ് നൽകാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. എല്ലാപേർക്കും 2000 രൂപാവീതം ശമ്പളവർധനവ് നൽകണോ അതോ ഓരോരുത്തർക്കും 10% വീതം ശമ്പളവർധനവ് നൽകണമോ എന്നുള്ള കാര്യത്തിൽ അദ്ദേഹത്തിന് തീർച്ചയില്ല. ശമ്പളത്തിന്റെ മാധ്യം 50000 രൂപയും മധ്യാങ്കം 20000 രൂപയും മോഡ് 10000 രൂപയുമാണ്. താഴെപറയുന്ന അവസരത്തിൽ മാധ്യത്തിനും മധ്യാങ്കത്തിനും മോഡിനും ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങൾ എന്തെല്ലാമാണ്?

a) എല്ലാപേർക്കും 2000 രൂപാ വീതം ശമ്പളവർധനവ് നൽകിയാൽ

b) എല്ലാവരുടേയും ശമ്പളം 10% വർധിപ്പിച്ചാൽ

പരിഹാരം

ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്നത് മാധ്യം = 50000/- മധ്യാങ്കം = 20000/- മോഡ് = 10000/-

a) എല്ലാപേർക്കും 2000 രൂപ വീതം വർധനവ് നൽകിയാൽ

ഒരാളുടെ നിലവിലെ ശമ്പളം x ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ അയാളുടെ പുതിയ ശമ്പളം $x+2000$ ആകും

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\Sigma(x+2000)}{n}$$

$$= \frac{\Sigma x + \Sigma 2000}{n} = \frac{\Sigma x}{n} + \frac{2000n}{n}$$

$$= 50000 + 2000 = 52000$$

അതായത് ഒരാൾക്ക് 2000 രൂപാ വീതം ശമ്പളവർധനവ് നൽകിയാൽ മാധ്യം 2000 വർധിക്കുന്നു. ഇതുതന്നെയാണ് മധ്യാങ്കത്തിനും മോഡിനും സംഭവിക്കുന്നത്. അവയുടെ വിലകളും 2000 വീതം വർധിക്കുന്നു.

b) എല്ലാവർക്കും 10% ശമ്പളവർദ്ധനവ് നൽകിയാൽ

'x' ആണ് ഒരാളുടെ നിലവിലെ ശമ്പളമെങ്കിൽ പുതിയ ശമ്പളം x ന്റെ 110% ആകുന്നു. അതായത് 1.10x ആകുന്നു.

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\Sigma 1.10x}{n}$$

$$= 1.10 \frac{\Sigma x}{n}$$

$$= 1.10 \times 50000 = 55000$$

ഇതുപോലെ മധ്യാങ്കം $= 1.10 \times 20000 = 22000$

മോഡ് $= 1.10 \times 10000 = 11000$

അതായത് മാധ്യവും മധ്യാങ്കവും മോഡും 10% വീതം വർധിക്കുന്നു.

ii) വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മോഡ്

ഒരു വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ മോഡ് എന്നത് ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തിയുള്ള പ്രാപ്താങ്കമാണ്.

വിവരണം 5.22

തിരുവനന്തപുരത്തെ ഒരു തുണിക്കടയിൽ ഒരു മാസം വിൽപ്പന നടത്തിയ ഷർട്ടുകളുടെ അളവുകളും അവയുടെ എണ്ണവും താഴെ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. മോഡ് കാണുക.

അളവ് (ഇഞ്ചിൽ)	:	36	38	40	42	44
ഷർട്ടുകളുടെ എണ്ണം	:	15	22	31	30	20

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ആവൃത്തി പട്ടികയിൽ ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തിയുള്ള പ്രാപ്താങ്കം 40 ആണ്.

$\therefore$ മോഡ് $= 40$

iii) തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ മോഡ്

ഇവിടെ മോഡ് കാണുന്നതിനാദ്യം നമുക്ക് മോഡൽ ക്ലാസ് കണ്ടെത്തണം. മോഡൽ ക്ലാസ് എന്നത് ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തിയുള്ള ക്ലാസാണ്. മോഡ് കാണുന്നതിന് താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

മോഡ് $$= l + \frac{(f_1 - f_0)c}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)}$$

അതായത്, മോഡ് $$= l + \frac{(f_1 - f_0)c}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

ഇവിടെ l - മോഡൽ ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി

f_1 - മോഡൽ ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി

f_0- മോഡൽ ക്ലാസിന് തൊട്ടു മുന്നിലെ ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി

f_2- മോഡൽ ക്ലാസിന് തൊട്ട് ശേഷമുള്ള ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി

c - മോഡൽ ക്ലാസിന്റെ അന്തരം

തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ മോഡ് കാണുന്നതിന് താഴെപ്പറയുന്ന പ്രവർത്തനക്രമം ഉപയോഗിക്കാം.

ഘട്ടം 1: ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തിയുള്ള ക്ലാസ് കണ്ടെത്തുക. ഈ ക്ലാസാണ് മാഡൽ ക്ലാസ്.

ഘട്ടം 2: മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് മോഡ് കണക്കാക്കാം.

വിവരണം 5.23

ജീവിത നിലവാരത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിന് ഒരു ഗവേഷകൻ 100 പേരിൽ ഒരു സർവെ നടത്തി. സർവേയിൽ പങ്കെടുത്തവരുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

വയസ്സ് :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം :	12	18	27	20	17	6

ഈ വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

പരിഹാരം

ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തി = 27

മോഡൽ ക്ലാസ്സ് 20-30 ആകുന്നു

$$\text{മോഡ്} = l + \frac{(f_1 - f_0)c}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

ഇവിടെ $l=20, f_1=27, f_0=18, f_2=20$ c=10

$$\therefore \text{ മോഡ്} = 20 + \frac{(27-18)\times 10}{2\times 27 - 18 - 20} = 25.625$$

വിവരണം 5.24

ഒരു കമ്പനിയിലെ 60 ദിവസങ്ങളിലെ പ്രതിദിന ഉൽപ്പാദനം (ടണ്ണിൽ) ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മോഡ് കാണുക.

പ്രതിദിന ഉൽപ്പാദനം :	21-22	23-24	25-26	27-28	29-30
ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം :	7	13	22	10	8

പരിഹാരം

ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്നത് ഉൾച്ചേർക്കൽ ക്ലാസാണ്. ഇതിനെ നമുക്ക് കേവല ക്ലാസുകളാക്കി മാറ്റി മാത്രമേ മോഡ് കാണുവാൻ സാധിക്കുള്ളൂ. അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന പുതിയ വിതരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

ക്ലാസ്	ദിവങ്ങളുടെ എണ്ണം
20.5 - 22.5	7
22.5 - 24.5	13
24.5 - 26.5	22
26.5 - 28.5	10
28.5 - 30.5	8

ഏറ്റവും കൂടിയ ആവൃത്തി 22 ആകുന്നു.

മോഡൽ ക്ലാസ് 24.5 - 26.5 ആകുന്നു.

$$\text{മോഡ്} = l + \frac{(f_1 - f_0)c}{2f_1 - f_0 - f_2}$$

l=24.5, c=2, f_0=13, f_1=22, f_2=10

$$\text{മോഡ്} = 24.5 + \frac{(22-13)\times 2}{2\times 22 - 13 - 10} = 25.36$$

5.3.1 ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് മോഡ് കാണുന്നവിധം

ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച് മോഡ്

ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് മധ്യാങ്കം കണ്ടെത്തിയതു പോലെ മോഡും നമുക്ക് ഗ്രാഫിന്റെ സഹായത്താൽ കാണുവാൻ കഴിയും. ഇതിനായി നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത് ഹിസ്റ്റോ ഗ്രാമിനെയാണ്. ഹിസ്റ്റോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ച് മോഡ് കാണുന്നതിനുള്ള ഘട്ടങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1 : തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കുക.

2 : മോഡൽ ക്ലാസ് കണ്ടെത്തുക (ഹിസ്റ്റോഗ്രാമിലെ ഉയരം കൂടിയ ബാറിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ക്ലാസ്)

3 : ഉയരം കൂടിയ ബാറിന്റെ മുകൾ ശീർഷങ്ങളിൽ നിന്നും തൊട്ടടുത്തുള്ള ബാറുകളിലെ ശീർഷങ്ങളിലെക്ക് വികർണ്ണങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

4 : വികർണ്ണങ്ങളുടെ സംഗമബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.

5 : സംഗമബിന്ദുവിൽ നിന്നും X അക്ഷത്തിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക.

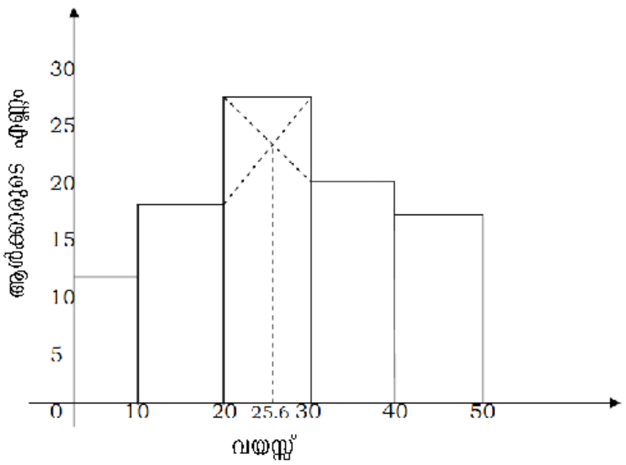
6 : ലംബം X അക്ഷത്തിൽ സ്പർശിക്കുന്ന 'x' വിലയാണ് മോഡ്

വിവരണം 5.25

വിവരണം 5.23ൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് അതിൽ നിന്നും മോഡ് കാണുക.

