కర్నాటక ప్రభుత్వం

# గణితం

# Mathematics

## Telugu Medium

# 9

తొమ్మిదవ తరగతి

## భాగం – 2

©KTBS
Not to be republished

National Council For Education and Research
Sri Arbindo Marg New Delhi - 110016

Karnataka Textbook Society (R.)
100 Feet Ring Road, Banashankari 3rd Stage,
Bengaluru - 560 085

# THE CONSTITUTION OF INDIA

## PREAMBLE

**WE, THE PEOPLE OF INDIA,** having solemnly resolved to constitute India into a [1]**[SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC]** and to secure to all its citizens :

**JUSTICE,** social, economic and political;

**LIBERTY** of thought, expression, belief, faith and worship;

**EQUALITY** of status and of opportunity and to promote among them all;

**FRATERNITY** assuring the dignity of the individual and the [2][unity and integrity of the Nation];

**IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY** this twenty-sixth day of November, 1949 do **HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.**

1. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Sovereign Democratic Republic" (w.e.f. 3.1.1977)
2. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Unity of the Nation" (w.e.f. 3.1.1977)

©KTBS Not to be republished

# Foreword

The National Curriculum Framework (NCF), 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the national Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognize that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

This aims imply considerable change is school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather then a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book.

©KTBS Not to be republished

We wish to thank the Chairperson of the advisory group in science and mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P. Sinclair of IGNOU, New Delhi for guiding the work of this committee. Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organizations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. We are especially grateful to the members of the National Monitoring Committee, appointed by the Department of Secondary and Higher Education, Ministry of Human Resource Development under the Chairpersonship of Professor Mrinal Miri and Professor G.P. Deshpande, for their valuable time and contribution. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

*Director*
National Council of Educational Research and Training

New Delhi
*20 December 2005*

©KTBS Not to be republished

# Textbook Development Committee

**Chairperson, Advisory Group in Science and Mathematics**

J.V. Narlikar, *Emeritus Professor*, *Chairman,* Advisory Committee, Inter University Centre for Astronomy & Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

**Chief Advisor**

P. Sinclair, Director, NCERT and *Professor of Mathematics* , IGNOU, New Delhi

**Chief Coordinator**

Hukum Singh, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT

**Members**

A.K. Wazalwar, *Professor and Head*, DESM, NCERT

Anjali Lal, *PGT,* DAV Public School, Sector-14, Gurgaon

Anju Nirula, *PGT*, DAV Public School, Pushpanjali Enclave, Pitampura, Delhi

G.P. Dikshit, *Professor* (Retd.), Department of Mathematics & Astronomy, Lucknow University, Lucknow

K.A.S.S.V. Kameswara Rao, *Associate Professor*, Regional Institute of Education, Bhubaneswar

Mahendra R. Gajare, *TGT,* Atul Vidyalya, Atul, Dist. Valsad

Mahendra Shanker, *Lecturer* (S.G.) (Retd.), NCERT

Rama Balaji, *TGT*, K.V., MEG & Centre, ST. John's Road, Bangalore

Sanjay Mudgal, *Lecturer*, CIET, NCERT

Shashidhar Jagadeeshan, *Teacher and Member,* Governing Council, Centre for Learning, Bangalore

S. Venkataraman, *Lecturer*, School of Sciences, IGNOU, New Delhi

Uaday Singh, *Lecturer*, DESM, NCERT

Ved Dudeja, *Vice-Principal* (Retd.), Govt. Girls Sec. School, Sainik Vihar, Delhi

**Member-Coordinator**

Ram Avtar, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT (till December 2005)
R.P. Maurya, *Professor*, DESM, NCERT (Since January 2006)

©KTBS
Not to be republished

## ACKNOWLEDGEMENTS

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: A.K. Saxena, *Professor* (Retd.), Lucknow University, Lucknow; Sunil Bajaj, *HOD*, SCERT, Gurgaon; K.L. Arya, *Professor* (Retd.), DESM, NCERT; Vandita Kalra, *Lecturer,* Sarvodaya Kanya Vidyalya, Vikas Puri, District Centre, New Delhi; Jagdish Singh, *PGT,* Sainik School, Kapurthala; P.K. Bagga, *TGT,* S.B.V. Subhash Nagar, New Delhi; R.C. Mahana, *TGT,* Kendriya Vidyalya, Sambalpur; D.R. Khandave, *TGT,* JNV, Dudhnoi, Goalpara; S.S. Chattopadhyay, *Assistant Master,* Bidhan Nagar Government High School, Kolkata; V.A. Sujatha, *TGT,* K.V. Vasco No. 1, Goa; Akila Sahadevan, *TGT,* K.V., Meenambakkam, Chennai; S.C. Rauto, *TGT,* Central School for Tibetans, Mussoorie; Sunil P. Xavier, *TGT,* JNV, Neriyamangalam, Ernakulam; Amit Bajaj, *TGT,* CRPF Public School, Rohini, Delhi; R.K. Pande, *TGT,* D.M. School, RIE, Bhopal; V. Madhavi, *TGT,* Sanskriti School, Chanakyapuri, New Delhi; G. Sri Hari Babu, *TGT,* JNV, Sirpur Kagaznagar, Adilabad; and R.K. Mishra, *TGT,* A.E.C. School, Narora.

Special thanks are due to M. Chandra, *Professor* and *Head* (Retd.), DESM, NCERT for her support during the development of this book.

The Council acknowledges the efforts of *Computer Incharge,* Deepak Kapoor; *D.T.P. Operator,* Naresh Kumar; *Copy Editor,* Pragati Bhardwaj; and *Proof Reader,* Yogita Sharma.

Contribution of APC–Office, administration of DESM, Publication Department and Secretariat of NCERT is also duly acknowledged.

©KTBS
Not to be republished

# విషయ సూచిత

## భాగం – 2


| | పుట సంఖ్య |
|---|---|
| **8. హెరాన్స్ సూత్రం** | **1 - 13** |
| 8.1 పీఠిక | 1 |
| 8.2 త్రిభుజ వైశాల్యం - హెరాన్స్ సూత్రం | 4 |
| 8.3 హెరాన్స్ సూత్రంను ఉపయోగించి చతుర్భుజాల వైశాల్యాలను కనుక్కోవడం | 8 |
| 8.4 సారాంశం | **13** |
| **9. నిరూపక జ్యామితి** | **14 - 31** |
| 9.1 పరిచయం | 14 |
| 9.2 కార్టీజియన్ వ్యవస్థ | 18 |
| 9.3 నిరూపక తలంలో బిందువును స్థాపించుట | 26 |
| 9.4. సారాంశం | 30 |
| **10. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలు** | **32 - 46** |
| 10.1 పరిచయం | 32 |
| 10.2 సరళ సమీకరణాలు | 32 |
| 10.3 సరళసమీకరణము యొక్క సాధన | 35 |


©KTBS Not to be republished

10.4 రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖాపటం (గ్రాఫు) 37

10.5 $x$ – అక్షం మరియు $y$ – అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళ రేఖల సమీకరణాలు 44

10.6 సారాంశం 46

**11. సమాంతర చతుర్భుజాలు మరియు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు 47 - 65**

11.1 పరిచయం 47

11.2 ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల ఆకృతులు 49

11.3 ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల సమాంతర చతుర్భుజాలు 52

11.4 ఒకే భూమి ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల త్రిభుజాలు 56

11.5 సారాంశం 64

**12. వృత్తాలు 66 - 89**

12.1 పరిచయం 66

12.2 వృత్తాలు మరియు వాటికి సంబంధించిన నిబంధనలు: ఒక సమీక్ష 67

12.3 వృత్తం మీద ఏదేని బిందువు వద్ద జ్యా చే ఏర్పరచుకోణం 70

12.4 వృత్తకేంద్రం నుండి జ్యాకు గీచిన లంబం 72

12.5 వృత్తాన్ని నిర్ధారించే మూడు బిందువులు 73

12.6 సమాన జ్యాలు మరియు కేంద్రం నుండి వాటి మధ్యగల దూరాలు 75

©KTBS Not to be republished

| | | |
|---|---|---|
| | 12.7 వృత్త చాపము ఏర్పరిచే కోణం | 79 |
| | 12.8 చక్రీయ చతుర్భుజం | 82 |
| | 12.9 సారాంశం | 88 |
| **13.** | **ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు** | **90 - 119** |
| | 13.1 పరిచయం | 90 |
| | 13.2 దీర్ఘఘనం మరియు ఘనపు ఉపరితల వైశాల్యం | 90 |
| | 13.3 వృత్తాకార సిలిండర్ ఉపరితల వైశాల్యం | 96 |
| | 13.4 వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఉపరితల వైశాల్యం | 99 |
| | 13.5 గోళపు ఉపరితల వైశాల్యం | 104 |
| | 13.6 దీర్ఘ ఘనాకృతుల ఘన | 108 |
| | 13.7 సిలిండర్ ఘనపరిమాణం | 110 |
| | 13.8 వృత్తాకార లంబ శంఖువు ఘనపరిమాణం | 113 |
| | 13.9 గోళం ఘనపరిమాణం | 115 |
| | 13.10 సారాంశం | **119** |
| **14.** | **సాంఖ్యక శాస్త్రం** | **120 - 152** |
| | 14.1 పరిచయం | 120 |
| | 14.2 దత్తాంశ సేకరణ | 121 |
| | 14.3 దత్తాంశంను ప్రదర్శించుట | 122 |
| | 14.4 దత్తాంశాలను గ్రాఫ్‌లో ప్రాతినిధ్యం చేయుట | **129** |


©KTBS Not to be republished

14.5 కేంద్రీయ స్థాన విలువలు 143

14.6. సారాంశం 152

**15. సంభావ్యత** **153 - 167**

15.1 పరిచయము 153

15.2 సంభావ్యత - ఒక ప్రాయోగిక పద్ధతి 154

15.3 సారాంశం 167

**గణితశాస్త్ర ఆకృతీకరణ పరిచయం** **168 - 188**

**జవాబులు / సూచనలు** **189 - 206**

©KTBS Not to be republished

అధ్యాయం - 8

# హెరాన్స్ సూత్రం

## 8.1 పీఠిక

కింది తరగతులలో మీరు వేరు వేరు ఆకృతులైన చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, త్రిభుజం మరియు చతుర్భుజాల గురించి చదివారు. మరియు వాటి చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలను కనుగొన్నారు. ఉదాహరణకి మీతరగతిగది నేల చుట్టుకొలత, వైశాల్యాలను మీరు కనుక్కోవచ్చు.

మనం తరగతి నేల భుజాల చుట్టూ నడుస్తూ ఒక చుట్టు తిరిగితే మనం నడిచిన దూరం దాని చుట్టుకొలత అవుతుంది. తరగతి నేల కొలతలు / పరిమాణము దాని వైశాల్యం.

ఒకవేళ మీ తరగతి దీర్ఘచతురస్రాకారంలో వుండి పొడవు 10 m మరియు వెడల్పు 8 m అయితే దాని చుట్టుకొలత 2(10 m + 8 m) = 36 m మరియు దాని వైశాల్యం 10 m × 8 m = 80 $m^2$ అవుతుంది.

పొడవు మరియు వెడల్పులను కొలవడానికి ఏకమానపద్ధతి మీటర్ (m) లేదా సెంటీమీటర్ (cm) మొదలైనవి తీసుకుంటాము.

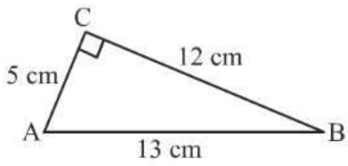
వైశాల్యాన్ని కొలవడానికి ఏకమాన (యూనిట్) పద్ధతి చదరపు మీటరు ($m^2$) లేదా దరపు సెంటీమీటర్ ($cm^2$) మొదలైనవి తీసుకుంటాము.

ఒకవేళ మీరు త్రిభుజాకార పార్కులోకూర్చొని వున్నారనుకుంటే దాని వైశాల్యం ఎలా కనుక్కుంటారు? వెనుకటి అవధిలో నేర్చుకున్నారనుకుంటే

$$\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times \text{భూమి} \times \text{ఎత్తు} \qquad (I)$$

©KTBS Not to be republished

లంబకోణ త్రిభుజాన్ని మీరు గమనించినట్లయితే లంబకోణాన్ని ఏర్పరచే రెండు భుజాలలో ఒకటి భూమిగాను మరొకటి ఎత్తుగాను తీసికొని నేరుగా సూత్రాన్ని అన్వయించవచ్చు. ఉదాహరణకు లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో మూడు భుజాలు 5 cm, 12 cm, 13 cm అయితే, 12 cm భుజాన్ని పాదముగా 5 cm భుజాన్ని ఎత్తుగా తీసుకుంటాము . (చిత్రం 8.1 గమనించండి).



చిత్రం 8.1

తరువాత, $\Delta$ ABC వైశాల్యం

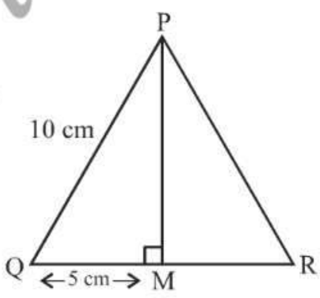
$= \frac{1}{2} \times$ [illegible] $\times$ [illegible]

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \text{ cm}^2$

$= 30 \text{ cm}^2$

5cm భుజాన్ని భూమిగా మరియు 12cm భుజాన్ని ఎత్తుగా కూడాతీసుకోవచ్చు అనేదాన్ని గమనించండి.

మీరు 10 cm భుజంగాగల ఒక సమబాహుత్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవాలని భావిస్తే (చిత్రం 8.2 గమనించండి). దాని వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవాలంటే మొదట త్రిభుజం ఎత్తు కనుక్కోవాలి, మీరు ఈ త్రిభుజం ఎత్తును కనుక్కోవచ్చా ?



చిత్రం 8.2

త్రిభుజ భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు ఎలా దాని ఎత్తు కనుక్కోగలము అని గుర్తుచేసుకుందాం. దీనిని ఏదైనా సమబాహుత్రిభుజంలో కనుక్కోవడానికి సాధ్యం అవుతుంది. M బిందువును QR భుజం మధ్య బిందువుగా తీసికొని దాని ఎదుటి శీర్షం P కి కలిపిన PMQ ఒక లంబకోణ త్రిభుజం అవుతుందని మీరు తెలుసుకోండి. అయితే పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి, PM భుజంపొడవును కింది విధంగా కనుక్కోవచ్చు.

$PQ^2 = PM^2 + QM^2$

$(10)^2 = PM^2 + 5^2 \; (\because QM = MR)$

కావున $PM^2 = 75$

$PM = \sqrt{75}$ cm

$= 5\sqrt{3}$ cm

©KTBS Not to be republished

తరువాత త్రిభుజ వైశాల్యం $\Delta PQR = \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3}\ cm^2$$

$$= 25\sqrt{3}\ cm^2$$

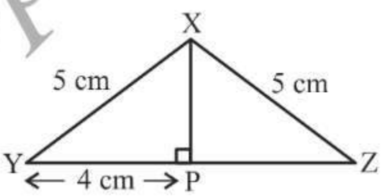
అలాగే సమద్విబాహు త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని ఈ సూత్రం సహాయంతో కనుక్కోవడం మనకు సాధ్యమా? అనేదాన్ని చూద్దాం. ఉదాహరణకు త్రిభుజం XYZ లో XY, XZ లు రెండు సమానమైన భుజాలు, ప్రతి ఒక్కటి 5 cm మరియు మూడవ భుజం YZ = 8 cm అని తీసుకుందాం. [చిత్రం 8.3 గమనించండి].

ఈ విషయంలో కూడా త్రిభుజం ఎత్తు మనం మొదట కనుక్కోవాలి YZ భుజానికి X శీర్షానికి XP లంబ రేఖను గీస్తాం. XP లంబ రేఖ త్రిభుజంభూమి YZ ని రెండు సమభాగాలుగా విభజిస్తుంది. అనేది చూడవచ్చు.

కావున, $YP = PZ = \frac{1}{2} YZ = 4$ cm

తరువాత పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$XP^2 = XY^2 - YP^2$$
$$= 5^2 - 4^2$$
$$= 25 - 16$$
$$= 9$$



చిత్రం 8.3

$\therefore \quad XP = 3$ cm

$\Delta XYZ$ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times YZ \times XP$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3\ cm^2$$

$$= 12\ cm^2.$$

©KTBS Not to be republished

ఒక వేళ మనకు విషమ బాహు త్రిభుజము భుజాల కొలతలు తెలిసి దాని ఎత్తు తెలికపోతే ఆ త్రిభుజ వైశాల్యంకనుక్కోవచ్చా? ఉదాహరణకు మీ దగ్గర 40 m , 32 m మరియు 24 m భుజాలుగల త్రిభుజాకార పార్కు వుంది. దాని వైశాల్యం ఎలా లెక్కించగలవు? త్రిభుజ వైశాల్యం సూత్రం అన్వయించాలంటే దాని ఎత్తు మొదట కనుక్కోవాలి. అయితే ఎత్తు కనుక్కోవడం సాధ్యం కానిచో ముందుకు వెళ్ళి ఈవిధంగా గల త్రిభుజాల వైశాల్యం కనుక్కోవచ్చు అని తెలుసుకోండి.

## 8.2 త్రిభుజ వైశాల్యం - హెరాన్స్ సూత్రం

హెరాన్ సుమారు క్రీ.శ. 10లో ఈజిప్టు దేశంలో అలెక్జాండ్రియాలో జన్మించెను. అతను అన్వయగణిత పై పరిశోధన చేసెను. గణితం మరియు భౌతిక శాస్త్రం విషయాల పై ఎన్నో శోధనలు చేశారు. ఆరోజుల్లో అతను ఆక్షేత్రాలలో ఎన్ సైక్లోపిడియా రాస్తున్నారని తెలిసినది. అతను ఎక్కువగా జామితీయ ఆకారాలక్షేత్రగణితపు సమస్యలపై మూడుపుస్తకాలు రాశారు. మొదటి పుస్తకంలో చతురస్రాలు, దీర్ఘచతురస్రాలు, త్రిభుజాలు, ట్రెపీజియంలు, వివిధ ప్రత్యేక చతుర్భుజాలు, క్రమ బహుభుజాలు, వృత్తాలు, సిలిండరు, శంఖువు, గోళాల ఉపరితలవైశాల్యాలు మొదలైన వాటిని గురించి తెలుపుతుంది. ఈ పుస్తకంలో హెరాన్ ప్రసిద్ధమైన సూత్రం త్రిభుజ వైశాల్యము మూడు భుజాలు ఇచ్చినప్పుడు కనుగొనడాని ప్రతిపాదించాడు.

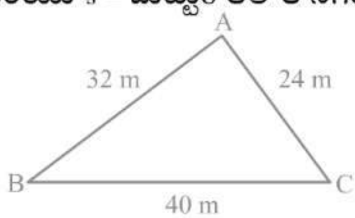
హెరాన్
(క్రీపూ.10-క్రీపూ.75)
చిత్రం 8.4

త్రిభుజ వైశాల్యం గురించి హెరాన్ ఇచ్చిన సూత్రాన్ని హెరాన్స్ సూత్రం అని అంటారు.

ఆ సిద్ధాంతం ఈ విధంగా ఉంది $\boxed{\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ (II)

ఇక్కడ $a$, $b$ మరియు $c$ లు త్రిభుజ భుజాల పొడవు మరియు $s$ = చుట్టుకొలత లోసగం

త్రిభుజం చుట్టుకొలతలోసగం $= \frac{a+b+c}{2}$. త్రిభుజం ఎత్తును సులభంగా కనుక్కోవడానికి సాధ్యంకాని సందర్భాలలో ఈ సూత్రం సహాయపడుతుంది. దీనిని పైన చెప్పినట్లు త్రిభుజాకార పార్కు వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి అన్వయిస్తాం (చిత్రం 8.5 గమనించండి.)




చిత్రం 8.5

$a = 40$ m, $b = 24$ m, $c = 32$ m అని తీసుకుంటే.

అప్పుడు $s = \frac{40 + 24 + 32}{2}$ m

$= 48$ m

©KTBS Not to be republished

$(s - a) = (48 - 40) = 8$ m,

$(s - b) = (48 - 24) = 24$ m,

$(s - c) = (48 - 32) = 16$ m

పార్కు ABC వైశాల్యం

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{48 \times 8 \times 24 \times 16} \text{ m}^2$$

$$= 384 \text{ m}^2$$

$32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600 = 40^2$ అనుకుంటే వస్తుంది. కావున పార్కు భుజాలు లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. పెద్ద భుజం పొడవు i.e BC = 40 m త్రిభుజ కర్ణం అవుతుంది మరియు AB మరియు AC ల మధ్య కోణం 90° అవుతుంది. మొదటి సూత్రం ఉపయోగించి, మనం పార్కు వైశాల్యం కనుక్కొని పరిశీలించవచ్చు.

వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times 32 \times 24 \text{ m}^2 = 384 \text{ m}^2$

హెరాన్స్ సూత్రం లో కనుక్కున్న వైశాల్యం మరియు సామాన్య సూత్రం ద్వారా వచ్చిన వైశాల్యం సమానంగా వుండడాన్ని చూడవచ్చు.

ఇప్పుడు మొదటే చర్చించిన త్రిభుజ వైశాల్యాలను కనుగొని సూత్రము సరైనదని నిర్ణయించవచ్చు అంటే,

(i) భుజం పొడవు 10 cm గాగల సమబాహు త్రిభుజము

(ii) రెండు సమాన భుజాల పొడవు 5 cm మరియు మూడవ భుజం పొడవు 8 cm వున్న సమద్వి బాహు త్రిభుజం.

మీరు వీటిని గమనించవచ్చు.

(i) మొదటి దానికి $s = \frac{10 + 10 + 10}{2} = 15$ cm

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{15(15-10)(15-10)(15-10)} \text{ cm}^2$

$$= \sqrt{15 \times 5 \times 5 \times 5} \text{ cm}^2$$

$$= 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(ii) రెండవది $s = \frac{8 + 5 + 5}{2} = 9$ cm

తిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{9(9-8)(9-5)(9-5)} \text{ cm}^2$

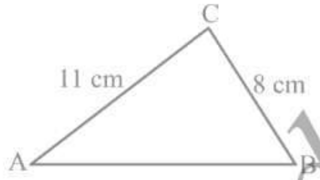
$$= \sqrt{9 \times 1 \times 4 \times 4} \text{ cm}^2$$

$$= 12 \text{ cm}^2$$

ఇప్పుడు మరికొన్ని ఉదాహరణలను సాధిస్తాం

©KTBS Not to be republished

**ఉదాహరణం 1**: ఒక త్రిభుజ భుజాలు 8 cm మరియు 11 cm అయి దాని చుట్టుకొలత 32*cm* అయితే త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కోండి. [చిత్రం 8.6 గమనించండి]



చిత్రం 8.6

**సాధనం:** చుట్టు కొలత = 32 cm, $a$ = 8 cm $b$ = 11 cm

మూడవ భుజం c = 32 cm − (8 + 11) cm = 13 cm

$$2s = 32 \text{ cm}, \; s = \frac{32}{2} = 16 \text{ cm}$$

$(s - a) = (16 - 8)$ cm = 8 cm

$(s - b) = (16 - 11)$ cm = 5 cm

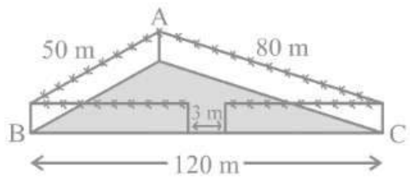
$(s - c) = (16 - 13)$ cm = 3 cm

త్రిభుజ వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3}$ cm²

$= 8\sqrt{30}$ cm²

**ఉదాహరణ 2:** ABC త్రిభుజాకారంలో వున్న పార్కు భుజాలపొడవులు 120 m, 80 m మరియు 50 m అయిన [చిత్రం 8.7 గమనించండి]. పార్కు యజమాని దాని దాని చుట్టూ కంచె వేయడానికి మరియు దానిలో గడ్డి పెంచడానికి నిర్ణయించినారు. తాను గడ్డి పెంచవలసిన వైశాల్యం ఎంత? పార్కు గేటు కోసం ఒకవైపు 3 m వదలి ₹ 20 ప్రకారం కంచె వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు ఎంత?



చిత్రం 8.7

**సాధనం:** పార్కు వైశాల్యం కనుక్కోవడానికి మనవద్ద

$2s = 50 \text{ m} + 80 \text{ m} + 120 \text{ m} = 250 \text{ m}$

$s = 125$ m

ఇప్పుడు, $(s - a) = (125 - 120)$ m = 5 m

$(s - b) = (125 - 80)$ m = 45 m

$(s - c) = (125 - 50)$ m = 75 m

పార్కు వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{125 \times 5 \times 45 \times 75}$ m²

$= 375\sqrt{15}$ m²

పార్కు చుట్టు కొలత = AB + BC + CA = 250 m

©KTBS Not to be republished

పార్కు చుట్టు కంచె వేసే పొడవు $= 250\text{ m} - 3\text{ m}$ (వాకిలి కోసం) $= 247\text{ m}$

కంచె వేయడానికి ఖర్చు $= ₹\ 20 \times 247$
$= ₹\ 4,940$

**ఉదాహరణం 3:** త్రిభుజాకార స్థలం భుజాలు $3:5:7$ నిష్పత్తిలో వుండి మరియు దాని చుట్టు కొలత $300\text{ m}$. అయిన దాని వైశాల్యం కనుక్కోండి.

**సాధన:** త్రిభుజాకార స్థలం భుజం పొడవులు వరుసగా $3x, 5x, 7x$ మీటర్లు [చిత్రం 12.8 గమనించండి].

స్థలం చుట్టు కొలత $= 3x + 5x + 7x = 300$ అని మనకు తెలుసు

కావున, $15x = 300$

$x = 20$

చిత్రం 8.8

కావున త్రిభుజాకార స్థలం భుజాల పొడవులు $3 \times 20\text{ m}, 7 \times 20\text{ m}, 7 \times 20\text{ m}$ అయితే, $60\text{ m}, 100\text{ m}$, మరియు $140\text{ m}$.

వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవడానికి హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి కనుక్కోవచ్చు.

$$s = \frac{60 + 100 + 140}{2}\text{ m} = 150\text{ m}$$

దాని వైశాల్యం $= \sqrt{150(150-60)(150-100)(150-140)}\ \text{m}^2$

$= \sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10}\ \text{m}^2$

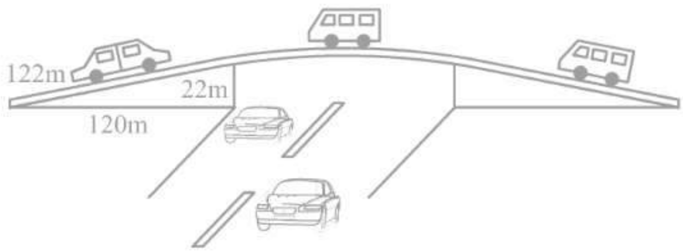
$= 1500\sqrt{3}\ \text{m}^2$

## అభ్యాసం 8.1

1. ముందు పాఠశాల వుంది అని చెప్పే సూచనా పలక భుజం పొడవు '$a$' వుండేటట్లు ఒక సమబాహు త్రిభుజమైనది. దాని చుట్టు కొలత $180\text{ cm}$ అయిన సూచనాపలక వైశాల్యంను హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి, కనుగొనండి

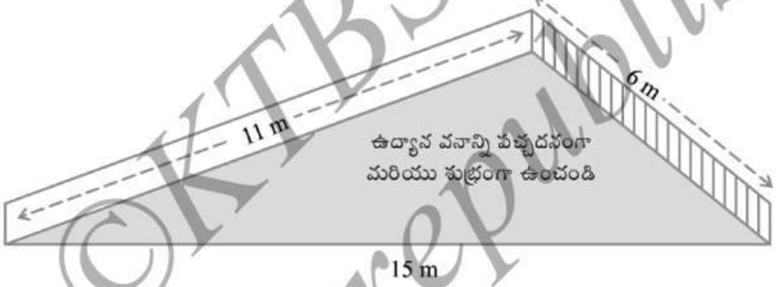
2. ఒక వంతెన ప్రక్క వైపు గోడలు త్రిభుజాకార గోడలపై ప్రకటనలు వేశారు. ప్రక్క గోడల భుజాలు $122\text{ m}, 22\text{ m}$ మరియు $120\text{ m}$ [చిత్రం 8.9 గమనించండి]. ప్రకటనల వల్ల సంవత్సరానికి $₹\ 5000$ ప్రతి చదరపు మీటరు ప్రకారం అద్దె ఇస్తారు. ఒక సంస్థ ఒక గోడను మూడు నెలలకు అద్దెకు తీసుకున్నది సంస్థ ఇచ్చే అద్దె ఎంత?

©KTBS Not to be republished




చిత్రం 8.9

3. ఒక పార్కులో జారుడు బల్ల వుంది దాని ఒకగోడకు ఏదోరంగుతో ఈ పార్కు పచ్చదనంగా మరియు శుభ్రంగా ఉంచండి. అని [చిత్రం 8.10 గమనించండి]. రాయబడినది. గోడ భుజాలు 15m, 11m మరియు 6m వుంటే రంగువేసిన వై శాల్యాన్ని కనుక్కోండి.




చిత్రం 8.10

4. త్రిభుజ రెండు భుజాలు 18cm మరియు 10cm మరియు దాని చుట్టుకొలత 42cm వుంటే ఆత్రిభుజవైశాల్యంకనుక్కోండి.

5. ఒక త్రిభుజ భుజాలు 12 : 17 : 25 నిష్పత్తిలో వుండి, దాని చుట్టుకొలత 540cm అయిన దాని వైశాల్యం కనుక్కోండి.

6. ఒక సమ ద్విబాహు చుట్ట కొలత 30cm మరియు దాని సమాన భుజాల పొడవు 12cm అయిన త్రిభుజవైశాల్యం కనుక్కోండి.

## 8.3 హెరాన్స్ సూత్రంను ఉపయోగించి చతుర్భుజాల వైశాల్యాలను కనుక్కోవడం

ఒక రైతు ఒక పొలాన్ని సాగుచేయాలనుకున్నాడనుకుందాం. దీనికోతను కొంతమంది కూలీలను నియమిస్తారు వారు తమ కూలిని సాగు చేసిన స్థలంలో ప్రతి చదరపు మీటరుకు లెక్కించబడినది. తను దీనిని ఎలా లెక్కిస్తుంది. చాలాసార్లు పొలాలు చతుర్భుజాకారంలో వుంటాయి. మీరు చతుర్భుజాలను త్రిభుజాకార భాగాలుగా చేసిన తరువాత త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొని దాని ద్వారా సమస్యను పరిష్కరించాలి.

©KTBS Not to be republished

**ఉదాహరణం 4:** కమల దగ్గర 240m, 200m, 360m భుజాలుగాగల త్రిభుజాకారపు పొలంలో గోధుమను వేసిపెంచారు. ఈ పొలానికి ఆనుకొనివున్న మరొక త్రిభుజాకార పొలం భుజాలు పొడవులు 240m, 320m, 400m వున్నవి. దీనిలో తను బంగాళ దుంపలు మరియు ఉల్లిగడ్డలు పెంచడానికి ఇష్టపడును. [చిత్రం 8.11 గమనించండి]. తను అతిపెద్ద భుజం మధ్య బిందువును దాని ఎదుటి శీర్షాన్ని కలిపి పొలాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజించింది. దానిలోని ఒక భాగంలో బంగాళాదుంపలు మరొక భాగంలో ఉల్లిగడ్డలు పెంచిన వైశాల్యాన్ని హెక్టార్‌లలో కనుక్కోండి. [1 హెక్టారు = 10,000 $m^2$]

**సాధన :** ABC త్రిభుజాకర పొలంలో గోధుమ పెంచిన ACD పొలాన్ని ADE మధ్య బిందువు C శీర్షానికి కలిపిన రెండు భాగాలు చేసినది ABC త్రిభుజంలో

$a = 200\text{m},\ b = 240\text{m},\ c = 360\text{m}$

మరియు, $s = \dfrac{200 + 240 + 360}{2}\ \text{m} = 400\ \text{m}$

గోదమ పెంచిన వైశాల్యం

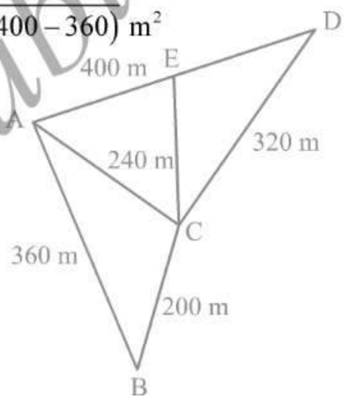
$$= \sqrt{400(400-200)(400-240)(400-360)}\ \text{m}^2$$

$$= \sqrt{400 \times 200 \times 160 \times 40}\ \text{m}^2$$

$$= 16000\sqrt{2}\ \text{m}^2$$

$= 1.6\sqrt{2}$ హెక్టార్లు

$= 2.26$ హెక్టార్లు (సుమారు)




ACD త్రిభుజ వైశాల్యం కనుక్కుందాం.

అయితే, $s = \dfrac{240 + 320 + 400}{2}\ \text{m} = 480\ \text{m}$

చిత్రం 8.11

$\Delta$ ACD వైశాల్యం $= \sqrt{480(480-240)(480-320)(480-400)}\ \text{m}^2$

$$= \sqrt{480 \times 240 \times 160 \times 80}\ \text{m}^2$$

$= 38400\ \text{m}^2$

$= 3.84$ హెక్టార్లు

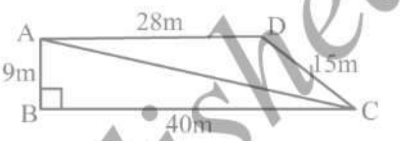
AD భుజానికి E మధ్య బిందువును C బిందువుకు కలిపిన రేఖా ఖండం ACD త్రిభుజాన్ని రెండు సమభాగాలుగా విభజిస్తుంది. అని మనం గమనించవచ్చు. దీని మీరు కారణం చెప్పవచ్చునా? అవి AE మరియు ED సమానంగావుండే భూమి కలిగి దానిపై ఎత్తు కూడా సమానము.కావున బంగాళాదుంపలను పెందిన వైశాల్యం = ఉల్లిగడ్డలు పెంచిన వైశాల్యం.

$= (3.84 \div 2) = 1.92$ హెక్టార్లు

©KTBS Not to be republished

**ఉదాహరణం 5**: ఒక పాఠశాలలో విద్యార్థులు స్వచ్ఛతా ఆందోళన కార్యక్రమం ఏర్పాటు చేశారు. వారు వీధిల్లో రెండు గుంపులుగా నడిచారు. ఒక గుంపు AB, BC మరియు CA వీధులలో మరొక గుంపు AC, CD మరియు DA వీధులలో నడుచుకుంటూ వెళ్ళారు. [చిత్రం 8.12 చూడండి]. తరువాత వారు వీధి నుండి దీర్ఘచతరురస్రాకార వైశాల్యాన్ని శుభ్రం చేశారు. AB = 9m, BC = 40m, CD = 15m, DA = 28m మరియు $\angle B = 90°$ అయితే ఏ గుంపు ఎక్కువ వైశాల్యాన్ని శుభ్రం చేసింది. మరియు ఎంత ఎక్కువ? విద్యార్థులు శుభ్రపరచిన మొత్తం వైశాల్యాన్ని రోడ్డు వెడల్పు లెక్కించకుండా కనుక్కోండి

**సాధన:** AB = 9 m మరియు BC = 40 m, $\angle B = 90°$



చిత్రం 8.12

$$AC = \sqrt{9^2 + 40^2} \text{ m}$$
$$= \sqrt{81 + 1600} \text{ m}$$
$$= \sqrt{1681} \text{ m}$$
$$= 41 \text{ m}$$

మొదటి గుంపు లంబకోణ త్రిభుజం ABC వైశాల్యం శుభ్రంచేయాల్సివుంది.

$\Delta$ ABC య వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు $= \frac{1}{2} \times 40 \times 9 = 180 \text{ m}^2$

రెండు గుంపు 41m, 15m మరియు 28m కలిగిన విషమ బాహుత్రిభుజం ACD యొక్క వైశాల్యాన్ని శుభ్రం చేయాల్సివుంది .

ఇక్కడ $s = \frac{41 + 15 + 28}{2} \text{ m} = 42 \text{ m}$

కావున $\Delta$ ACD వైశాల్యం $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{42(42-41)(42-15)(42-28)} \text{ m}^2$$
$$= \sqrt{42 \times 1 \times 27 \times 14} \text{ m}^2$$
$$= \sqrt{126} \text{ m}$$

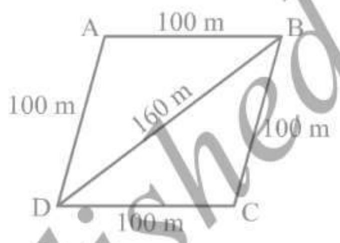
మొదటి గుంపు శుభ్రపరచిన వైశాల్యం 180 m². రెండవ గుంపు శుభ్రపరచిన వైశాల్యం కన్నా (180 - 126) m² = 54 m² ఎక్కువగావుంది.

అందరూ కలిసి శుభ్రపరచిన వైశాల్యం = (180 + 126) m² = 306 m²

©KTBS Not to be republished

**ఉదాహరణం 6:** సాన్యా వద్దవున్న పొలంలో కొంత భాగం రాబస్ ఆకారంలోవుంది. [చిత్రం 8.13 గమనించండి]. ఆమె కూతురు మరొక కుమారుడు ఈ పొలంలో పనిచేసి రెండు వేరు వేరు ధాన్యాలను పెంచాలనుకుంది. ఆమె పొలాన్ని రెండు సమభాగాలుగా చేసింది. ఈ పొలం చుట్టుకొలత 400 m మరియు దాని కర్ణం 160 m అయితే వారిద్దరికి పండించే పొలం వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి?