പരിഹാരം

ആദ്യം നമുക്ക് ഹിസ്റ്റോഗ്രാം വരയ്ക്കാം.



മോഡ് = 25.6

5.3.2. മോഡിന്റെ മേന്മകളും പോരായ്മകളും (Merits and demerits of Mode)

മറ്റ് ശരാശരികളെ പോലെ മോഡിനും അതിന്റേതായ മേൻമകളും പോരായ്മകളുമുണ്ട്.

മേന്മകൾ

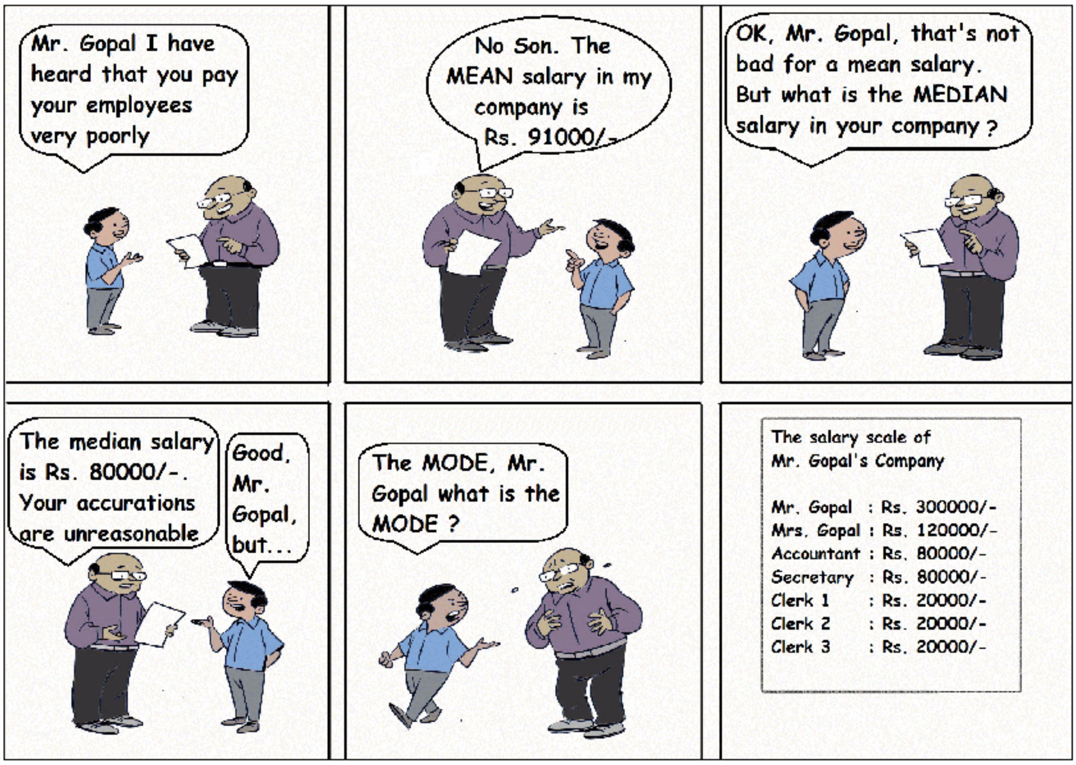
1. മോഡ് കണക്കുകൂട്ടുന്നതിനും മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും എളുപ്പമുള്ളതാണ്. ചിലപ്പോൾ ഒറ്റനോട്ടത്തിൽ തന്നെ മോഡ് നമുക്ക് കാണുവാൻ സാധിക്കും.
2. അഗ്ര വിലകൾ മോഡിനെ ബാധിക്കുന്നില്ല.
3. ഉയർന്നപരിധിയോ താഴ്ന്ന പരിധിയോ ഇല്ലാത്ത ക്ലാസുകൾ വരുന്ന അവസരത്തിലും മോഡ് നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം.
4. ഗുണാത്മക ഡാറ്റയുടെ ശരാശരി കാണുന്നതിന് മോഡ് മാത്രമേ സ്വീകാര്യമാകുള്ളൂ.

പോരായ്മകൾ

1. മോഡ് വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടതല്ല. ചില വിതരണങ്ങൾക്ക് ഒരു മോഡോ രണ്ടോ അതിലധികമോ മോഡുകളേ ഉണ്ടാകാം. എന്നാൽ മറ്റ് ചിലതിൽ മോഡ് ഇല്ലാതെയു മിരിക്കാം.
2. എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെയും അടിസ്ഥാനമാക്കുന്നില്ല.
3. തുടർ ഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് അനുയോജ്യമല്ല.
4. പ്രതിരൂപണത്തിലെ മാറ്റങ്ങൾ മോഡിനെ ബാധിക്കുന്നുണ്ട്.

മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് – താരതമ്യപട്ടിക

നം.	മാധ്യം	മധ്യാങ്കം	മോഡ്
1	എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെയും ഗണിത ശരാശരിയായി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.	പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ ക്രമീകരിക്കുമ്പോൾ വരുന്ന മധ്യവിലയായി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.	ഏറ്റവുമധികം തവണ ആവർത്തിച്ചിരിക്കുന്ന വിലയായി നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.
2.	എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേയും ബന്ധപ്പെടുത്തി കാണുന്നു	എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേയും ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.	എല്ലാ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേയും ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.
3.	സമഗ്രവും അതുല്യവുമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.	എല്ലാ അവസരത്തിലും കാണാൻ സാധിക്കില്ല	അതുല്യമായ നിർവചനമല്ല. വിവിധ മോഡുകൾക്കുള്ള സന്ദർഭങ്ങളുണ്ട്.
4.	അഗ്ര വിലകൾ സ്വാധീനിക്കുന്നു.	അഗ്ര വിലകൾ സ്വാധീനിക്കുന്നില്ല.	അഗ്ര വിലകൾ സ്വാധീനിക്കുന്നില്ല.
5.	തുടർഗണിത പ്രക്രിയകൾക്ക് ഉതകുന്നു. അതായത് പല കൂട്ടങ്ങളുടെയും മാധ്യങ്ങൾ ചേർത്ത് സംയുക്ത മാധ്യം കാണാൻ കഴിയും.	തുടർഗണിത പ്രക്രിയയ്ക്ക് അനുയോജ്യമല്ല. ഒന്നിലധികം കൂട്ടങ്ങളുടെ മധ്യാങ്കങ്ങൾ ചേർത്ത് സംയുക്ത കൂട്ടത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുവാൻ കഴിയില്ല.	തുടർഗണിത പ്രക്രിയയ്ക്ക് അനുയോജ്യമല്ല. ഒന്നിലധികം കൂട്ടങ്ങളുടെ മോഡുകൾ ചേർത്ത് സംയുക്ത കൂട്ടത്തിന്റെ മോഡ് കാണാൻ കഴിയില്ല.
6.	സംഖ്യാ പ്രാധാന്യമുള്ള ഡാറ്റകളിൽ കൂടുതൽ ഉപയോഗപ്രദമാണ്.	ക്രമപര ഡാറ്റയിൽ കൂടുതൽ ഉപയോഗപ്രദമാണ്	ഗുണാത്മക ഡാറ്റയിൽ കൂടുതൽ പ്രയോജനപ്രദമാണ്.



മാധ്യവും മധ്യാങ്കവും മോഡും തമ്മിലുള്ള അനുഭവസിദ്ധബന്ധം (Empirical Relationship)

അനുഭവങ്ങളിൽ നിന്നും കാൾ പിയേഴ്സൺ മാധ്യവും മധ്യാങ്കവും മോഡും ചുവടെ പറയുന്ന ബന്ധം കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്.

മാധ്യം - മോഡ് = 3(മാധ്യം-മധ്യാങ്കം)

അഥവാ

മോഡ് = 3 ×മധ്യാങ്കം – 2 × മാധ്യം

ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ശരാശരികൾ അറിയാമെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ ശരാശരി നമുക്ക് കാണാൻ സാധിക്കുമെന്നതാണ് ഈ ബന്ധത്തിന്റെ പ്രാധാന്യം.

വിവരണം 5.26

ഭാഗിക നാശം സംഭവിച്ച ഒരു ഡാറ്റയുടെ മോഡ് 63 ഉം മധ്യാങ്കം 77ഉം ആണ്. മാധ്യം കാണുക.

പരിഹാരം

അനുഭവസിദ്ധബന്ധപ്രകാരം

മാധ്യം - മോഡ് = 3(മാധ്യം - മധ്യാങ്കം)

മാധ്യം - 63 = 3 (മാധ്യം - 77)

2 x മാധ്യം = 168

മാധ്യം = 84

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു സ്ഥാപനത്തിലെ തൊഴിലാളികളുടെ വയസ്സുകൾ 40,50,30,20,25,35,30,30,20,30 എന്നിവയാണ്. വയസ്സിന്റെ മോഡ് കാണുക.