**సాధనం :** ABCD ఒక రాంబస్ ఆకారంలో వున్న పొలం.



చిత్రం 8.13

దాని చుట్టు కొలత = 400 m

అయితే త్రిభుజం పొడవు $= \frac{400}{4}$ m $= 100$ m

అ.జ, AB = AD = 100 m

దాని కర్ణం పొడవు BD = 160 m

$\Delta$ ABD లో సగంచుట్టుకొలత, $s = \frac{100+100+160}{2}$ m $= 180$ m

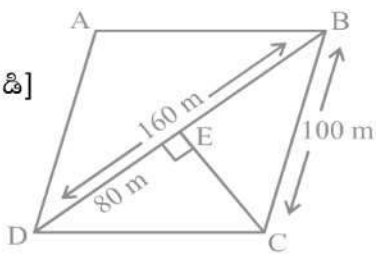
కావున, $\Delta$ ABD వైశాల్యం $= \sqrt{180(180-100)(180-100)180-160}$ m$^2$

$= \sqrt{180 \times 80 \times 80 \times 20}$ m$^2$

$= 4800$ m$^2$

కావున, ప్రతి ఒక్కరు పండించే పొలం వైశాల్యం 4800 m$^2$ అవుతుంది.

**పర్యాయ పద్ధతి:**



చిత్రం 8.14

CE $\perp$ BD ని గీయండి [చిత్రం 8.14 గమనించండి]

BD = 160 m

DE = 160 m ÷ 2 = 80 m

మరియు DE$^2$ + CE$^2$ = DC$^2$, దీనితో

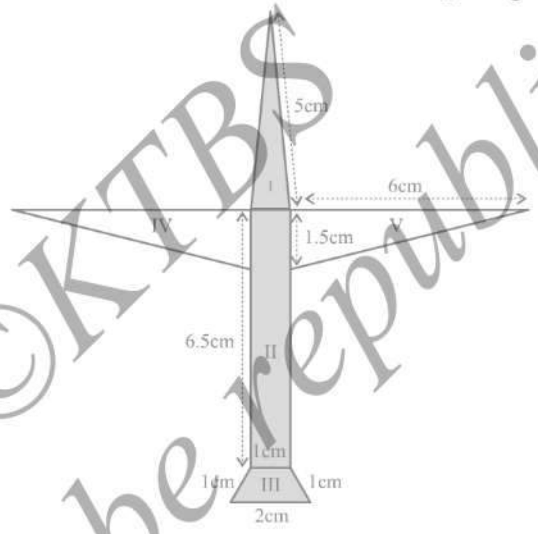
$CE = \sqrt{DC^2 - DE^2} = \sqrt{100^2 - 80^2}$ m $= 60$ m

కావున $\Delta$ BCD వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times 160 \times 60$ m$^2$ $= 4800$ m$^2$

©KTBS Not to be republished

## అభ్యాసం 8.2

1. ఒక పార్కు ABCD చతుర్భుజాకారంలో వుంది. $\angle C = 90°$, AB = 9m, BC = 12 m, CD = 5 m మరియు AD = 8 m. అయిన అది ఆక్రమించే వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.
2. ABCD చతుర్భుజాకారంలోవున్న AB = 3 cm, BC = 4cm, CD = 4 cm, DA = 5 cm మరియు AC = 5 cm వుంది దీని వైశాల్యంకనుక్కోండి.
3. చిత్రం8.15 రాధ ఒక రంగు కాగితంతో విమానం చిత్రాన్ని క్రింద చూపినట్లు (8.15) చేసెను. ఆమె ఉపయోగించిరంగు కాగితం వైశాల్యం కనుక్కోండి.



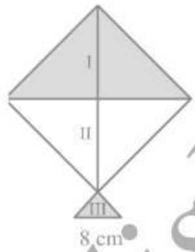

చిత్రం 8.15

4. ఒక త్రిభుజం మరియు ఒక సమాంతర చతుర్భుజం ఒకే పాదంపై ఉన్నవి మరియు సమాన వైశాల్యాలు కలిగివున్నాయి. త్రిభుజ భుజాలు 26 cm, 28 cm మరియు 30 cm మరియు సమాంతర చతుర్భుజం ఎత్తును కనుక్కోండి.
5. ఒక రాంబస్ ఆకారంలో వున్న పొలములో 18 ఆవులను మేపడానికి కావలసిన గడి వుంది. రాంబస్ లోని ప్రతి భుజము పొడవు 30m మరియు దానిలోని పెద్ద కర్ణం 48m అయితే ప్రతి ఒక్క ఆవుకు దొరికే గడ్డి పొలం వైశాల్యం ఎంత?
6. ఒక గొడుగు రెండు వేరు వేరు రంగులున్న పది త్రిభుజాకార గుడ్డతో తయారు చేయబడింది. [చిత్రం 8.16 గమనించండి]. ప్రతి గుడ్డముక్కకొలతలు 20 cm, 50 cm మరియు 48 cm అయిన ఒకగొడుగుకు ప్రతి రంగుగల వైశాల్యమునకు ఉంత గుడ్డ కావాల్సి వస్తుంది?

©KTBS Not to be republished

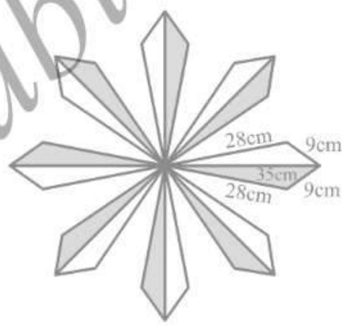
7. చతురస్రాకార గాలిపటం కర్ణం 32cm మరియు సమద్విబాహు ఆకార పాదం 8 cm అయితే దాని మిగిలిన రెండు భుజాలు 6 cm కలిగిన మూడు వేరు వేరు రంగులున్న కాగితంతో చిత్రం 8.16 చూపినట్లు చేయవల్సింది దానిలో ఉపయోగించిన ప్రతి రంగు కాగితం ఎంత అని కనుక్కోండి?

చిత్రం 8.16




చిత్రం 8.17

8. నేలపై వున్న పూల చిత్రము 16 త్రిభుజాకారపెంకుల (Tiles) తో కూడుకొనివుంది. ఈ త్రిభుజ భుజాలు 9cm, 28 cm మరియు 35cm అయిన. [చిత్రం 8.17 గమనించండి]. ఈ పెంకులను 50పై ప్రతి చదరపు సెం.మీ లో నునుపు చేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుక్కోండి




చిత్రం 8.18

9. ఒక పొలం ట్రెపీజియం ఆకారంలో వుంది. దాని సమాంతర భుజాలు 25 m అయిన 10 m సమాంతరం కాని భుజాల పొడవు 14 m మరియు 13 m అయిన పొలం వైశాల్యం కనుక్కోండి.

## 8.4 సారాంశం

ఈ పాఠంలో మీరు ఈ కింది అంశాలను చదివారు:

1. $a, b$ మరియు $c$ భుజాలుగల త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి లెక్కించే సూత్ర సిద్ధాంతం.

$$\text{త్రిభుజ వైశాల్యం} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{ఇక్కడ } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ అయివుంటుంది.}$$

2. చతుర్భుజ భుజాలు మరియు ఒక కర్ణాన్ని ఇచ్చినప్పుడు చతుర్భుజాన్ని రెండు త్రిభుజాలుగా విభజించి మరియు హెరాన్స్ సూత్రం ఉపయోగించి చతుర్భుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోవచ్చు.

©KTBS Not to be republished

## అధ్యాయం – 9

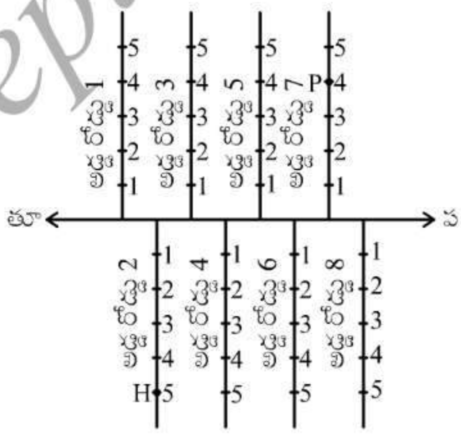
# నిరూపక జ్యామితి

What's the good of Mercator's North Poles and Equators, Tropics, Zones and Meridian Lines?'
So the Bellman would cry; and crew would reply 'They are merely conventional signs!'

LEWIS CARROLL, ***The Hunting of the Snark***

## 9.1 పరిచయం

ఒక సంఖ్యారేఖలో ఒక బిందువును ఎలా గుర్తించాలో మీరు ఇదివరకే నేర్చుకున్నారు. రేఖపై ఒక బిందువు స్థానాన్ని ఎలా వివరించాలో తెలుసుకొన్నారు. దీనితోపాటు ఒక బిందువును కనుగొనడానికి దాని స్థానాన్ని ఒకటి కంటే ఎక్కువ రేఖలకు సంబంధించిన సూచనలు కావలసినన్ని సన్నివేశాలు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు క్రింది సందర్భాన్ని గమనించండి.



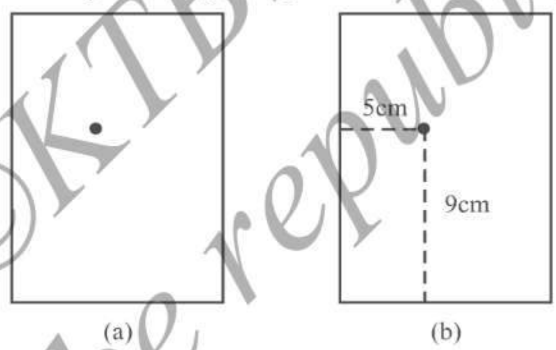

చిత్రం 9.1

I. చిత్రం 9.1లో తూర్పు పడమర దిశలలో వెళ్లిన ఒక రహదారి మరియు పడమర నుండి తూర్పు వైపుకు ఉన్న క్రాస్ రోడ్‌లకు ఒక్కొక్క సంఖ్యను ఇచ్చారు. అంతేకాకుండా ప్రతి క్రాస్ రోడ్డులోను ఇంటింటికి సంఖ్యలను గుర్తించారు. మీ స్నేహితుల ఇంటిని కనుగొనడానికి ఒకే ఒక సూచన ఉంటే సరిపోతుందా? ఉదాహరణకు ఆమె రెండవ వీధిలో నివసిస్తూ ఉంటే ఆమె ఇంటిని సులభంగా కనుగొనవచ్చా? ఇంటి సంఖ్య లేకుండా ఎంత? ఇల్లు ఏ క్రాస్ రోడ్డులో ఉంది ఈ రెండు సమాచారాలు లభ్యమయితే ఇంటిని కనుగొనడం ఇంకా సులభం కదా! రెండవ క్రాస్

©KTBS Not to be republished

రోడ్డులోని ఐదవ నెంబరు ఇంటిని గుర్తిస్తాము. (చిత్రం 9.1)లో ఇంటి స్థానన్ని 'H' సూచిస్తున్నది. అదేవిధంగా 'P' ఏడవ క్రాస్ రోడ్డులో ఇంటి సంఖ్య '4' ను సూచిస్తుంది.

II. ఒక పేపరులో మీరు ఒక బిందువును గుర్తించారు అనుకొందాము. (చిత్రం 9.2(a)) పేపరుపై ఆ బిందువు గల స్థానాన్ని తెలియజేయమని చెబితే, మీరు దానిని ఎలా తెలుపుతారు? బిందువు పేపరుపై అర్థం లో లేదా అవి కాగితపు ఎడమ అంచు పక్కన ఉన్నది. లేదా అది పేపరు ఎడమ వైపు పై కొనకు చాలా సమీపంలో ఉన్నది. ఇలాంటి విధానాలలో బహుశా మీరు ప్రయత్నించవచ్చు. వీటిలో ఏ ఒక ప్రకటనా బిందువు ఖచ్చిత స్థానాన్ని దృఢ పరుస్తున్నదా? లేదు. అయితే బిందువు కాగితపు ఎడమ అంచునుండి సుమారు 5cm దూరంలో ఉన్నది అని మీరు చెబితే బిందువు స్థానం గురించి కొంచెం అందాజు చేయవచ్చు. అయితే ఖచ్చితంగా గుర్తించడానికి సాధ్యం కాదు. మీరు కొంచెం ఆలోచించండి. బిందువు కాగితపు కింది అంచు నుండి 9cm పై భాగంలో ఉన్నది. అనకుండా చెప్పివుంటే, అది ఖచ్చితంగా ఎక్కడ ఉన్నది అనికూడా మనం తెలుసుకొనవచ్చు.




చిత్రం **9.2**

ఈ ఉద్దేశ్యానికి రెండు నిర్దిష్ట రేఖలతో కాగితపు ఎడమ అంచు మరియు కింది అంచులనుండి బిందువు ఖచ్చితంగా ఎంత దూరంలో ఉన్నది అని తెలుసుకొనుట ద్వారా మనం దాని స్థానాన్ని నిర్దిష్టపరుస్తాం (చిత్రం 9.2(b)) మరొక విధంగా చెప్పాలంటే బిందువు స్థానాన్ని కనుగొనడానికి మనకు రెండు స్వతంత్ర సమాచారాల అవసరం ఉంది. ఇపుడు తరగతి గదిలో ఆసనాల వ్యవస్థ అనే కార్యాచరణాన్ని కింద చూపిన విధంగా నిర్వహించండి.

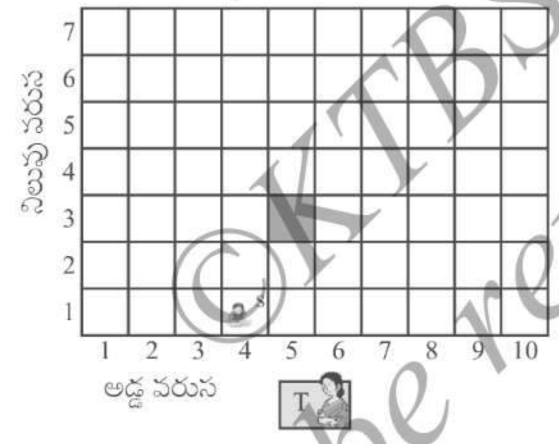
**కార్యచరణం 1 (ఆసన వ్యవస్థ) :** మీ తరగతిలో గల అన్ని బెంచీలను ప్రక్కప్రక్క చతురస్రాకారంలో జోడించండి. ప్రతి ఒక బెంచ్ చతురస్రంలో ఉపయోగించు విద్యార్థి పేరును రాయండి. రెండు స్వతంత్ర సమాచారాలను ఉపయోగించి, తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థి స్థానాన్ని ఖచ్చితంగా వివరించవచ్చు.

©KTBS Not to be republished

(i) ఆమె/అతడు కూర్చొను నిలువ వరుస సంఖ్య.

(ii) ఆమె/అతడు కూర్చొను అడ్డువరుస సంఖ్య

మీరు ఐదవ నిలువ వరుస మరియు మూడవ అడ్డవరుసలోని బెంచ్‌లో కూర్చొన్న వారైతే (చిత్రం 9.3లో రంగువేసిన చతురస్రంలో సూచించునది.) మీస్థానాన్ని (5,3) అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ మొదట నిలువవరుస సంఖ్యను తరువాత అడ్డవరుస సంఖ్యను రాయాలి. (5,3) అనునది (3,5) కు సమానమా? మీ తరగతిలోని ఇతర విద్యార్థుల పేరు మరియు స్థానాన్ని రాయండి. ఉదాహరణకు నాల్గవ నిలువ వరుస మరియు ఒకటవ అడ్డువరుసలో సోనియా కూర్చొని ఉంటే. S(4,1) అని రాయండి. ఉపాధ్యాయులను బెంచ్ ఆసన వ్యవస్థలోని భాగం కాదు. మనం ఉపాధ్యాములను కేవలం ఒక ప్రేక్షకలుగా పరిగనిస్తాము.




T ఉపాధ్యాయుల బెంచ్‌ను సూచిస్తుంది.
S సోనియా బెంచ్‌ను సూచిస్తుంది.

చిత్రం **9.3**

ఒక సమతలంలో గల ఏదేని ఒక వస్తువు యొక్క స్థానాన్ని రెండు లంబరేఖల సహాయంతో సూచించవచ్చు అనుటను పై చర్చవల్ల మనం గమనించివచ్చు. బిందువు నిదర్శనంలో మనకు కాగితపు కింది అంచు మరియు ఎడమ అంచుల నుండి బిందువుకు గల దూరం తెలియ వలసి ఉంటుంది. ఆసన వ్యవస్థలో మనకు నిలువ వరుస మరియు అడ్డువరుసల సంఖ్యల అవసరం ఉంటుంది. ఈ సరళ సమాచారాలలో సుదూర పరిణామాలు ఉన్నాయి. అంటే ఇది నిరూపక జ్యామితి అను గణితపు ఒక ప్రముఖ శాఖకు కారణమైనది. ఈ అధ్యాయంలో నిరూపక జ్యామితి యొక్క కొన్న ప్రాథమిక పరికల్పనలను పరిచయం చేయడం ముఖ్య ఉద్దేశం పై తరగతు లలో మీరు వీటిగురించి ఇంకా ఎక్కువ నేర్చుకొంటారు. ఒక తలంలో ఏదైనా బిందువును రెండు నిర్దేశాల అధారంగా స్థాపించటం అనే భావన గణితంలో **వైశ్లేషిక రేఖాగణితం** అనే కొత్త శాఖను సృష్టించింది.

©KTBS Not to be republished

17 వ శతాబ్ధంలో ప్రముఖ గణిత శాస్త్రవేత్త **"రెనే డెకార్ట్"** పరుపుపై పడుకొని ఆలోచించడాన్ని ఇష్టపడేవారు. ఒకరోజు పరుపుపై విశ్రాంతి తీసుకొంటున్నాపుడు, ఒక సమతలంలో గల ఒక బిందువు స్థానాన్ని వివరించే సమస్యను అతను పరిహారం కనుగొన్నాడు. అతని విధానం అక్షాంశ–రేఖాంశాల పరికల్పనలలో కూడిన పురాతన మాదిరిని నవీకరించిన రూపం. ఒక సమతలంలో ఒక బిందువు స్థానాన్ని వివరించు పద్ధతిని **"డెస్కార్టెస్‌కు"** గౌరవ సూచకంగా **"కార్ఫీజియన్ వ్యవస్థ"** అని కూడాపిలువ బడినది.

రెనే డెకార్ట్ **(1596 -1650)**
చిత్రం **9.4**

## అభ్యాసం 9.1

1. మీ అధ్యయన బల్ల పై గల బల్లదీపం (study lamp) స్థానాన్ని మరొక వ్యక్తికి మీరు ఎలా వివరిస్తారు?

2. **రహదారి ప్రణాళిక :-** ఒక నగరంలో రెండు రహదారులున్నాయి. ఈ రెండు దారులలో ఒకటి ఉత్తర–దక్షిణ దిశలకు మరొకటి తూర్పు–పడమర దిశలకు ఉన్నాయి. ఇవి నగరానికి మధ్యలో ఉన్నాయి. పరస్పరం 200m అంతరంలో గల మిగతా అన్ని వీధులు ఈ రహదారికి సమాంతరంగా ఉన్నాయి. ప్రతిదిశకు 5 దారులు ఉన్నాయి. 200m = 1cm అను ప్రమాణాన్ని ఉపయోగించి, మీ నోటుపుస్తకంలో నగరపు ఒక మాదిరి గ్రాఫ్‌ను నిర్మించండి. రహదారి వీధులను ఏకరేఖలలో సూచించండి.

మీ మాదిరిలో అనేక ఖండించు దారులు ఉన్నాయి. ఇలాంటి ఖండించు ప్రతి దారికి ఒక ఉత్తర–దక్షిణాలలో మరొకటి తూర్పు–పడమర దిశలలో రెండు దారులలో ఏర్పడినాయి. ప్రతి జత ఖండించు దారులను ముందు క్రమంలో సూచించవచ్చు. ఉత్తర – దక్షిణ దిశగా ఉన్న రెండవ వీధి మరియు తూర్పు–పడమరల దిశగా 5వ వీధి ఒకదానికొకటి సాగిపోవునప్పుడు మనం దానిని వీధి ఖండన (2,5) అని పిలుస్తాము.

ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి.

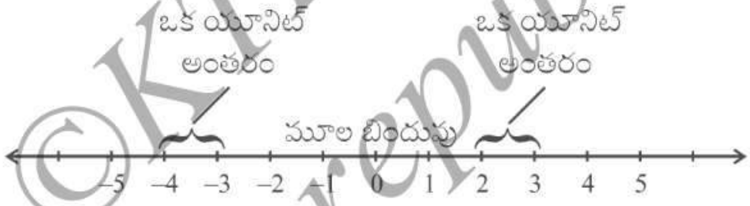
(i) (4,3) అను ఎన్ని వీధి ఖండనలను సూచించవచ్చు?

(ii) (3,4) అను ఎన్ని వీధి ఖండనలను సూచించవచ్చు అనుటను కనుగొనండి.

©KTBS Not to be republished

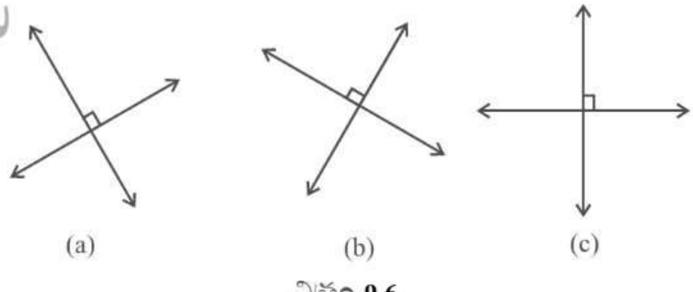
## 9.2 కార్టీజియన్ వ్యవస్థ :

'సంఖ్యా వ్యవస్థ' అను అధ్యాయంలో మీరు సంఖ్యారేఖ గురించి నేర్చుకొన్నారు. సంఖ్యారేఖపై ఒక స్థిరబిందువు '0' (సున్నా)కు ఇరువైపులా సమాన దూరాలలో బిందువులు గుర్తించబడి ఉంటాయి. ఈ స్థిరబిందువు '0' (సున్న)ను మూలబిందువు అంటారు. ధన సంఖ్యలు అన్ని సున్నాకు కుడివైపున మరియు ఋణ సంఖ్యలు అన్ని సున్నాకు ఎడమ వైపున సూచిస్తాము. ఒక సరళ రేఖలో సమాన అంతరంలో బిందువులను గుర్తించడం ద్వారా మనం సంఖ్యారేఖపై సంఖ్యలను సూచిస్తాము. సున్న మూలబిందువు నుండి ఒక యూనిట్ దూరం '1'ని మూడు యూనిట్ల దూరం '3'ను సూచిస్తాయి. మూలబిందువు నుండి ధనాత్మక దిశలో '$r$' దూరంలో గల బిందువు '$r$' అను సంఖ్యను సూచిస్తాయి. ఋణాత్మక దిశలో మూల బిందువు నుండి '$r$' దూరంలో గల బిందువు $-r$ అను బిందువును సూచిస్తాయి. చిత్రం 9.5లో సంఖ్యారేఖపై వివిధ సంఖ్యల స్థానాలను చూపించబడినది.




చిత్రం **9.5**

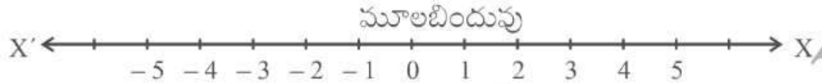
డెకార్టె ఒక తలంలో పరస్పరం లంబంగా ఉన్న ఇలాంటి రెండు సంఖ్యారేఖలను తీసుకొన్నాడు. ఈ రేఖల ఆధారం చేసుకోని బిందువులను గుర్తించాలి. చిత్రం 3.6లో సూచించిన విధంగా లంబరేఖలు ఏ దిశలోనైనా ఉండవచ్చు. కానీ ఈ అధ్యాయంలో ఒక సమతలంపైన ఏదేని ఒక బిందువు స్థానాన్ని గుర్తించడానికి ఒక రేఖను క్షితజ–సమాంతరంగాను, మరొక రేఖను క్షితిజ – లంబంగాను ఉండునట్లు ఈ రెండు రేఖలను తీసుకొంటాము.




చిత్రం **9.6**

©KTBS Not to be republished

వాస్తవానికి ఈ రేఖలు క్రింది విధంగా లభిస్తాయి. రెండు సంఖ్యారేఖలను తీసుకొని క్షితిజ సమాంతర రేఖ X'X ను X – అక్షం అని, క్షితిజ – లంబరేఖ Y'Y ను Y – అక్షం అని పిలవండి. (చిత్రం 9.7(a) చూపినట్లు) సంఖ్యారేఖపై రాసినట్లు దానిపై సంఖ్యలను రాయండి. YY' క్షితిజ – సమాంతరంకాదు క్షితిజ లంబం అనుటను గమనించండి Y'Y పైన కూడా మనం ఇదే విధంగా సంఖ్యలను రాస్తాము.

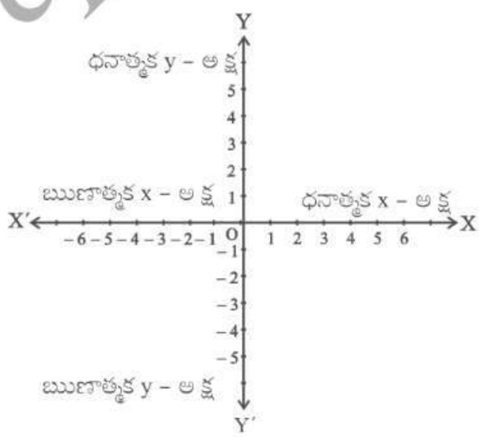



(a)

(b)

చిత్రం **9.7**

రెండు రేఖలు వాటి మూల బిందువు లేదా సున్నలో ఒకదానికొకటి ఖండించు కొన్నట్లు వాటిని గీయండి. చిత్రం 9.8 క్షితిజ – సమాంతర రేఖ X'X ను *x* – అక్షం అని, క్షితిజ లంబరేఖ Y'Y ను *y* – అక్షం అని అంటాము.

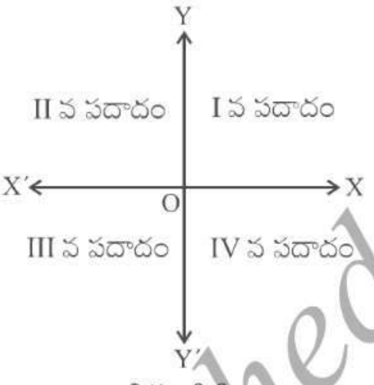



చిత్రం **9.8**

X'X మరియు Y'Y లు ఖండించు కొను బిందువును మూలబిందువు అని, దీనిని 'O' చే సూచిస్తారు. $\overrightarrow{OX}$ యొక్క దిశలో ధన సంఖ్యలు ఉంటాయి కాబట్టి $\overrightarrow{OX}$ ను ధన X – అక్షం అని $\overrightarrow{OY}$ దిశలో ధన సంఖ్యలు ఉంటాయి కాబట్టి OY ను ధన *y* – అక్షం అని అంటారు. $\overrightarrow{OX'}$ దిశలో $\overrightarrow{OY'}$ ల దిశలలో ఋణ సంఖ్యలు ఉంటాయి.

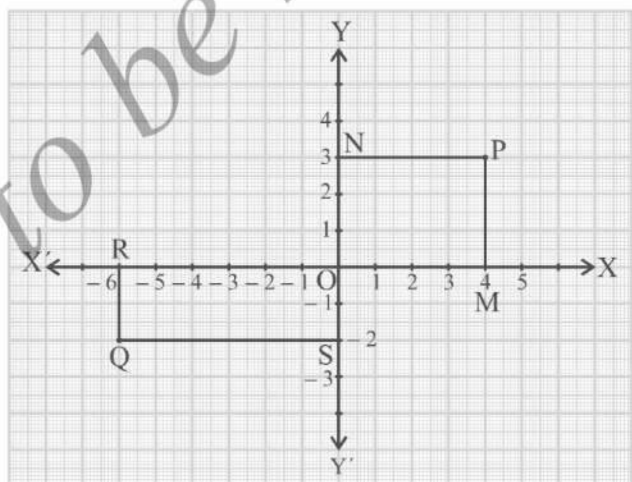
©KTBS Not to be republished

కాబట్టి $\overline{OX'}$ ను ఋణ X – అక్షంను $\overline{OY'}$ ను ఋణ $y$ – అక్షం అని అంటాము. అక్షాల సమతలాన్ని నాలుగు భాగాలుగా చేసి ఉండటాన్ని మీరు గమనించవచ్చు. ఈ నాలుగు భాగాలను చతుర్థక పాదాలు అని అంటారు. (4లో ఒక భాగం) వీటిని OX నుండి ప్రారంభించి, అపసవ్యదిశలో I, II, III, IV లలో సూచిస్తాము. చిత్రం 9.9 ఇలా సమతలం అక్షాలను మరియు చతుర్థక పాదాలను కలిగి ఉన్నది. ఈ సమతలాన్ని **"కార్టీజియన్ తలం"** లేదా **"నిరూపక తలం"** లేదా ***xy*-తలం** అని అంటాము. అలాగే X,Y అక్షాలను నిరూపక అక్షాలు అంటాము.



చిత్రం 9.9

ఇపుడు మనం ఈ వ్యవస్థ గణితానికి ఎందుకు ప్రాథమికమైనది మరియు ఎలా ఉపయోగమైనది అని చూద్దాం. గ్రాఫ్ పేపర్‌పై XY– అక్షాలను గుర్తించిన కింది చిత్రాన్ని గమనించండి. P మరియు Q బిందువులకు $q$ మరియు $p$ బిందువులకు అక్షాల గల దూరాలను చూద్దాం. దీనికోసం $x$ – అక్షం పై PM మరియు $y$ – అక్షం పై PN లంబాలను గీయండి. అదేవిధంగా చిత్రం 9.10 లో చూపినట్లు QS లంబాలను గీయండి.



చిత్రం 9.10

©KTBS Not to be republished

**మీరు గమనించవలసిన అంశాలు :**

(i) ధన $x$ – అక్షం దిశలో P బిందువు నుంచి $y$ – అక్షానికి గల లంబదూరం PN = OM = 4 యూనిట్లు.

(ii) ధన $y$ – అక్షం దిశలో $x$ – అక్షం నుండి P బిందువుకు గల లంబదూరం PM = ON= 3 యూనిట్లు.

(iii) ఋణ $x$ – అక్షం దిశలో $y$ – అక్షం నుండి Q బిందువుకు గల లంబదూరం OR = SQ = 6 యూనిట్లు.

(iv) ఋణ $y$ – అక్షం దిశలో, $x$ – అక్షం నుండి Q బిందువుకు గల లంబదూరం OS = RQ = 2 యూనిట్లు.

ఇప్పుడు ఈ లంబదూరాలను ఉపయోగించి, ఏ ఖంగారు లేకుండా బిందువులను ఎలా వివరించవచ్చు. ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలను ఈ కింది పద్ధతి ద్వారా రాస్తాము.

(i) ఒక బిందువుయొక్క **$x$ నిరూపకము** $y$ – అక్షం నుండి $x$ – అక్షం వరకు కొలిచిన దాని లంబదూరం (ధన $x$ – అక్షం దిశలో ధన మరియు ఋణ $x$ – అక్షం దిశలో ఋణ). P బిందువుకు అది + 4 మరియు Q కు – 6. $x$ – నిరూపకాన్ని ప్రథమ నిరూపకం అని కూడా పిలుస్తారు.

(ii) ఒక బిందువు యొక్క **$y$ – నిరూపకము** $x$ – అక్షం నుండి $y$ – అక్షం వరకు కొలిచిన దానిలంబదూరం (ధన $y$ – అక్షం దిశలో ధన ఋణ $y$ – అక్షం దిశలో ఋణ). P బిందువుకు అది + 3 మరియు Q కు అది –2. $y$ – నిరూపకాన్ని **ద్వితీయ నిరూపకం** అని కూడా పిలుస్తాము.

(iii) నిరూపకం సమతలంలో గల ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలను చెప్పేటపుడు మొదట $x$ – నిరూపకం ఆ తరువాత $y$ – నిరూపకం వస్తాయి మనం ఆ నిరూపకాలను (ఆవరణం)లో రాస్తాము. కావున 'P' యొక్క నిరూపకంలు (4,3) మరియు 'Q' యొక్క నిరూపకాలు (–6, –2).

నిరూపకాలు సమతలంలో ఏ బిందువు నిరూపకాలైనా ఏకైకంగా ఉంటాయి. (3,4) అనునది (4,3) కు సమానం కాదు.

©KTBS Not to be republished

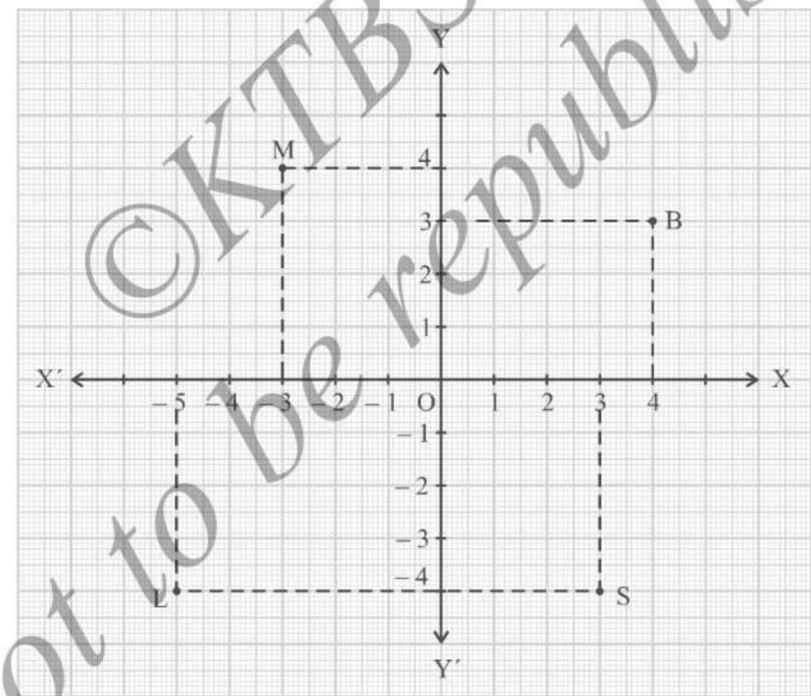
**ఉదాహరణ 1 :** చిత్రం 9.11 ను చూచి క్రింది వాక్యాలను పూరించండి.

(i) B బిందువు ప్రథమ నిరూపకం మరియు ద్వితీయ నిరూపకాలు క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున B నిరూపకాలు (_______ , _______)

(ii) M బిందువు యొక్క $x$ – నిరూపకం మరియు $y$ – నిరూపకాలు క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున M నిరూపకాలు (_______ , _______).

(iii) L బిందువు యొక్క $x$ – నిరూపకం మరియు $y$ – నిరూపకాలు క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున L నిరూపకాలు (_______ , _______).

(iv) S బిందువు యొక్క $x$ – నిరూపకం మరియు $y$ – నిరూపకం క్రమంగా _______ మరియు _______ కావున S నిరూపకాలు (_______ , _______).




చిత్రం **9.11**

©KTBS Not to be republished

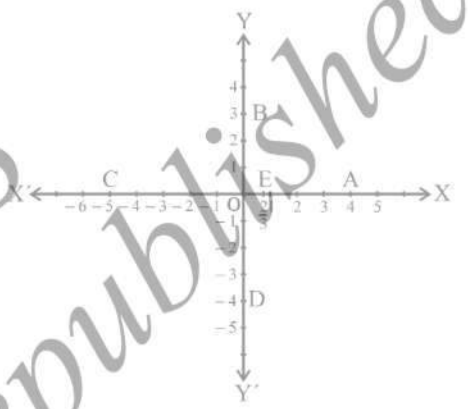
**సాధన :** (i) $y$ అక్షం నుండి B బిందువు గల దూరం 4 యూనిట్లు అయినందు వల్ల B బిందువు $x$ – నిరూపకము లేదా ప్రథమ నిరూపకం 4. $x$ అక్షం నుండి B బిందువుకు గల దూరం 3 యూనిట్లు కావున B బిందువు యొక్క $y$ నిరూపకం అంటే ద్వితీయ నిరూపకం 3 కావున B బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (4, 3).

(ii) M బిందువు యొక్క (పై (i)లో ఉన్నట్లు) $x$– నిరూపకాలు మరియు $y$– నిరూపకాలు క్రమంగా (–3 మరియు 4) కావున M బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (–3, 4).

(iii) L బిందువు యొక్క $x$ – నిరూపకాలు మరియు $y$ – నిరూపకాలు క్రమంగా (–5 మరియు – 4) కావున L బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (–5, – 4).

(iv) S బిందువు యొక్క $x$ – నిరూపకాలు మరియు $y$ – నిరూపకాలు క్రమంగా (3 మరియు – 4) కావున S బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (3, – 4).

**ఉదాహరణ 2 :** చిత్రం 9.12 లో అక్షాలపై గుర్తించిన బిందువుల నిరూపకాలను రాయండి.



చిత్రం **9.12**

**సాధన:** మీరు చూడవలసిన దేమిటంటే

(i) A బిందువు $y$ – అక్షం నుండి 4 యూనిట్ల దూరంలోను, $y$ – అక్షం నుండి '0'(సున్నా) దూరంలో ఉన్నది. కావున A బిందువు యొక్క $x$ – నిరూపకం 4, $y$ – నిరూపకం '0' (సున్నా) 'A' యొక్క నిరూపకాలు (4,0) ఇలాగా

(ii) B యొక్క నిరూపకాలు (0, 3). ఎందుకు?

(iii) C యొక్క నిరూపకాలు (–5, 0). ఎందుకు?

(iv) D యొక్క నిరూపకాలు (0, –4). ఎందుకు?