2. ഒരു ദിവസം ഒരു പ്രത്യേക ഇനം ഷൂവിന്റെ 100 ജോഡികൾ വിൽപ്പന നടത്തിയതിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

ഷൂവിന്റെ അളവ്	:	4	5	6	7	8	9	10
ജോഡികളുടെ എണ്ണം	:	10	15	20	35	16	3	1

3. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ ജോലിക്കാരുടെ ദിവസവേതനം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വേതനത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

വേതനം (രൂപയിൽ)	:	200-250	250-300	300-350	350-400
ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	:	21	29	19	39
		400-450	450-500	500-550	550-600
		43	94	73	68

4. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

പ്രതിദിന ഉൽപ്പാദനം (ടൺ)	:	21-22	23-24	25-26	27-28	29-30
ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം	:	7	13	22	10	8

5.4. ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (Geometric Mean- GM)

ശരാശരികൾ കാണുന്നതിന് മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവയെ എങ്ങനെ ഉപകരണങ്ങളാക്കാമെന്ന് നമ്മൾ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. പക്ഷേ ഒരു സമയ കാലയളവിൽ മാറ്റം സംഭവിക്കുന്ന വിലകളുടെ ശരാശരി കാണുന്ന അവസരത്തിൽ മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ അനുയോജ്യമായ ശരാശരിയല്ല തരുന്നത്. അതിനാൽ ഇവ ഉപയോഗിക്കുന്നത് അനുചിതവുമാണ്. ഇത്തരം അവസരത്തിൽ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന ശരാശരിയാണ് ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (GM).

'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം കാണുന്നതിന് അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ n-ാമത് മൂലം എടുത്താൽ മതി. രണ്ട് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളേയുള്ളൂവെങ്കിൽ അവയുടെ GM കാണുന്നതിന് ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗമൂലമെടുത്താൽ മതി. എന്നാൽ മൂന്ന് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ GM കാണുന്നതിന് ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നാംമൂലമാണ് എടുക്കേണ്ടത്.

> n പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ n-ാം മൂലമാണ് ജ്യാമിതീയ മാധ്യം

ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നിവ ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയിലെ 'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം.

$$GM = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} = \left[(x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n)\right]^{\frac{1}{n}}$$

> $x_1, x_2, \ldots, x_n$ എന്നീ 'n' വിലകളുടെ ജ്യോമിതീയ മാധ്യം,
>
> $$GM = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} = \left[(x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n)\right]^{\frac{1}{n}}$$

വിവരണം 5.27

കഴിഞ്ഞ 5 വർഷത്തെ ഒരു തുണികടയുടെ ലാഭവർധനവിന്റെ ശതമാനം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

വർഷം :	2008	2009	2010	2011	2012
വർദ്ധനവ് ശതമാനം :	5	10.5	9	6	7.5

ഈ 5 വർഷത്തെ ശരാശരി ലാഭവർധന ശതമാനം കാണുക.

പരിഹാരം

$$GM = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n}$$
$$= \sqrt[5]{5 \times 10.5 \times 9 \times 6 \times 7.5}$$
$$= 7.34$$

ശരാശരി ലാഭവർധനവ് ശതമാനം = 7.34%

വിവരണം 5.28

ഒരു പട്ടണത്തിലെ ജനസംഖ്യ 2006-ൽ 40000ൽ നിന്നും സ്ഥിര വാർഷിക നിരക്കിൽ വർദ്ധിച്ച് 2008-ൽ 42436 ആകുന്നു.

a) വാർഷിക ശരാശരി വർദ്ധന ശതമാനം കാണുക

b) 2007-ലെ ജനസംഖ്യ എന്തായിരിക്കും.

പരിഹാരം

2006 ലെ ജനസംഖ്യ = 40000

2008 ലെ ജനസംഖ്യ = 42436

a) വാർഷിക ശരാശരി വർധന നിരക്ക് 'x' ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

അങ്ങനെയെങ്കിൽ

$$40000 \times x \times x = 42436$$
$$\Rightarrow 40000x^2 = 42436$$

$$\Rightarrow \quad x = 1.03$$

അതുകൊണ്ട് ശരാശരി വാർഷിക വർധന ശതമാനം = 3%

b) 2007ലെ ജനസംഖ്യ 40000, 42436 എന്നിവയുടെ GM ആണ്

ie 2007 ലെ ജനസംഖ്യ $= \sqrt{40000 \times 42436} = 41200$

അല്ലെങ്കിൽ

2007 ലെ ജനംസംഖ്യ $= 40000 \times 1.03$

$= 41200$

ജ്യാമിതീയ മാധ്യത്തിന്റെ ഉപയോഗങ്ങളും പരിമിതികളും

ജ്യാമിതീയ മാധ്യത്തിന്റെ ചില പ്രത്യേക ഉപയോഗങ്ങൾ ചുവടെ ചേർക്കുന്നു.

1. വർധന ശതമാനങ്ങൾ, കുറയൽ ശതമാനങ്ങൾ, അനുപാതങ്ങൾ തുടങ്ങിയവയുടെ ശരാശരി കാണുന്നതിന് GM ഉപയോഗപ്രദമാണ്.
2. സൂചികകൾ കാണുന്നതിനുള്ള ഏറ്റവും ഉത്തമമായ ശരാശരി GM ആണ്.
3. GM ന്റെ ഒരു പ്രാധാന്യം, ഇത് അഗ്ര വിലകളുടെ പ്രാധാന്യം കുറയ്ക്കുമെന്നതാണ്. അതിനാൽ തന്നെ തീരെ ചെറുതും തീരെ വലുതുമായ വിലകളുടെ സ്വാധീനം കുറയ്ക്കുവാൻ കഴിയും. മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ കുറഞ്ഞ വിലകൾക്ക് കൂടുതൽ പ്രാധാന്യവും വലിയ വിലകൾക്ക് കുറഞ്ഞ പ്രാധാന്യവും ലഭിക്കുന്നു.

ജ്യാമിതീയ മാധ്യത്തിന്റെ ചില പരിമിതികൾ ഇവയാണ്.

1. ചില വിലകൾ നെഗറ്റീവ് ആയാൽ GM കാണാൻ സാധിക്കില്ല.
2. ഒന്നോ അതിലധികമോ വിലകൾ പൂജ്യം ആയാൽ അവയുടെ ഗുണനഫലം പൂജ്യമാവുകയും അതുമൂലം GM ന്റെ വില പൂജ്യമാവുകയും ചെയ്യും. ഇത്തരം സാഹചര്യത്തിൽ GM കാണുന്നത് അർഥരഹിതമാണ്.

5.5. സന്തുലിത മാധ്യം (Harmonic Mean - HM)

30 കി.മീറ്റർ അകലമുള്ള രണ്ട് സ്ഥലങ്ങളാണ് A യും B യും. ഒരാൾ കാറിൽ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്ക് 60 കി.മീ./മണിക്കൂർ വേഗതയിലും തിരിച്ച് 40 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. അയാളുടെ ശരാശരി വേഗത എന്തായിരിക്കും? നമുക്ക് നോക്കാം. വേഗത എന്നത് സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതമാണെന്ന് നമുക്കറിയാമല്ലോ? (വേഗത = ദൂരം/സമയം). ഇവിടെ തന്നിരിക്കുന്നത് നോക്കാം.

ദൂരം	വേഗത	സഞ്ചരിക്കാനെടുക്കുന്ന സമയം
30 കി.മീ.	60കി.മീ./മണിക്കൂർ	$\frac{30}{60} = 0.5$ മണിക്കൂർ
30 കി.മീ.	40കി.മീ/മണിക്കൂർ	$\frac{30}{40} = 0.75$ മണിക്കൂർ
ആകെ: 60 കി.മീ.		ആകെ: 1.25 മണിക്കൂർ

ശരാശരി വേഗത = $\frac{\text{ദൂരം}}{\text{സമയം}}$

$$= \frac{60}{1.25} = 48 \text{ കി.മീ./മണിക്കൂർ}$$

ഇനി നമുക്ക് വേഗതകളുടെ മാധ്യവും ജ്യാമിതീയ മാധ്യവും കണക്കാക്കി നോക്കാം.

മാധ്യം = $\frac{60+40}{2} = 50$ കി.മീ./മണിക്കൂർ

ജ്യാമിതീയ മാധ്യം = $\sqrt{60 \times 40} = 48.99$ കി.മീ/മണിക്കൂർ

ഇതിൽ നിന്നും ഈ സന്ദർഭത്തിൽ ശരാശരി വേഗത കാണുന്നതിന് AM,GM എന്നിവ ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കില്ലെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ ഇവിടുത്തെ യഥാർഥ ശരാശരി വേഗത 48 കി.മീ./മണിക്കൂറാണ്. ഇവിടെ നമ്മൾ ഉപയോഗിച്ച ശരാശരിയാണ് സന്തുലിത മാധ്യം അഥവാ ഹാർമോണിക മാധ്യം (HM). 60 ന്റേയും 40 ന്റെയും സന്തുലിതമാധ്യം കാണുന്നതിന് അവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ മാധ്യത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമം എടുത്താൽ മതി.

$$HM = \frac{1}{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{60} + \frac{1}{40}\right]}$$

$$= \frac{20 \times 60 \times 40}{60 + 40}$$

= 48കി.മീ/മണിക്കൂർ

പ്രാപ്തങ്കാങ്ങളുടെ സന്തുലിതമാധ്യം എന്നത് അവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ മാധ്യത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമമാണ്.

അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ സന്തുലിത മാധ്യം

$x_1, x_2,...,x_n$ എന്നിവ 'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയുടെ HM ലഭിക്കുന്നതിന്,

$$\frac{1}{\text{HM}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{x}$$

$$\therefore \quad \text{HM} = \frac{n}{\Sigma\frac{1}{x}}$$

ഒരു അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ സന്തുലിത മാധ്യം

$$\text{HM} = \frac{n}{\Sigma\frac{1}{x}}$$

വിവരണം 5.29

ഒരു സൈക്കിൾ ഓട്ടമത്സരത്തിൽ പങ്കെടുക്കുന്ന 5 പേരുടെ വേഗതകൾ 15 കി.മീ./മണിക്കൂർ, 18 കി.മീ/മണിക്കൂർ, 20 കി.മീ/മണിക്കൂർ 22 കി.മീ/മണിക്കൂർ, 17കി.മീ./മണിക്കൂർ എന്നിവയാണ്. ശരാശരി വേഗത കാണുക.

പരിഹാരം

ശരാശരി വേഗത എന്നത് തന്നിരിക്കുന്ന വേഗതകളുടെ സന്തുലിത മാധ്യമാണ്.

$$\frac{1}{\text{HM}} = \frac{1}{n}\Sigma\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{22} + \frac{1}{17}\right)$$

$$= 0.0553$$

$$\therefore \text{HM} = \frac{1}{0.0553} = 18.08$$

ശരാശരി വേഗത = 18.08 കി.മീ/മണിക്കൂർ

സന്തുലിത മാധ്യത്തിന്റെ ഉപയോഗങ്ങളും പരിമിതികളും

ചില വ്യവസ്ഥകൾക്ക് വിധേയമായി വേഗതകളുടെ ശരാശരി കാണുന്നതിന് സന്തുലിത മാധ്യം ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ട്. സന്തുലിതമാധ്യം കണക്കാക്കുമ്പോൾ ചെറിയ വിലകൾക്ക് കൂടുതൽ പ്രാധാന്യം ലഭിക്കുന്നുണ്ട്. അതിനാൽ തന്നെ വിലകൾ തമ്മിൽ വളരെ അന്തരമുള്ള അവസരത്തിൽ സന്തുലിതമാധ്യം യോജിച്ചതാകാറുണ്ട്.

ഒരു വിലയെങ്കിലും പൂജ്യം ആകുന്ന അവസറയിൽ സന്തുലിത മാധ്യം നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. ഒരു കൂട്ടം കുട്ടികളുടെ ഒരാഴ്ചയിലെ ചിലവ് സംബന്ധിച്ച് തന്നിരിക്കുന്ന ശ്രേണിയുടെ സന്തുലിത മാധ്യം കാണുക. 125, 130, 75, 10, 45
2. താഴെ പറയുന്ന പ്രസറാവനയിലെ തെറ്റ് ചൂണ്ടിക്കാട്ടുക

   " ഒരാൾ x ൽ നിന്നും y യിലേക്ക് സൈക്കിളിൽ 20 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും തിരികെ 24 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. അയാളുടെ ശരാശരി വേഗത 22 കി.മീ./മണിക്കൂർ ആണ്".
3. ഒരു ട്രെയിൻ ആദ്യത്തെ 300 കി.മീറ്റർ ശരാശരി 40കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും അടുത്ത അതേ ദൂരം 30 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. ശരാശരി വേഗത എന്ത്?

മാധ്യം (AM), ജ്യാമിതീയ മാധ്യം (GM), സന്തുലിതമാധ്യം (HM) ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

AM, GM, HM എന്നിവയെ ഗണിത ശരാശരികൾ എന്നാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്. ഗണിത സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് മാത്രമേ നമുക്ക് ഇവ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുകയുള്ളൂ. ഇവ തമ്മിലുള്ള ചില ബന്ധങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

1. $AM \geq GM \geq HM$

   എല്ലാ വിലകളും തുല്യമായാൽ, $AM = GM = HM$.
2. രണ്ട് പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ

   $(GM)^2 = AM \times HM$

   ie $GM = \sqrt{AM \times HM}$

പ്രവർത്തനം

2,4,8,12,16 എന്നീ വിലകൾക്ക് $AM \geq GM \geq HM$ ആണോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

വിവരണം 5.30

രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം 10 ജ്യാമിതീയ മാധ്യം 8 എന്നിവയാണ്. HM കാണുക.

പരിഹാരം

$(GM)^2 = AM \times HM$

$8^2 = 10 \times HM$

$HM = \frac{64}{10} = 6.4$

5.6 വിഭജന വിലകൾ – ചതുരംശങ്ങൾ, ദശാംശങ്ങൾ, ശതാംശങ്ങൾ

ഒരു ഡാറ്റയെ പല തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന വിലകളെയാണ് വിഭജന വിലകൾ (Partition values) എന്നു പറയുന്നത്. പ്രധാനമായും മൂന്നുതരം വിഭജന വിലകളാണുള്ളത്.

ചതുരംശങ്ങൾ (Quartiles), ദശാംശങ്ങൾ (Deciles), ശതാംശങ്ങൾ (Percentiles). ചതുരംശങ്ങൾ ഒരു ഡാറ്റയെ നാല് തുല്യഭാഗങ്ങളായും ദശാംശങ്ങൾ പത്ത് തുല്യഭാഗങ്ങളായും ശതാംശങ്ങൾ നൂറ് തുല്യഭാഗങ്ങളായും വിഭജിക്കുന്നു. വിഭജന വിലകൾ കണക്കാക്കുന്ന രീതി മധ്യാങ്കം കാണുന്ന രീതിയോട് സാമ്യമുള്ളതാണ്.

ചതുരംശങ്ങൾ (Quartiles)

മേൽ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെ ചതുരംശങ്ങൾ ഒരു ഡാറ്റയെ നാല് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ചതുരംശങ്ങൾ മൂന്നെണ്ണമുണ്ട്. ഇവയെ Q_1, Q_2, Q_3 എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഒന്നാമത്തെ ചതുരംശമാണ് Q_1. ഡാറ്റയിലെ 25% വിലകൾ Q_1 ന് താഴെയും 75% വിലകൾ Q_1 ൽ മുകളിലും എന്നാൽ 75% വിലകൾ Q_3യുടെ താഴെയും 25% വിലകൾ അതിന്റെ മുകളിലും Q_2 വിനാകട്ടെ 50% വിലകൾ താഴെയും 50% വിലകൾ മുകളിലുമാണ്.

അതായത് Q_2 ഡാറ്റയെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. അതിനാൽ Q_2 എന്നത് മധ്യാങ്കം തന്നെയാണ്.

ചതുരംശങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നവിധം

i. അസംസ്കൃത ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ

'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുള്ള ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുന്നതിന് അവയെ ആദ്യം ആരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതണം. ഇതിൽ

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ -ാമത് വിലയും

$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$ -ാമത് വിലയുമാണ്.

വിവരണം 5.31

7 ജോലിക്കാരുടെ ദിവസവേതനം (രൂപയിൽ) 300, 350, 400 425, 450, 500, 600 എന്നിവയാണ്. ഒന്നാമത്തേയും മൂന്നാമത്തേയും ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

ദിവസവേതനത്തെ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതിയാൽ

300, 350, 400, 425, 450, 500, 600

n = 7 ആകുന്നു

$$\frac{n+1}{4} = \frac{7+1}{4} = 2$$

$\therefore$ Q_1 = രണ്ടാമത്തെ വില = 350

കൂടാതെ $3\left(\frac{n+1}{4}\right) = 3 \times 2 = 6$

$\therefore$ Q_3 = ആറാമത്തെ വില = 500

വിവരണം 5.32

തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ Q_1, Q_3 എന്നിവ കാണുക.

9, 13, 14, 7, 12, 17, 8, 10, 6, 15, 18, 21, 20

പരിഹാരം

പ്രാപ്താങ്കങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതിയാൽ 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21

ഇവിടെ n = 13

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$-ാമത് വില

$= \frac{13+1}{4}$-ാമത് വില 3.5-ാമത് വില

= 3-ാമത് വില + 0.5 (4-ാമത് വില – 3-ാമത് വില)

= 8+0.5 (9-8)

= 8.5

$Q_3 = 3\left(\frac{n+1}{4}\right)$-ാമത് വില

$= 3 \times 3.5$ -ാമത് വില

= 10.5-ാമത് വില

= 10-ാമത് വില + 0.5 (11-ാമത് വില-10-ാമത് വില)

= 17+0.5 (18-17)

= 17.5

$\therefore Q_1 = 8.5$, $Q_3 = 17.5$

ii) വേറിട്ട ആവൃത്തി പട്ടികയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ

ചതുരംശങ്ങൾ കാണുന്നതിന് ആദ്യം ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കണം. ആകെ ആവൃത്തി N ആയാൽ

Q_1 = സഞ്ചിതാവൃത്തി $\frac{N+1}{4}$ ഉള്ള പ്രാപ്താങ്കം

Q_3 = സഞ്ചിതാവൃത്തി $3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ ഉള്ള പ്രാപ്താങ്കം

വിവരണം 5.33

49 ആൾക്കാരുടെ ഉയരം (ഇഞ്ചിൽ) ചുവടെ പട്ടികയിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നു.