(v) E యొక్క నిరూపకాలు $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. ఎందుకు?

$x$ అక్షంపై ఏదేని బిందువు $x$ – అక్షంనుండి '0' (సున్న) దూరంలో ఉంటే ఆ బిందువు యొక్క $y$ – నిరూపకం 0 (సున్న) అవుతుంది. ఇలాగా $x$ – అక్షం పై ఏదేని బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $(x, 0)$ రూపంలో ఉంటాయి. ఇక్కడ $x$ అంటే $y$ – అక్షం నుండి బిందువుకు గల దూరం. అదేవిధంగా $y$ – అక్షం పై ఏదేని బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $(0, y)$ రూపంలో ఉంటాయి. ఇక్కడ $y$ అంటే $x$ – అక్షం నుండి బిందువుకు గల దూరం. ఎందుకు?

మూల బిందువు '**O**' యొక్క నిరూపకాలు ఏవి? ఇది రెండు అక్షాలనుండి (0)సున్న దూరంలో ఉంది. కావున దాని ప్రథమ నిరూపకం మరియు ద్వితీయ నిరూపకం రెండు (0) సున్నా అయినాయి. కావున మూలబిందువు యొక్క నిరూపకాలు (0,0).

©KTBS Not to be republished

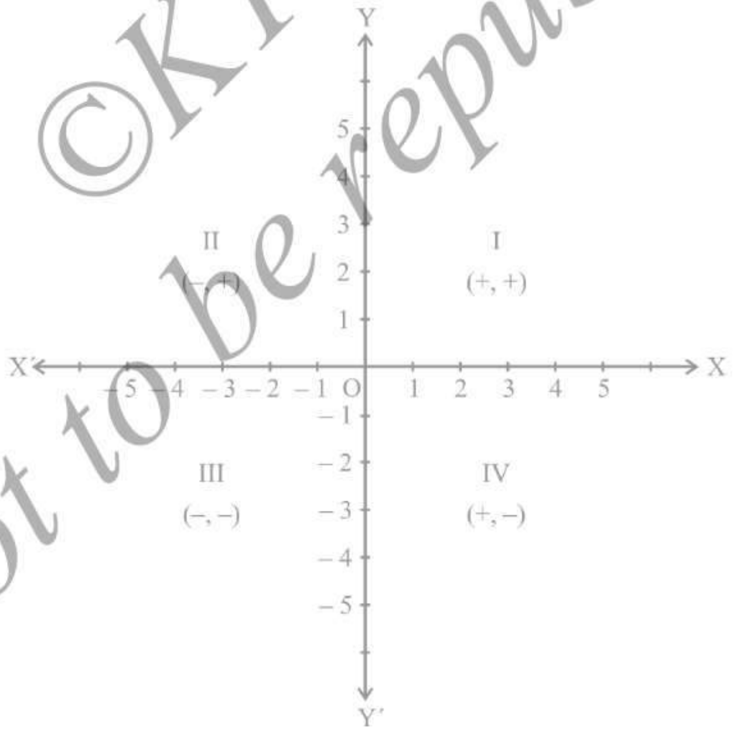
పై ఉదాహరణల నుండి ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాల చిహ్నాలకు ఆ బిందువు ఉండే చతుర్థక పాదానికి గల సంబంధాన్ని మీరు గమనించి ఉండవచ్చు.

(i) ఒక బిందువు ఒకటవ పాదంలో ఉంటే అది (+, +) రూపంలో ఉంటుంది ఎందుకంటే ఒకటవ పాదం ధన $x$ – అక్షం, ధన $y$ – అక్షాలలో ఆవృతమై ఉంటుంది.

(ii) ఒక బిందువు రెండవ పాదంలో ఉంటే అది (–, +) రూపంలో ఉంటుంది. ఎందుకంటే రెండవ పాదం ఋణ $x$ – అక్షం, ధన $y$ – అక్షం లో ఆవృతమై ఉంటుంది.

(iii) ఒక బిందువు మూడవ పాదంలో ఉంటే అది (–, –) రూపంలో ఉంటుంది. ఎందుకంటే మూడవపాదం ఋణ $x$ – అక్షం, ఋణ $y$ – అక్షాలలో ఆవృతమై ఉంటుంది.

(iv) ఒక బిందువు నాల్గవ పాదంలో ఉంటే అది (+, –) రూపంలో ఉంటుంది. ఎందుకంటే నాల్గవపాదం ధన $x$ – అక్షం, మరియు ఋణ $y$ – అక్షాలలో ఆవృతమై ఉంటుంది. చిత్రం 9.13ను చూడండి.




చిత్రం 9.13

©KTBS Not to be republished

**గమనించండి :** సమతలంలోగల ఒక బిందువును వివరించడానికి మనం పైన చర్చించిన విధానం ప్రపంచ వ్యాప్తంగా అంగీకరించ బడిన ఒక పద్ధతి. ఉదాహరణకు ప్రథమ మరియు ద్వితీయ నిరూపకాలు తర్వాత రావలసిన వ్యవస్థ కూడా ఉండి ఉండవచ్చు. అయితే ఏ గడిబిడి కలుగకూడదు అనే ఉద్దేశ్యంతో మనం మొదట వివరించిన పద్ధతికి మొత్తం ప్రపంచమే ఒప్పుకొన్నది.

### అభ్యాసం 9.2

**1. కింది ప్రతి ప్రశ్నకు జవాబు రాయండి.**

(i) కార్టీజియన్ సమతలంలో ఒక బిందువును గుర్తించడానికి గీచిన క్షితిజ – సమాంతర మరియు క్షితిజ – లంబరేఖల పేర్లేమి?

(ii) ఈ రెండు రేఖల నుండి ఏర్పడిన సమతలం యొక్క భాగాల పేర్లు రాయండి?

(iii) ఈ రెండు రేఖలు ఖండించు బిందువు పేరు రాయండి?

**2. చిత్రం 9.14ను చూసి క్రింది వాటిని రాయండి.**

(i) B యొక్క నిరూపకాలు

(ii) C యొక్క నిరూపకాలు

(iii) (–3, –5) నిరూపకాలచే గుర్తించబడిన బిందువు

(iv) (2, –4) నిరూపకాలచే గుర్తించబడిన బిందువు

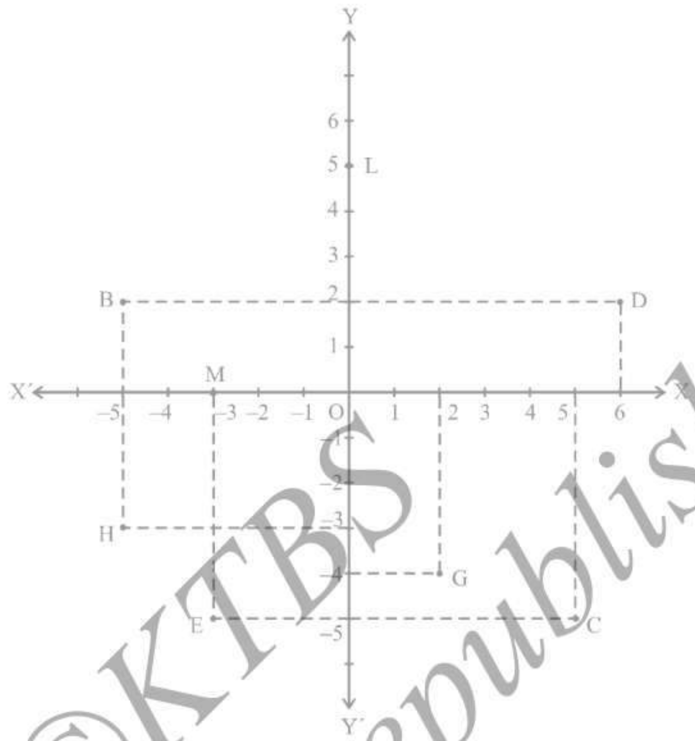
(v) D బిందువు యొక్క ప్రథమ నిరూపకం

(vi) H బిందువు యొక్క ద్వితీయ నిరూపకం

(vii) L బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

(viii) M బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

©KTBS Not to be republished




చిత్రం 9.14

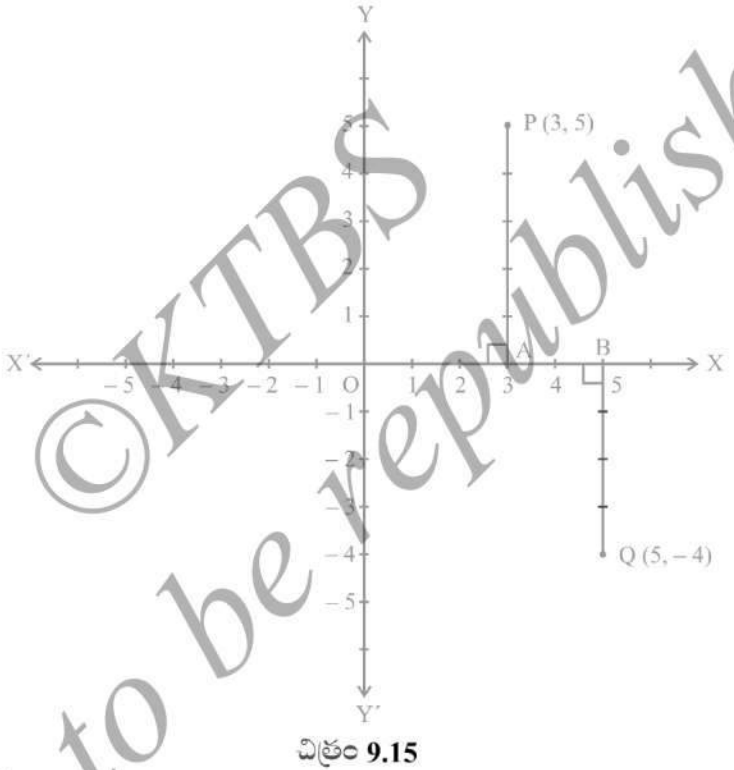
## 9.3 ఒక బిందువు నిరూపకాలను ఇచ్చినప్పుడు సమతలం మీద ఆ బిందువును గుర్తించడం :

ఇంతవరకు మనం బిందువులను రచించి వాటి నిరూపకాలను తెలుపమని మీకు చెప్పి ఉన్నాము. ఇప్పుడు మనం బిందు నిరూపకాలు ఇస్తే వాటిని కార్టీజియన్ తలంలో ఎలా స్థాపించాలో నేర్చుకొందాం. ఈ విధానాన్ని మనం "**బిందువును గుర్తించడం**" అంటాము.

ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలు (3, 5) అను. ఈ బిందువును నిరూపక తలంలో ఎలా స్థాపించాలో చూద్దాం. రెండు అక్షాలలోను 1 cm = 1 unit ప్రమాణాన్ని ఎంచుకొని మనం నిరూపకాలను అక్షంపై గుర్తించాలి. బిందువు (3,5) మనకు తెలిపేదేమంటే ఈ ధన $x$ – అక్షం దిశలో, $y$ – అక్షం నుండి 3 ప్రమాణాలు దూరంలో ఉంది మరియు ధన $y$ – అక్షం దిశలో $x$ – అక్షం నుండి 5 ప్రమాణాల దూరంలో ఉంది. మరియు బిందువు సున్న(0) నుండి ప్రారంభించి ధన $x$ – అక్షం దిశలో 3 ప్రమాణాలు లెక్కిస్తాము. మరియు అనురూపంగా ఆరంభించి ధన $y$ – అక్షం దిశలో చరించి 5 ప్రమాణాలను 3 లెక్కించండి. అనురూప బిందువు 'P' అని గుర్తించండి. చిత్రం 9.15ను చూడండి.

©KTBS Not to be republished

$y$ – అక్షం నుండి ఉన్న దూరం 3 ప్రమాణాలు మరియు $x$ – అక్షం నుండి ఉన్న దూరం 5 ప్రమాణాలు. ఇలా బిందువు యొక్క స్థానం P. 'P' యొక్క రెండు నిరూపకాలు ధన సంఖ్యలు అయినందువల్ల, P ఒకటవ పాదంలో వస్తుందనుటను గమనించండి. ఇదేవిధంగా Q (5, –4) బిందువును నిరూపక తలంలో స్థాపించవచ్చు. ఋణ $y$ – అక్షం దిశలో $x$ – అక్షం నుండి Q బిందువుకు గల దూరం 4 ప్రమాణాలు. కాబట్టి దాని $y$ – నిరూపకం – 4 (చిత్రం 9.15ను చూడండి.) Q బిందువు 4 వ పాదంలో ఉన్నది ఎందుకు ?

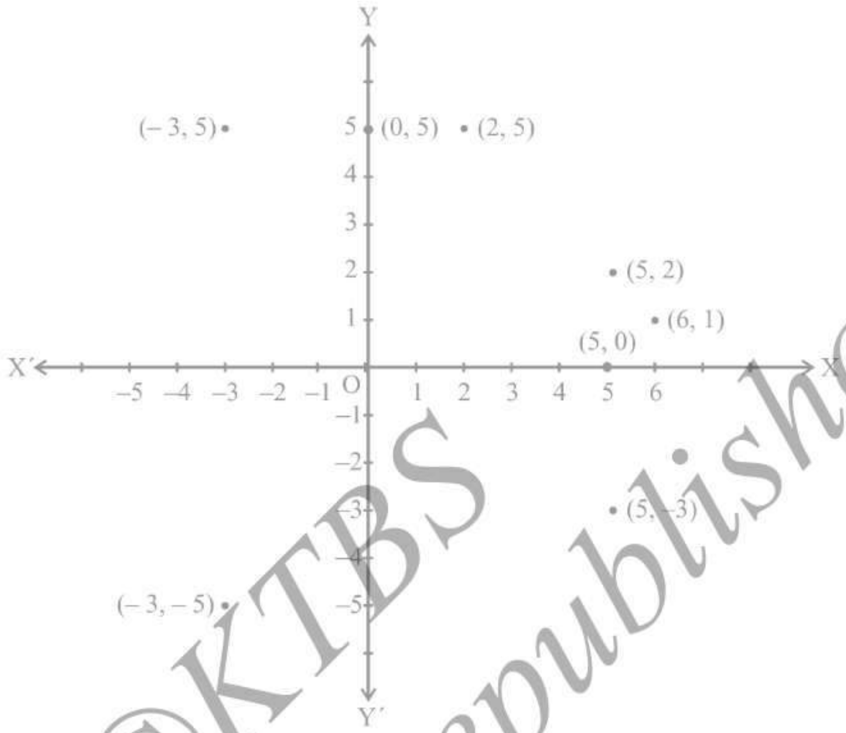



చిత్రం **9.15**

**ఉదాహరణ 3 :** (5, 0), (0, 5), (2, 5), (5, 2), (–3, 5), (–3, –5), (5, –3) మరియు (6, 1) బిందువులను కార్టీజియన్ సమతలం మీద గుర్తించండి.

**సాధన :** గ్రాఫ్ కాగితంలో $x$ – అక్షం మరియు $y$ – అక్షంను గీయండి. 1cm = 1 యూనిట్ అని తీసుకోండి. చిత్రం 9.16లో బిందువుల స్థానాలను చుక్కలద్వారా చూపబడినది.

©KTBS Not to be republished




చిత్రం **9.16**

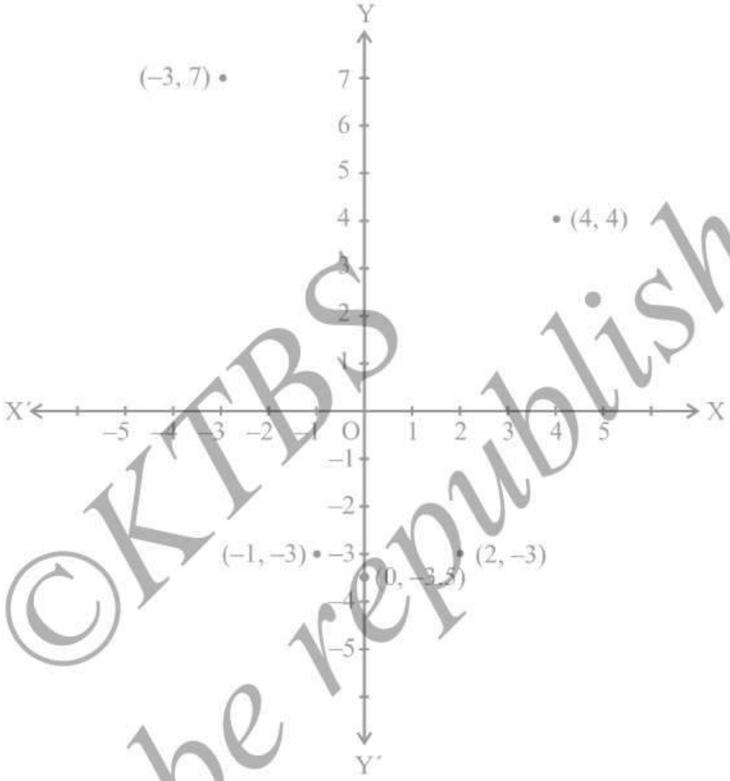
**సూచన:** పై ఉదాహరణలో (5, 0) మరియు (0, 5) ఒకే స్థానంలో లేవు అని మీరు చూడవచ్చు. అదేవిధంగా (5, 2) మరియు (2, 5)లస్థానాలు కూడా వేర్వేరుగా ఉన్నాయి. (–3, 5) మరియు (5, –3) కూడా వేర్వేరు స్థానాలలో ఉన్నాయి. $x \neq y$ అయితే ఒక కొర్టీజియన్ సమతలంలో $(x, y)$ యొక్క స్థానం $(y, x)$స్థానం కంటే భిన్నంగా ఉంది అని, ఇలాంటి కొన్ని ఉదాహరణలద్వారా మీరు తెలుసుకోన వచ్చు. కావున మనం $x$ మరియు $y$ ల నిరూపకాలను మార్చిన $(y, x)$ స్థానం $(x, y)$ స్థానానికి భిన్నంగా ఉంటుంది. దీని అర్థం ఏమంటే $(x, y)$ లో $x$ మరియు $y$ ల క్రమం ముఖ్యమైనది. కావున $(x, y)$ క్రమయుగ్మం అంటారు. $x \neq y$ అయితే క్రమయుగ్మం $(x, y) \neq$ క్రమయుగ్మం $(y, x)$. కానీ $x = y$ అయితే, $(x, y) = (y, x)$ అవుతుంది.

**ఉదాహరణ 4 :** కార్టీజియన్ సమతలంలో క్రింది క్రమయుగ్మ సంఖ్యలను బిందువులును గుర్తించండి. 1cm, 1 యూనిట్ ప్రమాణాన్ని ఉపయోగించండి.

| $x$ | 3 | 0 | 1 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 7 | 3.5 | 3 | 4 | 3 |

©KTBS Not to be republished

**సాధన :** పట్టికలో ఇచ్చిన సంఖ్యల జతలను (–3, 7), (0, –3.5), (–1, –3), (4, 4) (2, –3) అను బిందువుల ద్వారా గుర్తించవచ్చు. బిందువుల స్థానాలను చుక్కల ద్వారా గుర్తించాలి. చిత్రం 9.17లో చూపించినట్లు.




చిత్రం **9.17**

©KTBS Not to be republished

**కార్యాచరణం 2 :** ఇద్దరు వ్యక్తులకు ఒక ఆట (కావలసిన వస్తువులు : బిళ్ళలు లేదా నాణ్యాలు, గ్రాఫ్ కాగితం, రెండు వేర్వేరు రంగుల పాచికలు, ఎరుపు, ఆకుపచ్చ అని చెప్పండి.)

ప్రతి నాణ్యాన్ని (0, 0) లో ఉంచండి ప్రతి ఆటగాడు రెండు పాచికలను ఒకే సమయం లో వేస్తాడు. మొదటి ఆటగాడు ఇలా చేసినపుడు ఎరుపు పాచిక 3 ను ఆకుపచ్చ పాచిక 1ని చూపిస్తుంది అనుకొందాం. అప్పుడు అతడు నాణ్యాన్ని బిందువు (3, 1) లో ఉంచుతాడు. అదేవిధం గా రెండవ ఆడగాడు ఎరుపురంగు పాచిక 2ను ఆకుపచ్చపాచికలో 4 ను వేస్తే అతడు నాణ్యాన్ని (2, 4) లో ఉంచుతాడు. రెండవ సారి వేసినప్పుడు మొదటి ఆటగాడు ఎరుపు పాచికలో '1' ని ఆకుపచ్చపాచికలో '4' ను వేస్తే అతడు నాణ్యాన్ని (3 + 1, 1 + 4) లో ఉంచుతాడు. అంటే (3, 1) యొక్క $x$ – నిరూపకానికి 1 ని $y$ – నిరూపకానికి 4 ను చేర్చడంద్వారా నాణ్యాన్ని (4, 5)లో ఉంచుతాడు.

ఆట యొక్క గురి ఏమంటే మొదటి (10, 10) ని చేరాలి. అంటే ప్రథమ నిరూపకంకాని, ద్వితీయ నిరూపకం 10 కంటే ఎక్కువ కారాదు. అంతేకాకుండా ఇందివరకే ఒక స్థానంలో ఉన్న నాణ్యంపైన మరొక నాణ్యం ఉంచరాదు. ఉదాహరణ మొదటి ఆటగాడు నాణ్యాన్ని ఇదివరకే రెండవ ఆటగాడు నాణ్యాన్ని ఉంచిన స్థానానికి వెళ్ళాలంటే, రెండవ ఆటగాడి నాణ్యం (0,0) కు వెళ్ళుతుంది. గురి మీరుకుండా చలనం అసాధ్యమైతే ఆటగాడు తన వంతు కోల్పోతాడు చాలా మంది స్నేహితులలో ఆడడానికి సాధ్యమయ్యే విధంగా మీరు ఈ ఆటను విస్తరించవచ్చు.

**గమనిక :** కార్టీజియన్ సమతలం పై బిందువులను స్థాపించడాన్ని మీరు వెనుకటి తరగతులలో కాలం, దూరం నక్ష భుజాల చుట్టుకొలత నక్ష మొదలైన వేర్వేరు సన్నివేశాలలో గ్రాఫ్ నిర్మించడాన్ని కొంచెం పోల్చవచ్చు. ఇలాంటి సన్నివేశాలలో $x$ మరియు $y$ అక్షాలకు బదులుగా $t$ – అక్షం, $d$ – అక్షం, $s$ – అక్షం, లేదా $p$ – అక్షం మొదలగు అక్షాలను పిలువవచ్చు.

### అభ్యాసం 9.3

1. (–2, 4), (3, –1), (–1, 0), (1, 2) మరియు (–3, –5) ఈ బిందువులు ఏ పాదంలో లేదా ఏ అక్షంపై ఉన్నాయి? కార్టీజియన్ సమతలంపై వాటిని స్థాపించడం ద్వారా మీ జవాబును పోల్చండి.

2. అక్షాలపై తగిన ప్రమాణాల దూరాన్ని ఎన్నుకోవడం ద్వారా సమతలంపై క్రింది పట్టికలో ఇచ్చిన $(x, y)$ బిందువులను గుర్తించండి.

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 7 | – 1.25 | 3 | – 1 |

## 9.4. సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను నేర్చుకొన్నారు.

1. ఒక సమతలంలో ఒక వస్తువు లేదా బిందువు స్థానాన్ని గుర్తించడానికి రెండు లంబరేఖలు కావాలి. వాటిలో ఒకటి క్షితిజ – సమాంతరంగా మరొకటి క్షితిజ – లంబదిశలో ఉంటాయి.
2. సమతలాన్ని కార్టీజియన్ లేదా నిరూపకతలం అని పిలుస్తాము మరియు రేఖలను నిరూపక అక్షాలు అని అంటాం.
3. క్షితిజ – సమాంతర రేఖను $x$ – అక్షం అని, క్షితిజ – లంబరేఖను $y$ – అక్షం అని పిలుస్తాము.
4. నిరూపక అక్షాలు సమతలాన్ని నాలుగు పాదాలుగా విభజిస్తాము.

©KTBS Not to be republished

5. అక్షాల ఖండన బిందువును మూల బిందువు అని అంటాము.

6 $y$ – అక్షం నుండి ఒక బిందువుకుగల దూరాన్ని దాని $x$ – నిరూపకం లేదా ప్రథమ నిరూపకం అని పిలుస్తాము మరియు $x$ – అక్షం నుండి ఒక బిందువుకు గల దూరాన్ని దా $y$ – నిరూపకం లేదా ద్వితీయ నిరూపకం అని పిలుస్తాము.

7. ఒక బిందువు యొక్క ప్రథమ నిరూపకం $x$ మరియు ద్వితీయ నిరూపకం $y$ అయితే $(x, y)$ లు ఆ బిందువు యొక్క నిరూపకాలు.

8. $x$ – అక్షంలో గల ఒక బిందువు నిరూపకాలు $(x, 0)$ రూపంలో మరియు $y$ అక్షంపై బిందువు నిరూపకాలు $(0, y)$ రూపంలో ఉంటాయి.

9. మూలబిందువు యొక్క నిరూపకాలు $(0,0)$.

10. ఒక బిందువు నిరూపకాలు I పాదంలో $(+, +)$, II పాదంలో $(-, +)$, III వ పాదంలో $(-, -)$, IV వ పాదంలో $(+, -)$ రూపంలో ఉంటాయి. ఇక్కడ '+' ధన వాస్తవ సంఖ్యను '–' ఋణ వాస్తవ సంఖ్యను కూడా సూచిస్తాయి.

11. $x \neq y$ అయితే, $(x, y) \neq (y, x)$ మరియు $x = y$ అయితే, $(x, y) = (y, x)$.

©KTBS Not to be republished

**అధ్యాయం- 10**

# రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలు

**విశ్లేషణ విధానం యొక్క ముఖ్యమైన ఉపయోగమేమంటే గణిత సమస్యలను సమీకరణ రూపంలోకి మార్చి, ఆ సమీకరణాలను వీలైనంత సరళ పదాలలో చూపుట.**

– ఎడ్మండ్ హ్యాలి

©KTBS Not to be republished

## 10.1 పరిచయం

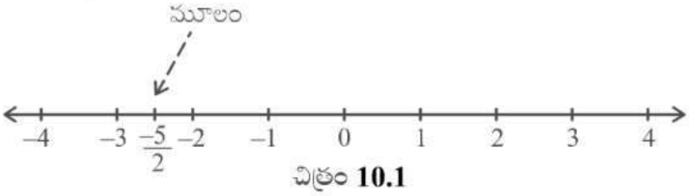
క్రిందటి తరగతులలో మీరు ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణాల గురించి నేర్చుకున్నారు. ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణమును రాయగలవా? నీవు ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణాలకు $x+1=0, x+\sqrt{2}=0$ మరియు $\sqrt{2}y+\sqrt{3}=0$ లను ఉదాహరణలుగా చెప్పవచ్చు. ఇటువంటి సమీకరణాలకు ఒకే ఒక జవాబు ఉంటుందని కూడా మీకు తెలుసు. ఆ జవాబును సంఖ్యారేఖ మీద ఏ విధంగా సూచించవచ్చు అనేది కూడ మీకు గుర్తు ఉండి ఉంటుంది. ఈ అధ్యాయంలో ఒక చలరాశిగల సరళసమీకరణాలను గుర్తుచేసుకొని, దానిని రెండు చలరాశులు గల సరళసమీకరణాలకు పెంచవచ్చు. మీకు ఈ ప్రశ్నలు తలెత్తవచ్చు రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణానికి సమాధానం ఉంటుందా? ఉంటే, అది ఒకే ఒక్కటా? ఆ సమాధానం కార్టీజియన్ సమతలం మీద ఎలా కనిపిస్తుంది? ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానాలు చెప్పాలంటే అధ్యాయం 3లో మీరు చదివిన కొన్ని పరికల్పనలను ఉపయోగించవచ్చు.

## 10.2 సరళ సమీకరణాలు :

మీరు ఇప్పటి వరకు ఏమి చదివారో ముందు గుర్తు చేసుకుందాం. క్రింది సమీకరణమును చూడండి.

$$2x + 5 = 0$$

దాని సమాధానము, అంటే సమీకరణం యొక్క మూలం $-\frac{5}{2}$ దీనిని సంఖ్యారేఖ మీద క్రింది విధంగా సూచించ వచ్చు.




చిత్రం **10.1**

ఏదైనా సమీకరణాన్ని సాధించేటపుడు, క్రింది అంశాలను మనసులో పెట్టుకోవాలి.

క్రింది చర్యల వలన సరళ సమీకరణం యొక్క సమాధానం మారదు.

(i) సమీకరణానికి రెండువైపుల ఒకే సంఖ్యను కూడినపుడు (లేదా దాని నుండి తీసివేసినప్పుడు)

(ii) సమీకరణాన్ని ఇరువైపుల సున్నకాని ఒకే సంఖ్యతో గుణించినపుడు లేదా భాగించినపుడు

క్రింది సందర్భమును చూద్దాం.

నాగపూర్‌లో ఇండియా, శ్రీలంకల మధ్య జరిగిన ఒకరోజు క్రికెట్ ఆటలో ఇద్దరు భారతీయ బాట్స్‌మెన్‌లు మొత్తం 176 పరుగులు చేశారు. ఈ సమాచారాన్ని సమీకరణ రూపంలో వ్యక్తపరచండి.

ఇక్కడ ఏ ఒక్క ఆటగాడి పరుగులు ఇవ్వలేదు కాబట్టి రెండు అవ్యక్త రాశులు ఉన్నాయి. అవి $x$ మరియు $y$ అనుకుందాం. ఒక ఆటగాడి పరుగులు $x$ మరియు మరొక ఆటగాడి పరుగులు $y$ అవుతాయి.

$x + y = 176$ అని మనకు తెలుసు

అదే మనకు కావలసిన సమీకరణం.

ఇది రెండు చలరాశులు గల సరళసమీకరణానికి ఉదాహరణ అవుతుంది.

ఇటువంటి సమీకరణాలలో $x$ మరియు $y$ లను చలరాశులుగా సూచించుట ఆనవాయితీ అయినది. వేరే అక్షరాలను కూడా ఉపయోగించవచ్చు. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలకు కొన్ని ఉదాహరణలు :

(1) $2s + 3t = 5$

(2) $p + 4q = 7$

(3) $\pi u + 5v = 9$ మరియు

(4) $3 = \sqrt{2}x - 7y$

©KTBS Not to be republished

ఈ సమీకరణాలను క్రమంగా

(1) $2s + 3t - 5 = 0$ (2) $p + 4q - 7 = 0$ (3) $\pi u + 5v - 9 = 0$ మరియు

(4) $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$ గా కూడ రాయవచ్చు.

$a$, $b$ మరియు $c$ లు వాస్తవ సంఖ్యలయి ఉండి, $a$ మరియు $b$ లు సున్న కానిచో $ax + by + c = 0$ రూపంలో ఉన్న ఏ సమీకరణమునైనా రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం అంటారు. ఇటువంటి సమీకరణాలను ఎన్నైనా రాయవచ్చు.

**ఉదాహరణ 1 :** క్రింది ప్రతి ఒక్క సమీకరణమును $ax + by + c = 0$ రూపంలో రాసి $a$, $b$ మరియు $c$ విలువలను గుర్తించండి.

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$

(iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$.

**సాధన :**(i) $2x + 3y = 4.37$ ని $2x + 3y - 4.37 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 2$, $b = 3$, $c = -4.37$

(ii) $x - 4 = \sqrt{3}y$ ని $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$, $c = -4$.

(iii) $4 = 5x - 3y$ సమీకరణమును $5x - 3y - 4 = 0$ గా రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 5$, $b = -3$, $c = -4$. ఈ సమీకరణమును $-5x + 3y + 4 = 0$ అని కూడి రాయవచ్చునని నీవు ఒప్పు కుంటావా? ఈ సందర్భంలో $a = -5$, $b = 3$, $c = 4$.

(iv) $2x = y$ సమీకరణమును $2x - y + 0 = 0$ అని రాయవచ్చు. ఇక్కడ $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$

$ax + b = 0$ రూపంలో ఉన్న సమీకరణాలు కూడా రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలకు ఉదాహరణలవుతాయి. ఎందుకనగా వాటిని $ax + 0.y + b = 0$ అని రాయవచ్చు.

ఉదాహరణకు $4 - 3x = 0$ ని $-3x + 0.y + 4 = 0$ గా రాయవచ్చు.

**ఉదాహరణ 2:** క్రింది ప్రతి ఒక్క సమీకరణమును రెండు చలరాశులు గల సమీకరణంగా రాయండి.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$

(iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

**సాధన** (i) $x = -5$ ని $1.x + 0.y = -5$ లేక $1.x + 0.y + 5 = 0$ గా రాయవచ్చు.

(ii) $y = 2$ ని $0.x + 1.y = 2$ లేక $0.x + 1.y - 2 = 0$ గా రాయవచ్చు.

(iii) $2x = 3$ ని $2x + 0.y - 3 = 0$ గా రాయవచ్చు.

(iv) $5y = 2$ ని $0.x + 5y - 2 = 0$ గా రాయవచ్చు.

©KTBS Not to be republished

### అభ్యాసం 10.1

1. ఒక నోటు పుస్తకము యొక్క వెల ఒక పెన్ను వెలకు రెండు రెట్లున్నది. ఈ వాక్యమును సూచించు రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణమును రాయండి.

   (నోటు పుస్తకం వెల ₹$x$ గాను, పెన్నువెల ₹$y$ గాను తీసుకోండి)

2. క్రింది సరళ సమీకరణాలను $ax + by + c = 0$ రూపంలో చూపి ప్రతి సందర్భంలో a, b మరియు c విలువలను గుర్తించండి.

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - y - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$

   (iv) $x = 3y$ (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$

   (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

## 10.3 సరళసమీకరణము యొక్క సాధన

ఒక చలరాశి గల ప్రతి సరళ సమీకరణానికి ఒకే ఒక సమాధానం ఉంటుందని మీరు చూశారు. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క జవాబు గురించి మీరేమి చేస్తారు. సమీకరణంలో రెండు చలరాశులు ఉన్నాయి. కాబట్టి జవాబు అంటే ఇచ్చిన సమీకరణమును తృప్తిపరచే రెండు విలువలు, ఒకటి $x$ విలువ, మరొకటి $y$ విలువ. $2x + 3y = 12$ సమీకరణమును తీసుకొందాం. ఇక్కడ $x = 3$, మరియు $y = 2$ అనేది ఒక జవాబు అవుతుంది. ఎందుకంటే మీరు $x = 3$, మరియు $y = 2$ విలువలను సమీకరణంలో సూక్ష్మీకరించినప్పుడు.

$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12$ అవుతుంది.

ఈ సమాధానమును ముందుగా $x$ విలువ, తర్వాత $y$ విలువలతో (3, 2) క్రమయుగ్మంగా రాస్తాం. ఇదేవిధంగా, పై సమీకరణానికి (0, 4) కూడా జవాబు అవుతుంది.

మరొక రకంగా చెప్పాలంటే (1,4) అనేది $2x + 3y = 12$ కి జవాబు కాదు. ఎందుకంటే $x = 1$, $y = 4$ విలువలు ఇచ్చినపుడు $2x + 3y = 14$ అవుతుంది కాని 12 కాదు. (0, 4) ఒక జవాబు అవుతుంది కాని (4, 0) కాదు.

$2x + 3y = 12$ సమీకరణానికి కనీసం రెండు జవాబులు మీరు చూశారు. అవి (3, 2) మరియు (0, 4). ఇంకేదైనా సమాధానమును కనుగొనగలరా? (6, 0) మరొక సమాధానమని మీరు ఒప్పుకుంటారా? దానిని పరిశీలించండి.

©KTBS Not to be republished

నిజానికి మనము క్రింది విధంగా చేస్తే, అనేక సమాధానాలు పొందవచ్చు. $2x + 3y = 12$ లో మీ ఇష్ట ప్రకారం $x$ కి ఒక విలువ తీసుకోండి. ($x = 2$ అనుకుందాం), అప్పుడు ఈ సమీకరణం ఒక చలరాశి గల సరళ సమీకరణం $4 + 3y = 12$ గా అవుతుంది. దీనిని సాధిస్తే $y = \frac{8}{3}$ అవుతుంది. కాబట్టి $2x + 3y = 12$ కి $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ మరొక జవాబు అవుతుంది. ఇదేవిధంగా $x = -5$ అనుకొనిన ఈ సమీకరణం $-10 + 3y = 12$ అవుతుంది. దానినుండి $y = \frac{22}{3}$ అని వస్తుంది. కాబట్టి $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ అనేది $2x + 3y = 12$ కి మరొక సమాధానం అవుతుంది. కాబట్టి రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క వివిధ జవాబులకు అంతం లేదు. అంటే రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణానికి అనంతమైన సమాధానాలు ఉంటాయి.

**ఉదాహరణ 3 :** $x + 2y = 6$ సమీకరణానికి నాలుగు విభిన్న సమాధానాలను కనుగొనండి.

**సాధన** : పరిశీలన ద్వారా $x = 2, y = 2$ ఒక సమాధానం అవుతుంది. ఎందుకంటే $x = 2, y = 2$ విలువలకు, $x + 2y = 2 + 4 = 6$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు $x = 0$ అనుకుందాం. $x$ కి ఈ విలువ ఇస్తే ఇచ్చిన సమీకరణం $2y = 6$ అవుతుంది. అప్పుడుదాని యొక్క ఒకే ఒక జవాబు $y = 3$ కాబట్టి $x = 0, y = 3$ కూడ $x + 2y = 6$ కి ఒక జవాబు అవుతుంది. ఇదే విధంగా $y = 0$ తీసుకుంటే సమీకరణం $x = 6$ అవుతుంది. కాబట్టి $x = 6, y = 0$ కూడా $x + 2y = 6$ కి సమాధానం అవుతుంది. చివరిగా $y = 1$ తీసుకుందాం. ఇచ్చిన సమీకరణం $x + 2 = 6$ అవుతుంది. దాని సమాధానం $x = 4$ కాబట్టి $(4, 1)$ కూడా ఇచ్చిన సమీకరణానికి ఒక సమాధానం అవుతుంది. కాబట్టి ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క అనంతమైన సమాధానాలలో నాలుగు ఏవనగా $(2, 2)$, $(0, 3)$, $(6, 0)$ మరియు $(4, 1)$.