ഉയരം	:	58	59	60	61	62	63	64	65	66
ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം	:	2	3	6	15	10	5	4	3	1

ഒന്നാമത്തേയും മൂന്നാമത്തേയും ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

പരിഹാരം

ചതുരംശങ്ങൾ കാണുന്നതിന് നമുക്ക് സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയ്യാറാക്കണം.

ഉയരം	ആവൃത്തി	ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി
58	2	2
59	3	5
60	6	11
61	15	26
62	10	36
63	5	41
64	4	45
65	3	48
66	1	49
	$N = 49$	

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ -ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$= \frac{49+1}{4}$ -ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$= 12.5$-ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$= 61$

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ -ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$= (3 \times 12.5)$-ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$= 37.5$ -ാമത് പ്രാപ്താങ്കം

$= 63$

അതായത്, $Q_1 = 61$, $Q_3 = 63$,

iii) തുടരാവൃത്തി പട്ടികയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ

ആദ്യം ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക തയാറാക്കുന്നു. ആകെ ആവൃത്തി N ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. $\frac{N}{4}$, $\frac{3N}{4}$ എന്നീ ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തികളുള്ള ക്ലാസുകൾ കണ്ടെത്തുക. ഇവയെ നമുക്ക് ചതുരംശ ക്ലാസുകൾ എന്ന് വിളിക്കാം. Q_1, Q_3 എന്നിവ കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നു.

$$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{N}{4} - m_1\right)c_1}{f_1}$$

$$Q_3 = l_3 + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m_3\right)c_3}{f_3}$$

ഇവിടെ

l_1, l_3 എന്നിവ ചതുരംശ ക്ലാസുകളുടെ താഴ്ന്ന പരിധികൾ

f_1, f_3 എന്നിവ ചതുരംശ ക്ലാസുകളുടെ ആവൃത്തികൾ

c_1, c_3 എന്നിവ ചതുരംശ ക്ലാസുകളുടെ ക്ലാസ് അന്തരങ്ങൾ

m_1, m_3 എന്നിവ ചതുരംശ ക്ലാസുകൾക്ക് തൊട്ട് മുന്നിലുള്ള ക്ലാസുകളുടെ സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ

വിവരണം 5.34

ഒരു പരീക്ഷയ്ക്ക് 80 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. താഴ്ന്നതും ഉയർന്നതുമായ ചതുരംശങ്ങൾ (Q_1, Q_3) കാണുക.

മാർക്കുകൾ :	0-10	10-20	20-40	40-60	60-80	80-100
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം :	8	10	22	25	10	5

പരിഹാരം

ആദ്യമായി ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി പട്ടിക കാണുന്നു.

മാർക്കുകൾ	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം(f)	ആരോഹണ സഞ്ചിതാവൃത്തി
0-10	8	8
10-20	10	18
20-40	22	40
40-60	25	65
60-80	10	75
80-100	5	80
	N = 80	

$\frac{N}{4} = 20,$ $\frac{3N}{4} = 60$

$\therefore$ ഒന്നാം ചതുരംശ ക്ലാസ് 20-40 ആകുന്നു.

$$Q_1 = l_1 + \frac{\left(\frac{N}{4} - m_1\right)c_1}{f_1}$$

ഇവിടെ $l_1 - 20,\ c_1 - 20,\ f_1 - 22,\ m_1 - 18,$

$$\therefore \quad Q_1 = 20 + \frac{(20-18)\times 20}{22} = 20 + \frac{2\times 20}{22} = 21.8$$

മൂന്നാം ചതുരംശ ക്ലാസ് 40-60 ആകുന്നു.

$$Q_3 = l_3 + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m_3\right)c_3}{f_3}$$

ഇവിടെ $l_3 - 40,\ c_3 - 20,\ f_3 - 25,\ m_3 - 40,$

$$\therefore \quad Q_3 = 40 + \frac{(60-40)20}{25} = 20 + \frac{20\times 20}{25} = 56$$

അതായത് $Q_1 = 21.8$ $Q_3 = 56$

ദശാംശങ്ങളും ശതാംശങ്ങളും (Deciles and Percentiles)

ഒരു ഡാറ്റയെ പത്ത് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കി മാറ്റുന്ന വിലകളാണ് ദശാംശങ്ങൾ. 9 ദശാംശങ്ങളാണുള്ളത്. ഡാറ്റയെ നൂറ് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന വിലകളാണ് ശതാംശങ്ങൾ. ശതാംശങ്ങളുടെ എണ്ണം 99 ആണ്.

5-ാമത് ദശാംശവും 50-ാമത് ശതാംശവും മധ്യാങ്കത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക

   13, 14, 7, 12, 17, 8, 10, 6, 15, 18, 21, 20

2. ഒരു ചെരുപ്പുകടയിൽ ഒരാഴ്ച നടന്ന വിൽപ്പനയുടെ വിവരങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. താഴ്ന്നതും ഉയർന്നതുമായ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

ചെരുപ്പിന്റെ അളവ്	:4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0
ചെരുപ്പുകളുടെ എണ്ണം	:10	18	22	25	40	15	10	8	7

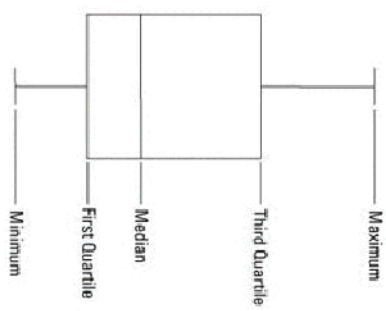
3. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ Q_1, Q_3 എന്നിവ കാണുക

മാർക്കുകൾ	:	0-10	10-20	20-30	30-40
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	:	3	10	17	7
		40-50	50-60	60-70	70-80
		6	4	2	1

5.7. ബോക്സ് പ്ലോട്ട് (Box Plot)

ഒരു ഡാറ്റയുടെ ചതുരംശങ്ങളും ഏറ്റവും വലുതും ഏറ്റവും ചെറുതുമായ സംഖ്യകളും ഉപയോഗിച്ച് ഡാറ്റയുടെ ഗ്രാഫ് രൂപത്തിലുള്ള അവതരണമാണ് ബോക്സ് പ്ലോട്ട്. ഇതു വഴി ഡാറ്റവിതരണത്തെ ചിത്രീകരിക്കാനാണ് ശ്രമിക്കുന്നത്. ബോക്സ് പ്ലോട്ടിനെ ബോക്സ്- വിസ്ക്കർ പ്ലോട്ട് (Box and whisker)എന്നും ബോക്സ് വിസ്കർ ചിത്രം എന്നു പറയാറുണ്ട്.

ഒരു ഡാറ്റയിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ വില മുതൽ ഏറ്റവും വലിയ വില വരെ നീളുന്ന ഒരു രേഖയും അതിൽ Q_1 മുതൽ Q_3 വരെയുള്ള ഒരു ചതുര പെട്ടിയും ചേർന്ന ഗ്രാഫാണ് ബോക്സ് പ്ലോട്ട്. പെട്ടിയിൽ നിന്നും നീട്ടി വരയ്ക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡങ്ങളെ വിസ്കർ എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. പെട്ടിയ്ക്കകത്ത് വരയ്ക്കുന്ന ലംബമാണ് മധ്യാങ്കം



വിവരണം 5.35

പതിനൊന്ന് സെക്രട്ടറിമാർക്ക് നടത്തിയ പരീക്ഷയുടെ സ്കോറുകൾ 8, 7, 6, 9, 1, 3, 10, 3. 8, 4, 7 എന്നിവയാണ്. ഇവയെ ഒരു ബോക്സ് പ്ലോട്ട് ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുക.

പരിഹാരം

വിലകളെ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതിയാൽ 1, 3, 3, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10

n = 11

ബോക്സ് പ്ലോട്ട് വരയ്ക്കുന്നതിന് നമുക്ക് താഴെപറയുന്നവ ആവശ്യമുണ്ട്.

ഏറ്റവും ചെറിയ വില= 1

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$-ാമത് വില

$= \left(\frac{11+1}{4}\right) = 3$-ാമത് വില

$= 3$

മധ്യാങ്കം,$Q_2 = \frac{n+1}{2}$ -ാമത് വില

$= 6$-ാമത് വില

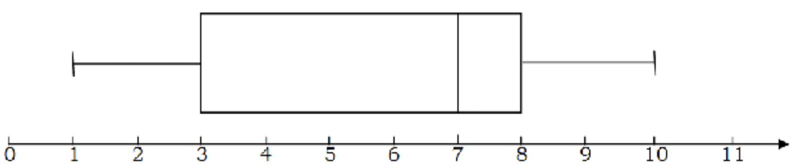
$= 7$

$Q_3 = \frac{3(n+1)}{4}$ -ാമത് വില

$= 9$-ാമത് വില

$= 8$

ഏറ്റവും വലിയ വില $= 10$



നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

ഒരു ഡാറ്റയിലെ വിലകൾ ഒരു കേന്ദ്രവിലയ്ക്ക് ചുറ്റും കൂടിച്ചേരാൻ കാണിക്കുന്ന പ്രവണതയെയാണ് കേന്ദ്രപ്രവണത എന്ന് പറയുന്നത്. മുഴുവൻ ഡാറ്റയെയും പ്രതിനിധീകരിക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന ഒരു വിലയാണ് കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനം. പലതരം കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങളുണ്ട്. അവ മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ്, ജ്യാമിതീയ മാധ്യം, സന്തുലിത മാധ്യം എന്നിവയാണ്. AM, GM, HM എന്നിവ ഗണിത ശരാശരികളെന്നും മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ സ്ഥാനീയ ശരാശരികളെന്നും അറിയപ്പെടുന്നു.