**గమనిక :** సమీకరణం యొక్క సమాధానమును పొందడానికి సులభమైన మార్గమేమంటే $x = 0$ తీసుకొని $y$ విలువను కనుగొనుట. అదేవిధంగా, $y = 0$ తీసుకొని $x$ విలువను కనుగొనుట.

**ఉదాహరణ 4 :** క్రింది ప్రతి సమీకరణానికి రెండు సమాధానాలు కనుగొనండి.

(i) $4x + 3y = 12$ (ii) $2x + 5y = 0$ (iii) $3y + 4 = 0$

**సాధన :**

(i) $x = 0$ తీసుకొంటే, $3y = 12$ వస్తుంది అంటే $y = 4$. కాబట్టి $(0, 4)$. ఇచ్చిన సమీకరణానికి ఒక సమాధానం అవుతుంది. అదేవిధంగా, $y = 0$ తీసుకొంటే $x = 3$ అవుతుంది కాబట్టి $(3, 0)$ ఒక సమాధానం అవుతుంది.

©KTBS Not to be republished

(ii) $x = 0$ తీసుకుంటే, $5y = 0$ వస్తుంది. దాని నుండి $y = 0$ అవుతుంది కాబట్టి ఇచ్చిన సమీకరణానికి, (0, 0) ఒక సమాధానం అవుతుంది. ఇపుడు $y = 0$ తీసుకుంటే మరల (0, 0) సమాధానం వస్తుంది. మరల మొదటి సమాధానమే వచ్చింది. మరొక సమాధానం పొందటానికి $x = 1$ తీసుకుందాం. అపుడు $y$ విలువ $-\frac{2}{5}$ అని పరిశీలించవచ్చు. కాబట్టి $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ మరొక సమాధానం అవుతుంది.

(iii) $3y + 4 = 0$ సమీకరణమును $0 \,.\, x + 3y + 4 = 0$ గా రాస్తే $x$ యొక్క అన్ని విలువలకు $y = -\frac{4}{3}$ వస్తుంది. కాబట్టి $\left(0, -\frac{4}{3}\right), \left(1, -\frac{4}{3}\right)$ రెండు సమాధానాలు గా చెప్పవచ్చు.

## అభ్యాసం 10.2

1. క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది? ఎందుకు?

   $y = 3x + 5$ సమీకరణానికి

   (i) ఒకే ఒక సమాధానం ఉన్నది (ii) రెండు సమాధానాలు మాత్రమే ఉన్నాయి.

   (iii) అనంతమైన సమాధానాలు ఉన్నాయి.

2. క్రింది ప్రతి సమీకరణానికి నాలుగు సమాధానాలు రాయండి..

   (i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. క్రింది ఇవ్వబడిన వాటిలో $x - 2y = 4$ సమీకరణానికి ఏవి సమాధానాలు అవుతాయి? ఏవి కావు? పరిశీలించండి.

   (i) (0, 2) (ii) (2, 0) (iii) (4, 0) (iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ (v) (1, 1)

4. $2x + 3y = k$ సమీకరణానికి $x = 2, y = 1$ సమాధానమైతే $k$ విలువ కనుగొనండి.

## 10.4 రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖాపటం (గ్రాఫు)

ఇంతవరకు మీరు రెండు చలరాశులు గల సమీకరణం యొక్క సమాధానాలను బీజీయంగా సాధించారు. అటువంటి సమీకరణానికి అనంతమైన సమాధానాలున్నాయని మీకు తెలుసు. వాటిని మనము నిరూపక తలం మీద ఎలా చూపగలం? సమాధానమును రెండు విలువలు గల జతలుగా రాసినట్లు మీరు గుర్తించి ఉంటారు.

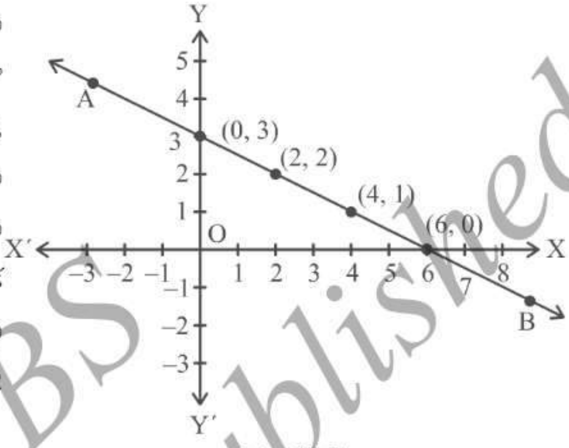
ఉదాహరణ 3 లోని $x + 2y = 6$ సరళ సమీకరణం సమాధానాలను క్రింద చూపబడిన విధంగా ముందుగా $x$ విలువలు, వాటికింద అనురూప $y$ విలువలను పట్టికలో రాయవచ్చు.

©KTBS Not to be republished

పట్టిక 1

| $x$ | 0 | 2 | 4 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 2 | 1 | 0 | ... |

క్రిందటి అధ్యాయంలో మీరు బిందువులను గ్రాఫు కాగితం మీద ఎలా గుర్తించాలో నేర్చుకున్నారు. (0, 3), (2, 2), (4, 1) మరియు (6, 0) బిందువులను గ్రాఫుకాగితం మీద గుర్తించుదాం. ఇపుడు ఏవైనా రెండు బిందువులను కలిపి ఒక సరళ రేఖను గీయండి. దీనిని సరళ రేఖ AB అని అనుకుందాం. (చిత్రం 10.2 చూడండి.)



చిత్రం 10.2

మిగిలిన రెండు బిందువులు కూడా AB సరళ రేఖ మీద ఉన్నాయని గమనించావా? ఇపుడు ఈ రేఖమీదమరొక బిందువు (8,–1) ని తీసుకోండి. ఇది సరళ రేఖకు జవాబు అవుతుందా ? నిజానికి $8 + 2\,(-1) = 6$.

కాబట్టి (8, –1) ఒక జవాబు అవుతుంది AB రేఖ మీద ఏదైనా మరొక బిందువును తీసుకొని దాని నిరూపకాలు సమీకరణమును తృప్తిపరుస్తాయో లేదో పరీక్షించండి. ఇప్పుడు, AB మీద లేని ఏదైనా బిందువును తీసుకోండి. అది (2, 0) అనుకోండి. దాని నిరూపకాలు సమీకరణమును తృప్తి పరుస్తాయా? పరిశీలిస్తే కాదని తెలుస్తుంది. మన పరిశీలనలను పట్టీచేద్దాం.

(1) ఏ బిందువు యొక్క నిరూపకాలు సమీకరణం (1) ని తృప్తిపరుస్తాయో, ఆ బిందువు AB రేఖ మీద ఉంటుంది.

(2) AB రేఖ మీద ప్రతి బిందువు $(a, b)$, సమీకరణం (1) కి $x = a,\ y = b$ సమాధానాన్నిస్తుంది.

(3) AB రేఖ మీద లేని ఏదైనా బిందువు, సమీకరణం (1) కి సమాధానం కాదు.

దీనిని బట్టి మనము ఒక నిర్ధారణకు రావచ్చు. సరళరేఖ మీది ప్రతి బిందువు సమీకరణమును తృప్తిపరుస్తుంది, మరియు సమీకరణము యొక్క ప్రతి సమాధానము, సరళ రేఖ మీద ఒక

©KTBS Not to be republished

బిందువవుతుంది. నిజానికి, రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం జ్యామితీయంగా ఒక సరళ రేఖను సూచిస్తుంది. ఈ సరళ రేఖ మీద బిందువులు, సమీకరణం యొక్క సమాధానాల గుంపు అవుతుంది. దీనినే సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖాపటం అంటారు. కాబట్టి రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖా చిత్రం గీయాలంటే ఆ సరళ రేఖ యొక్క రెండు సమాధానాలకు చెందిన రెండు బిందువులను గుర్తించి, వాటిని ఒక సరళ రేఖ ద్వారా కలిపితే సరిపోతుంది. ఏది ఏమైనా ఇటువంటి బిందువులను రెండు కంటే ఎక్కువ గుర్తించినట్లయితే, రేఖా చిత్రము సరిగ్గా ఉన్నదా, లేదా అని వెంటనే తెలుసుకొనుటకు వీలవుతుంది.

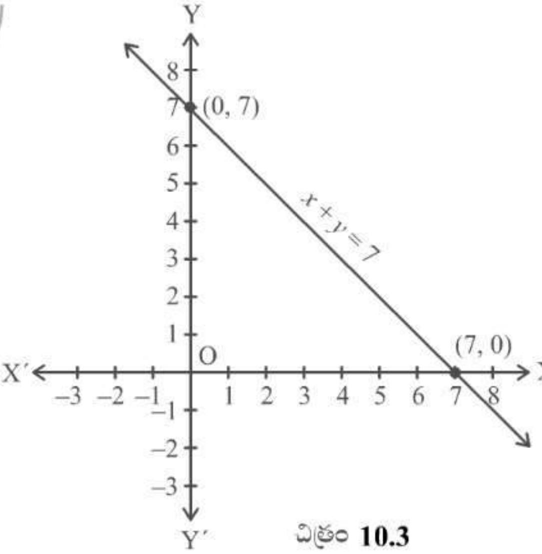
**గమనిక :** డిగ్రీ ఒకటి గల బహుపది సమీకరణం $ax + by + c = 0$ ని సరళ సమీకరణం అనటానికి కారణం, దాని యొక్క రేఖాచిత్రం సరళ రేఖ కావడమే.

**ఉదాహరణ 5 :** (1, 2) అను బిందువు కలిగిన సరళ రేఖ సమీకరణమును కనుగొనండి. అటువంటి సమీకరణాలు ఎన్ని ఉన్నాయి?

**సాధన :** ఇక్కడ మనకు కావలసిన సరళ సమీకరణం యొక్క సమాధానం (1, 2). కాబట్టి నీకు (1, 2) బిందువు గుండా పోయే సరళ రేఖ కావాలి. అటువంటి సరళ సమీకరణానికి ఒక ఉదాహరణ $x + y = 3$. మరికొన్ని ఉదాహరణలు $y - x = 1$, $y = 2x$. ఎందుకంటే ఇవి కూడా (1, 2) బిందువు నిరూపకాలతో తృప్తి చెందుతాయి. నిజానికి (1, 2) బింధువు నిరూపకాలు తృప్తి పరచే సరళ సమీకరణాలు అనంతం ఉన్నాయి. దీనిని చిత్ర రూపంలో చూడగలవా?

**ఉదాహరణ 6 :** $x + y = 7$ సమీకరణం యొక్క రేఖాపటం గీయండి.

**సాధన :** రేఖాచిత్రం గీయాలంటే మనకు కనీసం సమీకరణం యొక్క రెండు సమాధానాలు కావాలి $x = 0$, $y = 7$ మరియు $x = 7$, $y = 0$ లు ఇచ్చిన సమీకరణానికి రెండు సమాధానాలను పరీక్షించవచ్చు. కాబట్టి రేఖాచిత్రం గీయటానికి మీరు క్రింది పట్టికను ఉపయోగించవచ్చు.



చిత్రం **10.3**

Not to be republished ©KTBS

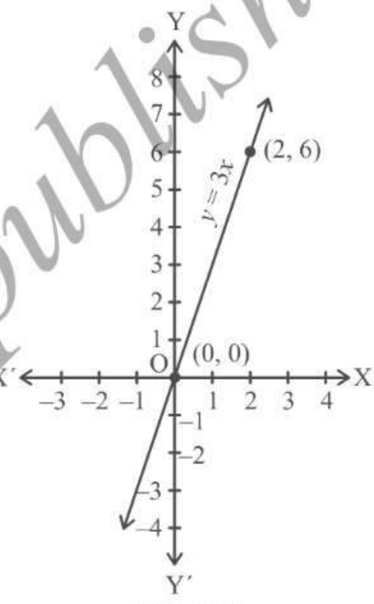
పట్టిక 2

| $x$ | 0 | 7 |
|---|---|---|
| $y$ | 7 | 0 |

పట్టిక 2 నుండి బిందువులను గ్రాఫుకాగితం మీద గుర్తించి, వాటిని సరళరేఖతో కలిపి రేఖాచిత్రం గీయండి. (చిత్రం 10.3 చూడండి).

**ఉదాహరణ 7 :** ఒక వస్తువు మీద ఉపయోగించిన బలం ఆ వస్తువులో ఏర్పడిన త్వరణానికి అనులోమాను పాతంలో ఉంటుందని మీకు తెలుసు. ఈ సందర్భానికి తగ్గ సమీకరణం రాసి, దానిని సూచించు రేఖాచిత్రం గీయండి.

**సాధన :** ఇక్కడ ఉన్న చలరాశులు బలం మరియు త్వరణం. ఉపయోగించిన బలం $y$ ప్రమాణాలు, ఏర్పడిన త్వరణం $x$ ప్రమాణాలు అనుకుందాం. నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం నుండి దీనిని $y = kx$, $k$ స్థిరాంకం గా చూపవచ్చు. (విజ్ఞానం లో $k$ అనేది వస్తువు ద్రవ్యరాశి అని మీకు తెలుసు).




చిత్రం **10.4**

ఇపుడు మనకి $k$ విలువ ఎంతో తెలియదు కాబట్టి $y = kx$ యొక్క ఖచ్చితమైన రేఖా చిత్రమును గీయలేము $k$కి ఒక విలువ ఇస్తే, మనము రేఖాచిత్రం గీయవచ్చు. $k = 3$ అనుకుందాం $y = 3x$ ని సూచించు రేఖాచిత్రం గీద్దాము. దానికోసం రెండు సమాధానాలు కనుగొందాం. అవి (0, 0) మరియు (2, 6) అనుకోండి. (చిత్రం 10.4 చూడండి).

రేఖాచిత్రం నుండి ఉపయోగించిన బలం 3 ప్రమాణాలు అయితే ఏర్పడిన త్వరణం 1 ప్రమాణం అని తెలుస్తుంది. అంతేకాక (0, 0) బిందువు రేఖాచిత్రం మీద ఉంది. అంటే ఉపయోగించిన బలం '0' ప్రమాణాలు అయితే, ఏర్పడిన త్వరణం '0' ప్రమాణాలు అవుతుంది.

**గమనిక :** $y = kx$ రూపంలో ఉన్న సమీకరణం రేఖాచిత్రం ఎల్లప్పుడూ మూలబిందువు గుండా పోవు సరళరేఖ అవుతుంది.

©KTBS Not to be republished

**ఉదాహరణ 8 :** చిత్రం 10.5లో ఇవ్వబడిన ప్రతిరేఖా చిత్రానికి, క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రత్యామ్నాయాలలో సరియైన సమీకరణాన్ని ఎన్నుకోండి.

(a) చిత్రం 10. 5 (i) కి.

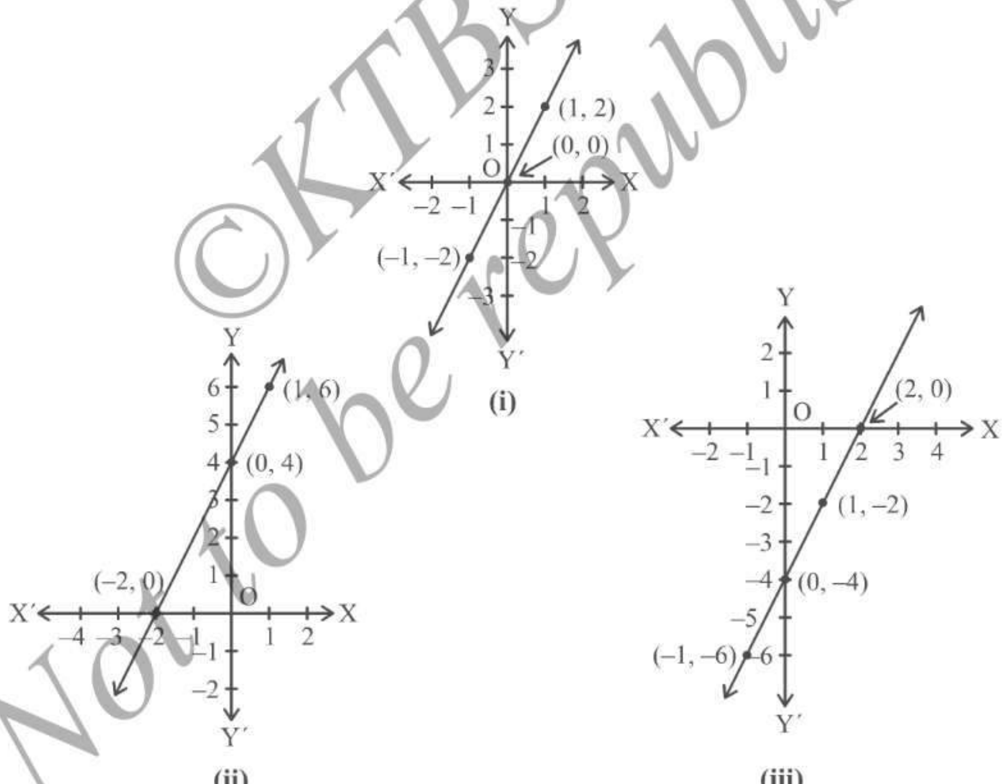
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) చిత్రం 10. 5 (ii) కి,

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

(c) చిత్రం 10. 5 (iii) కి

(i) $x + y - 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$




చిత్రం **10.5**

**సాధన :** (a) చిత్ర 10. 5 (i) లో సరళరేఖ మీద బిందువులు (–1, –2), (0, 0), (1, 2). పరిశీలన ద్వారా ఈ గ్రాఫుకి చెందిన సమీకరణం $y = 2x$ అవుతుంది. ప్రతి సందర్భంలోను $y$ – నిరూపకం, $x$ – నిరూపకానికి రెట్టింపు ఉందని నీవు గమనించ గలవు.

©KTBS Not to be republished

(b) చిత్రం 10.5 (ii) లో సరళరేఖ మీది బిందువులు (–2, 0), (0, 4), (1, 6). ఈ బిందువుల నిరూపకాలు $y = 2x + 4$ సమీకరణాన్ని తృప్తి పరుస్తాయని మీకు తెలుసు. కాబట్టి చిత్రం 10.5 (ii) లోని రేఖాచిత్రానికి చెందిన సమీకరణం $y = 2x + 4$ అవుతుంది.

(c) చిత్రం 10.5 (iii) లో సరళరేఖ మీది బిందువులు (–1, –6), (0, –4), (1, –2), (2, 0). పరిశీలన ద్వారా ఈ రేఖాచిత్రానికి చెందిన సమీకరణం $y = 2x – 4$ అవుతుంది.

### అభ్యాసం 10. 3

1. క్రింద ఇవ్వబడిన రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణాలలో ప్రతి దానికి రేఖాచిత్రం గీయండి.