ഒരു ഡാറ്റയുടെ മാധ്യം എന്നത് പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുകയെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ട് ഹരിച്ച് കിട്ടുന്ന വിലയാണ്. പരിഗണനാ മാധ്യത്തിൽ ഓരോ വിലകളുടെയും പ്രാധാന്യം കൂടി കണക്കിലെടുത്താണ് മാധ്യം കാണുന്നത്. ഒരു വിതരണത്തെ രണ്ട് തുല്യ ഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന വിലയാണ് മധ്യാങ്കം. ഡാറ്റയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആവർത്തിക്കുന്ന വിലയാണ് മോഡ് എന്നു പറയുന്നുത്. 'n' വിലകളുടെ ജ്യാമിതീയ മാധ്യം കാണുന്നതിന് അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ n-ാം മൂലം എടുക്കണം. വർധനവിന്റെ ശരാശരി ശതമാനം, കുറയുന്നതിന്റെ ശരാശരി ശതമാനം തുടങ്ങിയവ കാണുന്നതിന് GM ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഒരു ഡാറ്റയുടെ സന്തുലിത മാധ്യം അതിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളുടെ മാധ്യത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമമാണ്. വിവിധ വ്യവസ്ഥകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വേഗതകളുടെ ശരാശരി കാണുന്നതിന് HM ഉപയോഗിക്കുന്നു.

AM, GM, HM എന്നിവ സാംഖ്യാപര സവിശേഷതകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഡാറ്റയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നു. മധ്യാങ്കവും മോഡും ഗുണപരമായ സവിശേഷതകൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഡാറ്റയിലും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഒരു ഡാറ്റയെ പല തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന വിലകളാണ് വിഭജന വിലകൾ. ചതുരംശങ്ങൾ ഡാറ്റയെ നാല് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു. ദശാംശങ്ങൾ പത്ത് തുല്യഭാഗങ്ങളും ശതാംശങ്ങൾ നൂറ് തുല്യഭാഗങ്ങളുമായാണ് ഡാറ്റയെ വിഭജിക്കുന്നത്.

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്,

- കേന്ദ്രപ്രവണതയും കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങളും തിരിച്ചറിയാൻ കഴിയുന്നു.
- വിവിധ കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങൾ വിശദീകരിക്കാനും വിലയിരുത്തുവാനും കഴിയുന്നു.
- വിഭജന വിലകളായ ചതുരംശം, ദശാംശം, ശതാംശം, എന്നിവ കണ്ടെത്താനും വ്യാഖ്യാനിക്കാനും കഴിയുന്നു.
- ബ്ലോക്സ് പ്ലോട്ടുകൾ രൂപ കൽപ്പന ചെയ്യുന്നു.

വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

1. ഒരു ശ്രേണിയെ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളാക്കി വിഭജിക്കുന്ന വിലയാണ്...............
2. രണ്ട് സഞ്ചിതാവൃത്തിവക്രങ്ങൾ സംഗമിക്കുന്നത് .... ൽ ആണ്.
3. കേന്ദ്രപ്രവണതാ മാനങ്ങളിൽ .... നാണ് ഒരു വില മാത്രമല്ലാത്തത്.

4. രണ്ടാം ചതുരംശം .... ന് തുല്യമാണ്.
5. ഒരു വിതരണത്തിന്റെ AM, HM ഇവ യഥാക്രമം 10, 8.1 ആയാൽ GM ന്റെ വില (81, 0.81, 9, 2)
6. ഒരു ശ്രേണിയിലെ ഓരോ വിലയേയും 10 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ; മധ്യാങ്കം ....
   (a) ബാധിക്കുന്നില്ല (b) യഥാർഥ മധ്യാങ്കത്തിന്റെ 10 മടങ്ങ്
   (c) യഥാർഥ മധ്യാങ്കത്തിന്റെ പത്തിലൊന്ന് മടങ്ങ്
   (d) 10 കൂടുന്നു.
7. രണ്ട് വിലകളുടെ GM കാണാൻ കഴിയുന്നത്.
   (a) രണ്ട് വിലയും പോസിറ്റീവായാൽ (b) ഒരു വില പൂജ്യമായാൽ
   (c) ഒരു വില നെഗറ്റീവ് ആയാൽ (d) രണ്ടു വിലയും പൂജ്യമായാൽ
8. മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ കാണുക
   (a) 12, 17, 17, 39, 41, 44, 54, 67, 82 (b) 123, 115, 98, 107, 115, 109, 113, 98
   (c) 1.2, 1.4, 1.9, 2.0, 2.4, 3.5, 3.9, 4.3, 5.2
9. എട്ട് നവജാത ശിശുക്കളുടെ ഭാരം (കിലോ.ഗ്രാമിൽ) 2.4, 2.8, 3.2, 1.9, 2.7, 4.2, 3.8, 2.2. ആകുന്നു. ഭാരത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.
10. ഒരു ഉത്തേജക മരുന്നിനോടുള്ള എട്ട് വ്യക്തികളുടെ പ്രതികരണ സമയം ഒരു മനശാസ്ത്രജ്ഞൻ അളന്നത് ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

    0.53, 0.46, 0.5, 0.49, 0.52, 0.53, 0.44, 0.55

    പ്രതികരണ സമയത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക.
11. 8 സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 5 ആണ്. ഇതിൽ 7 സ്കോറുകൾ 9, 3, 4, 5, 6, 4, 7 എന്നിവ ആയാൽ എട്ടാമത്തെ സ്കോർ എന്തായിരിക്കും?
12. ഒരാഴ്ചയിലെ ആദ്യ അഞ്ച് ദിവസങ്ങളിൽ ഒരാളുടെ ശരാശരി വരുമാനം 350 രൂപ ആണ്. അയാൾ ആറ് ദിവസം ജോലി ചെയ്താൽ ശരാശരി വരുമാനം 400 രൂപ വീതമാകും. ആറാമത്തെ ദിവസത്തെ വരുമാനം എത്ര?
13. ഒരു ക്ലാസിലെ 30 കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സ് 17 ആണ്. ശരാശരി വയസ്സ് 14.5 ആയ നാല് കുട്ടികൾ ആ ക്ലാസിൽ നിന്നും വിട്ട് പോവുകയും അഞ്ച് പുതിയ കുട്ടികൾ ആ ക്ലാസിലേക്ക് വരികയും ചെയ്തു. അവരുടെ വയസ്സുകൾ യഥാക്രമം 23, 25, 17.5, 19.5, 21 ആണ്. ആ ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ ഇപ്പോഴത്തെ ശരാശരി വയസ്സ് കാണുക.
14. ഒരു ക്ലാസിലെ 60 കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സ് 18 ആണ്. 7 കുട്ടികൾ ആ ക്ലാസിൽ നിന്നു പിരിഞ്ഞ്പോയി. അവരുടെ ശരാശരി വയസ്സ് 16.25 വർഷം ആണ്. പുതിയ 5 കുട്ടികൾ ആ ക്ലാസിൽ ചേർന്നു. അവരുടെ വയസ്സുകൾ യഥാക്രമം 19, 18, 21.5, 23.75, 14 എന്നിവയായാൽ നിലവിലെ ശരാശരി വയസ്സ് കാണുക.

15. 100 വിലകളുടെ മാധ്യം 49 ആണ്. 3 വിലകളായ 60, 70, 80 എന്നിവയ്ക്ക് പകരം 16, 17, 18 എന്നീ വിലകളാണ് പരിഗണിച്ചിരുന്നതെന്ന് പിന്നീട് മനസ്സിലായി. ശരിയായ മാധ്യം കാണുക.

16. 10 നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം കറക്കി ഫലങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുന്നു. ഈ പ്രവൃത്തി 1050 പ്രാവശ്യം നടത്തിയപ്പോൾ ലഭിച്ച തലകളുടെ എണ്ണം (x) പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. മാധ്യം കാണുക.

x :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	2	8	43	133	207	260	213	120	54	9	1

17. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 150 കുടുംബങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു.

കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	:	0	1	2	3	4	5
കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം	:	10	21	55	42	15	7

കുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ മാധ്യം കാണുക?

18. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം 115.61 ആണ്. ആവൃത്തിയിലെ ചില വിലകൾ നഷ്ടമായിരിക്കുന്നു. അവയെ കണ്ടെത്തുക.

വിലകൾ :	110	112	113	117	120	125	128	136	ആകെ
ആവൃത്തി :	25	?	13	?	14	8	6	2	100

19. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം 68.25 ആണ്. നഷ്ടപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന വില കാണുക.

വേതനങ്ങൾ	:	50	58	60	65	70	–	80	100
ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	:	2	20	5	35	8	10	16	4

20. 200 ആൾക്കാരുടെ ആഴ്ച വരുമാനം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മാധ്യം കാണുക.

ആഴ്ചയിലെ വരുമാനം :	1000-1200	1200-1400	1400-1600	1600-1800
ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം :	3	21	35	57
	1800-2000	2000-2200	2200-2400	2400-2600
	40	24	14	6

21. അഭിപ്രായ വോട്ടെടുപ്പിന്റെ ഭാഗമായി ഒരു സംഘടന 200 പേരെ അഭിമുഖത്തിന് വിധേയമാക്കുന്നു. അവരുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വയസ്സിന്റെ മാധ്യം കാണുക.

വയസ്സ് :	80-89	70-79	60-69	50-59	40-49	30-39	20-29	10-19
ആവൃത്തി :	2	2	6	20	56	40	42	42

22. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയിൽ നിന്നും ശരാശരി താപനില കാണുക.

താപനില(^{0}c):	-40 - -30	-30 - -20	-20 - -10	-10-0
ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം:	10	28	30	42
താപനില(^{0}c):	0-10	10-20	20-30	
ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം:	65	180	10	

23. ഒരു ആശുപത്രിയിൽ ഒരു ദിവസം ചികിത്സയ്ക്ക് വിധേയരാകുന്ന 360 രോഗികളുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. വയസ്സുകളുടെ മാധ്യം കാണുക.

വയസ്സ് :	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
രോഗികളുടെ എണ്ണം :	90	50	60	80	50	30

24. ഒരു പട്ടണത്തിലെ കൈപ്പണിക്കാരുടെ വീട്ടുചെലവുകളുടെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ശരാശരി ചിലവ് കാണുക.

ചിലവ്	പണിക്കാരുടെ എണ്ണം	ചിലവ്	പണിക്കാരുടെ എണ്ണം
100 - 150	24	300 - 350	30
150 - 200	40	350 - 400	22
200 - 250	33	400 - 450	16
250 - 300	28	450 - 500	7

25. ഒരു ഇംഗ്ലീഷ് പരീക്ഷയിൽ 134 പെൺകുട്ടികളും 166 ആൺകുട്ടികളും പങ്കെടുക്കുന്നു. ആൺകുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 68.5 ആണ്. ആകെ കുട്ടികളുടെ സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം 64.35 ആയാൽ പെൺകുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളുടെ മാധ്യം കാണുക.

26. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ ജോലിക്കാരായ 25 പുരുഷന്മാരുടെ ശരാശരി ഉയരം 161 സെ.മീറ്ററും 35 സ്ത്രീകളുടെ ശരാശരി ഉയരം 158 സെ.മീറ്ററുമാണ്. എല്ലാ ജോലിക്കാരുടെയും കൂടിയുള്ള ശരാശരി ഉയരം കാണുക.

27. ഒരു ഭൗതിക ശാസ്ത്ര പാഠ്യക്രമത്തിലെ മൂന്ന് ഭാഗങ്ങളായ ലബോട്ടറി, വ്യാഖ്യാനം, പാരായണം എന്നീ മേഖലകളിൽ ഒരു കുട്ടിക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ യഥാക്രമം 71,78,89 എന്നിവയാണ്. a) സ്കോറുകൾക്ക് നൽകിയിരിക്കുന്ന പരിഗണനകൾ യഥാക്രമം 2,4,5 ആയാൽ ശരാശരി സ്കോർ എന്തായിരിക്കും. b) ഒരേ പരിഗണനയാണ് നൽകുന്നതെങ്കിൽ ശരാശരി സ്കോർ എത്രയായിരിക്കും?

28. ഒരു കുട്ടിക്ക് സാമ്പത്തികശാസ്ത്രം, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്, വാണിജ്യശാസ്ത്രം തുടങ്ങിയവയ്ക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ യഥാക്രമം 82,68,89 എന്നിങ്ങനെയാണ്. ഇവയ്ക്കോരോന്നിനും നൽകിയിരിക്കുന്ന പരിഗണനകൾ യഥാക്രമം 2,3,5, ആണ്. a) ഇവിടെ അനുയോജ്യമായ ശരാശരി ഏത്? b) ശരാശരി കാണുക.

29. 46, 64, 87, 41, 58, 77, 35, 90, 55, 92, 33 എന്നിവയുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക. ഇതിൽ 92ന് പകരം 99 ഉം, 41ന് പകരം 43ഉം വില നൽകിയാൽ പുതിയ മധ്യാങ്കം എന്തായി രിക്കും?

30. 4, 7, 8, x+1, 2x-3, 15, 16, 20 എന്നീ സംഖ്യകൾ ആരോഹണക്രമത്തിലാണ്. ഇതിന്റെ മധ്യാങ്കം 12.5 ആയാൽ 'x' ന്റെ വില കാണുക.

31. ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതിയിരിക്കുന്ന 11, 12, 14, 18, x+2, x+4, 30, 32, 35, 41 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ മധ്യാങ്കം 24 ആണ്. 'x' ന്റെ വില കാണുക.

32. മധ്യാങ്കം കാണുക

വരുമാനം	:	1000	1500	3000	2000	2500	1800
ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം	:	24	26	16	20	6	30

33. മധ്യാങ്കം കാണുക.

വില	:	1	2	3	4	5	6	7
ആവൃത്തി	:	6	8	10	14	13	9	4

34. 60 മാർക്കിന്റെ ഒരു പരീക്ഷയിൽ 58 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കിന്റെ വിതരണം ചുവടെ ചേർക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

മാർക്ക്	:	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	:	4	5	11	6	5	8	9	6	4

35. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിലെ വേതനങ്ങളുടെ മധ്യാങ്കം കാണുക

വേതനം	:	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	:	3	5	20	10	5

36. തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക

മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	മാർക്ക്	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
45-50	10	20-25	31
40-45	15	15-20	24
35-40	26	10-15	15
30-35	30	5-10	10
25-30	42	0-5	5

37. ഒരു ബഹുതല വിപണന കമ്പനിയുടെ പലശാഖകളിലെ 100 വിൽപ്പനക്കാർക്ക് ലഭിച്ച കമ്മീഷന്റെ (രൂപയിൽ) വിതരണമാണ് ചുവടെയുള്ളത്.

കമ്മീഷൻ	ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം	കമ്മീഷൻ	ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം
150 - 158	5	186 - 194	20
159 - 167	16	195 - 203	15
168 - 176	20	204 - 212	3
177 - 185	21		

മധ്യാങ്കം കാണുക

38. കാർ ബാറ്ററികളുടെ വോൾട്ടത 12 വോൾട്ട് ആണ്. ഒരു നിർമാതാവ് 160 ബാറ്ററികളിൽ നടത്തിയ പരിശോധനയുടെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

വോൾട്ടേജ്	11.8-12	12.1-12.3	12.4-12.6	12.7-13.1	13.2-13.4	13.5-13.7
ബാറ്ററികളുടെ എണ്ണം	18	26	12	78	18	8

വോൾട്ടേജിന്റെ മധ്യാങ്കം കാണുക.

39. 45 മുൻസിപ്പൽ കോർപ്പറേഷനുകളിലെ ചിലവിനെ (ദശലക്ഷം രൂപയിൽ) സംബന്ധിക്കുന്ന വിതരണം ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു. മധ്യാങ്കം കാണുക.

ക്ലാസ്	10-20	21-31	32-42	43-53	54-64	65-75
ആവൃത്തി	2	8	15	7	10	3

40. താഴെപറയുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം 86 ആയാൽ വിട്ടുപോയ ആവൃത്തി കണ്ടുപിടിക്കുക.

ക്ലാസ്സ്	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110
ആവൃത്തി	2	1	6	6	f	12	5

41. ഒരു ചെരുപ്പ് നിർമാതാവിന് സഹായകരമാക്കുന്ന ശരാശരി ഏത്?

42. ഒരു ദിവസം ഒരു ചെരുപ്പുകടയിൽ വിറ്റ 15 ചെരുപ്പുകളുടെ അളവുകൾ തന്നിരിക്കുന്നു. 5, 7, 9, 9, 8, 5, 6, 8, 7, 7, 7, 9, 2, 7, 5 മോഡ് കാണുക.

43. ഒരു പകിട 60 പ്രാവശ്യം എറിഞ്ഞപ്പോൾ ലഭിച്ച സ്കോറുകൾ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു. മോഡ് കാണുക.

സ്കോർ	1	2	3	4	5	6
ആവൃത്തി	12	9	8	13	9	9

44. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

ചെരുപ്പിന്റെ അളവ്	2	3	4	5	6
ആവൃത്തി	8	15	23	20	14

45. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ തൊഴിലാളികളുടെ വയസ്സിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മോഡ് കാണുക.

വയസ്സ്	14-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	60-90
ആവൃത്തി	12	14	26	35	23	5	1

46. മോഡ് കാണുക

വയസ്സ്	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
ആവൃത്തി	20	24	32	28	20	26

47. 80 ബൾബുകളുടെ ജീവിതകാലം ഏറ്റവും അടുത്ത മണിക്കൂറുകളിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയതിന്റെ വിതരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. മോഡ് കാണുക.

ജീവിതകാലം (മണിക്കൂറിൽ)	660 - 669	670 - 679	680 - 689	690 - 699	700 - 709	710 - 719	720 - 729	730 - 739
ബൾബുകളുടെ എണ്ണം	4	5	12	24	15	10	7	3

48. ഒരു പാർക്കിലെ 87 മരങ്ങളുടെ ഉയരത്തിന്റെ വിതരണമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്

ഉയരം (മീറ്റർ)	2-5	6-9	10-13	14-17	18-21	22-25	26-29
മരങ്ങളുടെ എണ്ണം	4	6	14	26	25	7	3

ഈ വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ കാണുക.

49. ഒരു ചരത്തിന്റെ ഒമ്പത് വിലകളാണ്, 4, 11, 25, 37, 11, 26, 35, 11, p എന്നിവ

a) i) p യുടെ വില അറിയാതെ തന്നെ കണ്ടെത്താൻ കഴിയുന്ന ശരാശരി ഏത്?

ii) ആ ശരാശരി കാണുക.

b) i) p യുടെ വില 30-ൽ കൂടുതലാണെന്നറിയാമെങ്കിൽ,

ii) മറ്റേത് ശരാശരിയാണ് കാണാൻ കഴിയുന്നത്

iii) ആ ശരാശരി കാണുക.

c) അവശേഷിക്കുന്ന ഒരു ശരാശരിയുടെ വില 22 ആയാൽ p യുടെ വില കാണുക.

50. താഴെപ്പറയുന്ന ഓരോ വാക്യത്തിലും ശരാശരി എന്ന് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഓരോന്നിലേയും ശരാശരി എന്നത് ഏത് കേന്ദ്രപ്രവണതാ മാനമാണെന്ന് തിരിച്ചറിയുക.

a) ഇന്ത്യയിലെ കാറുകളുടെ ശരാശരി നിറം വെള്ളയാണ്.

b) ഒരു പ്രൈമറി സ്കൂളിലെ 8 ക്ലാസുകളിലെ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി എണ്ണം 32.25 ആണ്.

c) ഒരു പരീക്ഷയിൽ പകുതി കുട്ടികൾക്ക് ശരാശരി മാർക്കിൽ കൂടുതൽ ലഭിച്ചു.

51. p, 13, 18, 29, 29 എന്നിവയുടെ മോഡ് 29, മാധ്യം 20, മധ്യാങ്കം 18 ആണ്. p യുടെ വില കാണാതെ താഴെ പറയുന്ന വിതരണങ്ങളുടെ മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവ കാണുക.

a) p+2, 15, 20, 31, 31

b) p-5, 8, 13, 24, 24

c) 2p, 26, 36, 58, 58

d) p/2, 6.5, 9, 14.5, 14.5

52. ഒരുകൂട്ടം പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ മോഡ് , മാധ്യത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണ്. ഇതിന്റെ മധ്യാങ്കം 23 ആയാൽ മാധ്യം കാണുക.

53. ഒരു ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യവും മോഡും യഥാക്രമം 50, 45 എന്നിവയാണ്. മധ്യാങ്കം കാണുക.

54. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ 100 തൊഴിലാളികളുടെ ശരാശരി മാസശമ്പളം 4500 രൂപയാണ്. ശമ്പളത്തിന്റെ മധ്യാങ്കം 4900 രൂപയായാൽ മോഡ് കാണുക.

55. 4.2, 16.8 എന്നിവയുടെ GM കാണുക.

56. 4, 36 എന്നിവയുടെ GM കാണുക.

57. 8, 16, 62.5 എന്നിവയുടെ GM കാണുക.

58. 18, 16, 22, 12 എന്നിവയുടെ GM കാണുക.

59. "കപിൽ & സൺസ്" എന്ന സ്ഥാപനത്തിന്റെ കഴിഞ്ഞ 5 വർഷങ്ങളിൽ വ്യാപാരത്തിലുണ്ടായ വർദ്ധനവ് ശതാമനം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

വർഷം	:	2008	2009	2010	2011	2012
വർധനവ്	:	7%	8%	10%	12%	18%

വർധനവിന്റെ ശരാശരി ശതമാനം കാണുക.

60. സന്തുലിത മാധ്യം (HM) കാണുക.

a) 2, 3, 6 b) 3.2, 5.2, 4.8, 6.1, 4.2

61. ഒരു കാർ 4 ഘട്ടങ്ങളിലായി 50 കി.മീറ്റർ വീതം സഞ്ചരിക്കുന്നു. ആദ്യഘട്ടത്തിൽ 50കി.മീ/മണിക്കൂർ, രണ്ടാംഘട്ടം 20കി.മീ/മണിക്കൂർ, മൂന്നും നാലും ഘട്ടങ്ങൾ യഥാക്രമം 40 കി.മീ/മണിക്കൂർ, 25 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. കാറിന്റെ ശരാശരി വേഗത കാണുക.

62. ഒരാൾ സൈക്കിളിൽ വീട് മുതൽ സ്കൂൾ വരെ 10കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും തിരികെ വീട്ടിലേക്ക് 14കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. ശരാശരി വേഗത കാണുന്നതിന് യോജിച്ച ശരാശരി ഏത്? ആ ശരാശരി കാണുക.

63. ഒരു വിമാനം ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാല് വശങ്ങളിൽ കൂടി യഥാക്രമം 100, 200, 300, 400 കി.മീ/മണിക്കൂർ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ശരാശരി വേഗത കാണുക.

64. 8, 6, 4, 3 എന്നീ വിലകൾക്ക് AM>GM>HM എന്ന് തെളിയിക്കുക.

65. 9 കുട്ടികൾക്ക് ഒരു ക്ലാസ് പരീക്ഷയ്ക്ക് ലഭിച്ച സ്കോറുകളാണ് 38, 7, 43, 25, 20, 15, 12, 18, 11 എന്നിവ. ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

66. ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക

മാർക്കുകൾ	:	20	30	40	50	60
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	:	4	16	20	18	11

67. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ ഒന്നും മൂന്നും ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

ഉയരം (ഇഞ്ച്)	58	59	60	61	62	63	64	65	66
ആൾക്കാരുടെ എണ്ണം	2	3	6	15	10	5	4	3	1

68. തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന്റെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

മാർക്കുകൾ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	5	7	8	12	28	22	10	8

69. താഴെ പറയുന്ന വിതരണത്തിന്റെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

സ്കോർ	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	1	3	11	21	43	32	9

70. ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ ബോക്സ് പ്ലോട്ട് വരയ്ക്കുക.

13, 14, 7, 12, 17, 8, 10, 6, 15, 18, 21, 20,

$(Q_1 = 8.5, Q_3 = 17.5, Q_2 = 13)$

ഉത്തരങ്ങൾ

1. മധ്യാങ്കം	2. മധ്യാങ്കം	3. മോഡ്
4. മധ്യാങ്കം	5. 9	6. b
7. a	8. a) 41.44, 41, 17	8. b) 109.75, 111, 98, 115
8. c) 2.87, 2.4, 1.46	9. 2.9 കി.ഗ്രാം	10. 0.5025
11. 2	12. 650	13. 18
14. 18.32	15. 50.69	16. 5.01
17. 2.35	18. 22, 10	19. 75
20. 1768	21. 35.8	22. 4.29
23. 39.84	24. 266.25	25. 59.21
26. 159.25	27. a) 81.73	27. b) 79.33
28. a) പരിഗണനാമാധ്യം	28. b) 81.30	29. 58, 58

30. 9	31. 21	32. 1800
33. 4	34. 38	35. 467.5
36. 27.74	37. 180.36	38. 12.80
39. 40.67	40. 10	41. മോഡ്
42. മോഡ് =7	43. 4	44. 4
45. 44.29	46. 32.83	47. 695.21
48. മാധ്യം= 15.64	48. മധ്യാങ്കം = 16	48. മോഡ് = 17.19
49. a) i) മോഡ്	49. a) ii) 11	49. b) i) മധ്യാങ്കം
49. b) ii) 25	49. c) p = 38	50. a) മോഡ്
50. b) മാധ്യം	50. c) മധ്യാങ്കം	51. a) മാധ്യം = 22
51. a) മധ്യാങ്കം = 20	51. a) മോഡ് = 31	51. b) മാധ്യം = 15
51. b) മധ്യാങ്കം = 13	51. b) മോഡ് = 24	51. c) മാധ്യം = 40
51. c) മധ്യാങ്കം = 36	51. c) മോഡ് = 58	51. d) മാധ്യം = 10
51. d) മധ്യാങ്കം = 9	51. d) മോഡ് = 14.5	52. 17.25
53. 48.33	54. 5700	55. 8.40
56. 12	57. 20	58. 16.61
59. 10.39%	60. a) 3	60. b) 4.484
61. 29.63	62. 11.67	63. 192
64. AM= 5.25	64. GM= 4.9	64. HM= 4.57
64. AM>GM>HM	65. Q_1= 11.5	65. Q_2= 18
65. Q_3= 31.5	66. Q_1= 30	66. Q_2= 40
66. Q_3= 50	67. Q_1= 61	67. Q_3= 63
68. Q_1= 34.17	68. Q_2= 46.43	68. Q_3= 56.82
69. Q_1= 66.64	69. Q_2= 75.08	69. Q_3= 82.94