   (i) $x + y = 4$ (ii) $x – y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

2 (2, 14) బిందువు గుండాపోవు రెండు సరళరేఖలకు సమీకరణాలు రాయండి అటువంటి సరళరేఖలు ఎన్ని ఉంటాయి? ఎందుకు?

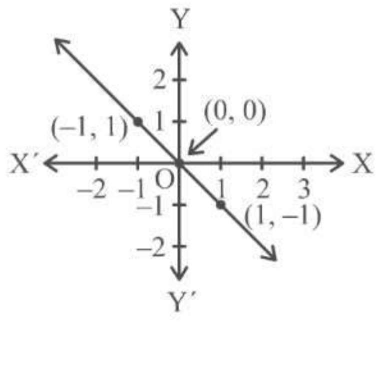
3. (3, 4) బిందువు $3y = ax + 7$ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం మీద ఉంటే $a$ విలువ కనుగొనండి.

4. ఒక నగరంలో ట్యాక్సీ ఖర్చు క్రింది విధంగా ఉంటుంది : మొదటి కిలోమీటరుకి ఖర్చు ₹ 8 మరియు తర్వాత ప్రతి కిలోమీటరు దూరానికి ₹ 5. ఉంటుంది. ప్రయాణం చేసిన మొత్తం దూరం $x$ కి.మీ మరియు మొత్తం ఖర్చు ₹ $y$ అనుకొని, ఈ సమాచారానికి తగు సరళ సమీకరణం రాసి, దాని రేఖా చిత్రం గీయండి.

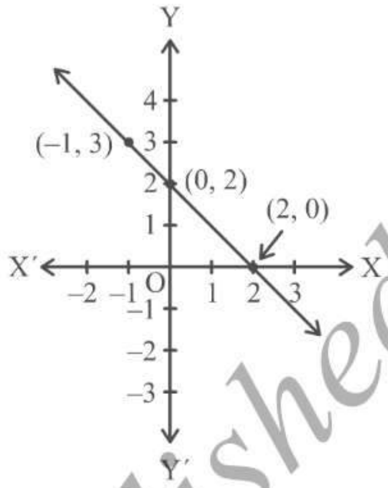
5. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రత్యామ్నాయాలలో, చిత్రం 10.6 మరియు చిత్రం 10.7 ల లోని రేఖాచిత్రాలను సూచించు సరళ సమీకరణాలను ఎన్నుకొని రాయండి.

| **చిత్రం 10.6 కి** | **చిత్రం 10.7 కి** |
|---|---|
| (i) $y = x$ | (i) $y = x + 2$ |
| (ii) $x + y = 0$ | (ii) $y = x – 2$ |
| (iii) $y = 2x$ | (iii) $y = – x + 2$ |
| (iv) $2 + 3y = 7x$ | (iv) $x + 2y = 6$ |

©KTBS Not to be republished




చిత్రం **10.6**




చిత్రం **10.7**

6. ఒక స్థిరమైన బలం ఒక వస్తువు మీద పని చేసినపుడు జరిగినపని ఆ వస్తువు ప్రయాణించిన దూరానికి అనులోమానుపాతంలో ఉంటే, దానిని రెండు చలరాశులు గల సమీకరణ రూపంలో చూపి, ఆ స్థిర బలమును 5 ప్రమాణాలుగా తీసుకొని, సమీకరణానికి రేఖా చిత్రం గీయండి. దాని నుండి, వస్తువు ప్రయాణించిన దూరం

   (i) 2 ప్రమాణాలు (ii) 0 ప్రమాణాలు అయిన జరిగిన పనిని తెల్పండి.

7. భూకంప బాధితులకు సహాయం చేయటానికి ప్రధాన మంత్రి సహాయనిధికి, ఒక పాఠశాలలోని IX వ తరగతి విద్యార్థినులైన యామిని మరియు ఫాతిమా ఇద్దరూ కలసి ₹100 చందా ఇచ్చారు. ఈ సమాచారమును తృప్తిపరచే ఒక సరళ సమీకరణం రాయండి. (వారి చందాలను ₹$x$ మరియు ₹$y$ గా తీసుకోవచ్చు). దానియొక్క రేఖాచిత్రం గీయండి.

8. అమెరికా మరియు కెనడా వంటి దేశాలలో ఉష్ణోగ్రతను ఫారెన్‌హీట్‌లో కొలుస్తారు. భారత దేశం వంటి దేశాలలో సెల్సియస్‌లో కొలుస్తారు. ఫారెన్‌హీట్‌ను సెల్సియస్‌కి మార్చే సరళ సమీకరణం క్రింద ఇవ్వబడినది.

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

   (i) సెల్సియస్‌ని $x$ – అక్షం మీద, ఫారెన్‌హీట్ ని $y$ — అక్షం మీద తీసుకొని పైన ఇవ్వబడిన సరళ సమీకరణానికి రేఖాచిత్రం గీయండి.

   (ii) 30°C ఉష్ణోగ్రత ఉంటే, ఫారెన్‌హీట్‌లో ఎంత ఉష్ణోగ్రత ఉంటుంది?

©KTBS Not to be republished

(iii) 95°F ఉష్ణోగ్రత ఉంటే సెల్సియస్‌లో ఎంత ఉష్ణోగ్రత ఉంటుంది?

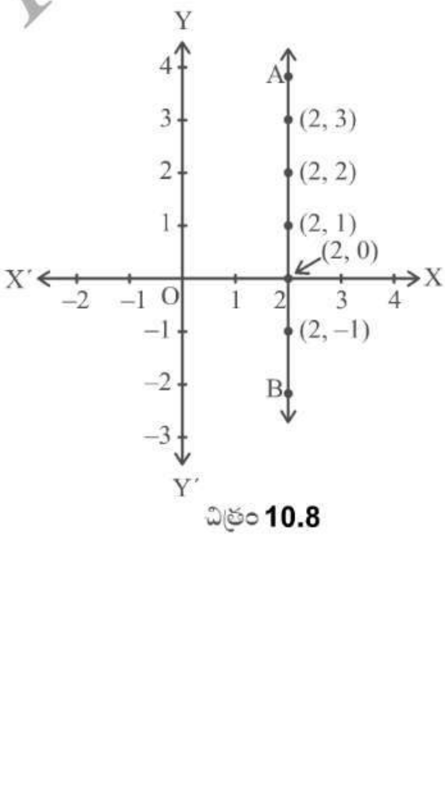
(iv) ఉష్ణోగ్రత 0°C అయితే, ఉష్ణోగ్రత ఫారెన్‌హీట్‌లో ఎంత ఉంటుంది? ఉష్ణోగ్రత 0°F అయితే అది సెల్సియస్‌లో ఎంత ఉంటుంది?

(v) ఫారెన్‌హీట్ మరియు సెల్సియస్ రెండిటిలో సమాన సంఖ్యను కలిగిన ఉష్ణోగ్రత ఉందా? ఉంటే దానిని కనుగొనండి.

## 10.5 $x$ – అక్షం మరియు $y$ – అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళ రేఖల సమీకరణాలు

కార్టీసియన్ సమతలంలో ఉన్న ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకాలను ఏ విధంగా రాయాలో మీరు నేర్చుకొన్నారు. (2, 0), (– 3, 0), (4, 0) మరియు $n$ ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు ($n$, 0) వంటి బిందువులు కార్టీసియన్ తలంలో ఎక్కడ ఉంటాయో మీకు తెలుసా? అన్నీ అన్ని $x$ – అక్షం మీద ఉంటాయి. ఎందుకో తెలుసా? ఎందుకంటే $x$ – అక్షం మీద ప్రతి బిందువు యొక్క $y$ – నిరూపకం '0' అవుతుంది. నిజానికి $x$ – అక్షం మీద ప్రతి బిందువు ($x$, 0) రూపంలో ఉంటుంది. ఇపుడు నీవు $x$ – అక్షానికి సమీకరణమును ఊహించగలవా? $x$ – అక్షానికి సమీకరణం $y = 0$. $y = 0$ ని $0.x + 1.y = 0$ గా చూపవచ్చునని గమనించండి. ఇదే విధంగా $y$ – అక్షానికి సమీకరణం $x = 0$ అవుతుందని పరిశీలించండి.

ఇపుడు, $x - 2 = 0$ సమీకరణమును తీసుకోండి. దీనిని ఒక చలరాశి $x$ మాత్రమే గల సమీకరణంగా తీసుకుంటే, అపుడు దానికి సంఖ్యారేఖ మీద బిందువైన $x = 2$ ఒకే ఒక సమాధానం అవుతుంది. ఏది ఏమైనా దానిని రెండు చలరాశులు గల సమీకరణంగా తీసుకుంటే, దానిని $x + 0.y - 2 = 0$ గా చూపవచ్చు. దీనికి అనంతమైన సమాధానాలు ఉన్నాయి. నిజానికి అవి అన్నీ $r$ ఏదైనా వాస్తవసంఖ్య అయినపుడు (2, $r$) రూపంలో ఉంటాయి. అంతేకాని (2, $r$) రూపంలో ఉన్న ప్రతి బిందువు ఈ సమీకరణానికి సమాధానమవుతుందని గమనించండి. రెండు చలరాశులు గల సమీకరణంగా $x - 2 = 0$ ని చిత్రం 10.8 లో AB సరళ రేఖగా సూచించవచ్చు.



చిత్రం **10.8**

©KTBS Not to be republished

**ఉదాహరణ 9 :** $2x + 1 = x - 3$ సమీకరణమును సాధించి సమాధానము (లు)ను (i) సంఖ్యారేఖ మీద (ii) కార్టీషియన్ తలం మీద గుర్తించండి.

**సాధన :** $2x + 1 = x - 3$ సాధించగా

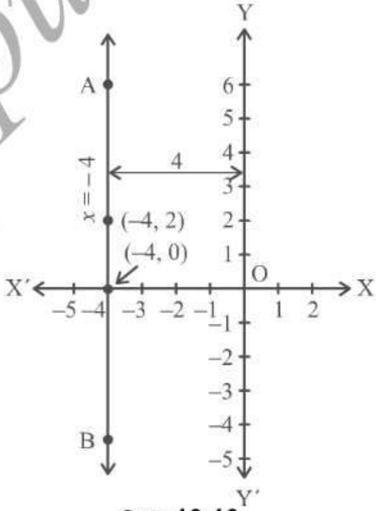
$$2x - x = -3 - 1$$

ie $x = -4$

(i) చిత్రం 10.9 లో సంఖ్యారేఖ మీద సమాధానం సూచించబడినది. ఇక్కడ $x = -4$ అనేది ఒక చలరాశి గల సమీకరణంగా తీసుకొనబడినది.

చిత్రం **10.9**

(ii) $x = -4$ ని $x + 0.y = -4$ గా కూడా రాయవచ్చునని మనకు తెలుసు. ఇది $x$ మరియు $y$ చలరాశులలో సమీకరణం దీనిని ఒక సరళ రేఖతో సూచించవచ్చు. ఇపుడు $0.y$ విలువ 0 కాబట్టి $y$ అన్ని విలువలకు అవకాశముంది. ఏది ఏమైనా $x = -4$ సమీకరణమును $x$ తృప్తిపరచాలి. కాబట్టి ఇచ్చిన సమీకరణం యొక్క రెండు సమాధానాలు $x = -4, y = 0$ మరియు $x = -4, y = 2$ అవుతాయి. AB రేఖా చిత్రం $y$ అక్షానికి సమాంతరంగా ఉంది మరియు దానికి ఎడమవైపు 4 ప్రమాణాల దూరంలో ఉంది. (చిత్రం 10.10 చూడండి)




చిత్రం **10.10**

ఇదేవిధంగా $y = 3$ లేక $0 . x + 1. y = 3$ రకం సమీకరణాలకు సంబంధించి $x$ – అక్షానికి సమాంతరంగా ఒక సరళ రేఖను పొందవచ్చు.

©KTBS Not to be republished

## అభ్యాసం 10.4

1. $y = 3$ ని

   (i) ఒక చలరాశి

   (ii) రెండు చలరాశులు గల సమీకరణాలుగా తీసుకొని జ్యామితీయంగా గుర్తించండి.

2. $2x + 9 = 0$ ని

   (i) ఒక చలరాశి

   (ii) రెండు చలరాశులు గల సమీకరణాలుగా తీసుకొని జ్యామితీయంగా గుర్తించండి.

## 10.6 సారాంశం

ఈ అధ్యాయంలో మీరు క్రింది అంశాలను అధ్యయనం చేశారు.

1. $a$, $b$ మరియు $c$ లు వాస్తవ సంఖ్యలయి ఉండి, $a$ మరియు $b$ రెండు కూడా సున్న కానప్పుడు, $ax + by + c = 0$ రూపంలో ఉండే సమీకరణమును రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం అంటారు.

2. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణానికి అనంతమైన సమాధానాలు ఉంటాయి.

3. రెండు చలరాశులు గల ప్రతి సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖా చిత్రం ఒక సరళ రేఖ అవుతుంది.

4. $y$– అక్షానికి సమీకరణం $x = 0$ మరియు $x$– అక్షానికి సమీకరణం $y = 0$.

5. $x = a$ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం $y$ – అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళ రేఖ అవుతుంది.

6. $y = a$ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం $x$ – అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళ రేఖ అవుతుంది.

7. $y = mx$ రూపంలో ఉండే సమీకరణం, ఆది బిందువు గుండా పోవు సరళ రేఖను సూచిస్తుంది.

8. రెండు చలరాశులు గల సరళ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం మీద ప్రతి బిందువు, ఆ సరళ సమీకరణానికి సమాధానం అవుతుంది. అంతేకాక సరళ సమీకరణం యొక్క ప్రతి సమాధానము, ఆ సమీకరణం యొక్క రేఖాచిత్రం మీద బిందువు అవుతుంది.

©KTBS Not to be republished

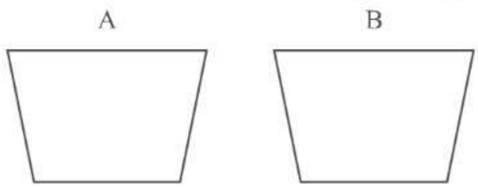
అధ్యాయం – 11

# సమాంతర చతుర్భుజాలు మరియు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు

## 11.1 పరిచయం :

పొలాల పరిమితులను విభజించి పంచుకోవాలంటే కొలవడానికి రేఖాగణిత అధ్యయనం ప్రారంభమైనదని 5వ అధ్యాయంలో నేర్చుకున్నారు. **ఉదా :** బుధియా అనేరైతు ఒక మహిళ వద్దవున్న త్రిభుజాకార పొలమును తన ఇద్దరు ఆడపిల్లలకు మరియు ఒక మగపిల్లవాడికి సమానంగా పంచడానికి నిర్ణయించుకున్నారు. దాని ఖచ్చితమైన వైశాల్యం లెక్కించకుండా ఆమె ఆ త్రిభుజాకార పొలాన్ని ఒకవైపు మూడుసమభాగాలుగా చేసినప్పుడు వచ్చే రెండు బిందువులను దాని ఎదుటి శీర్షానికి కలిపినది. ఈ విధంగా ఆమె పొలాన్ని మూడుభాగాలుగా విభజించిన ఒక్కో భాగాన్ని తన పిల్లలకు ఇచ్చిన మూడుభాగాలు నిజానికి సమానవైశాల్యాన్ని కలిగివున్నాయని మీరు భావిస్తున్నారా? ఈ విధమైన ప్రశ్నలు మరియు దీనికి సంబంధించిన ఇతర సమస్యలను సాధించడం మీరు కింది తరగతులలో నేర్చుకున్నారు. సమతలాకృతుల వైశాల్యాల గురించి గుర్తు తెచ్చుకోవాల్సివుంటుంది.

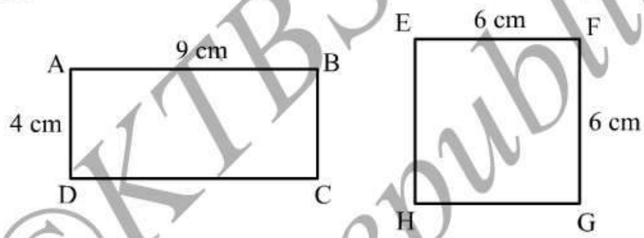
ఒక సరళ సంవృత పటంలో ఆక్రమించబడిన భాగాన్ని దాని సమతల ప్రదేశం అంటారని జ్ఞప్తికితెచ్చుకోండి. దీని కొలత లేదా పరిమాణాన్ని ఆ సమతల ప్రదేశము యొక్క వైశాల్యం అంటాం. ఈ పరిమాణం లేదా కొలతలను మనం సంఖ్యారూపంలో సూచిస్తాం (కొన్ని మూల ప్రమాణాలతో) **ఉదా :** $5cm^2$, $8m^2$, 3 ఎకరాలు మొదలైనవి. అందుచేత ఒక పటము యొక్క వైశాల్యము (ఏదో ఒక వైశాల్యప్రమాణం) అనేది ఒక సమతల సంవృత భాగంతో ముడిపడివుంటుంది.




చిత్రం 11.1

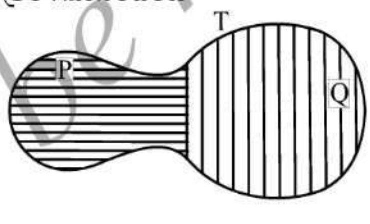
©KTBS
Not to be republished

అధ్యాయం 5 మరియు కింది తరగతులలో సర్వసమాన ఆకృతుల పరికల్పనలతో పరిచయం వుంది రెండు చిత్రాలు **ఒకే ఆకారం మరియు పరిమాణము వుంటే వాటిని సర్వసమాన పటాలు అంటాము.** (చిత్రం 11.1) మరొక రకంగా చెప్పాలంటే చిత్రం 11.1లో చూసిన ఆకృతి A మరియు B లు సర్వసమానమైతే ఒక ఉల్లి పొరకాగితం (ట్రేసింగ్ పేపరు) (tracing paper) సహాయంతో ఒక ఆకారం మరొక ఆకారంపై ఏకీభవించేటట్లు చిత్రీకరించవచ్చు అందువల్ల **A మరియు B ఆకృతులు సర్వసమానము. వాటి వైశాల్యం సమానమై తీరాలి. ఈ సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయం సరైనదికాదు. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే సమాన వైశాల్యంగలిగిన రెండు ఆకృతులు సర్వసమానం కానవసరం లేదు.** ఉదా : చిత్రం 11.2లో దీర్ఘ చతురస్రం ABCD మరియు చతురస్రం EFGH ఒకే వైశాల్యం ($9 \times 4cm^2$ మరియు $6 \times 6cm^2$) అయిననూ అవి రెండూ సర్వసమానం కాదు.




చిత్రం **11.2**

ఇప్పుడు ఇచ్చిన 11.3 చిత్రం గమనించండి




చిత్రం **11.3**

T ఆకృతి ఆక్రమించిన సమతలాకృతి భాగము ఆకృతి P మరియు Qలతో కూడుకొనివున్న సమతలాకృతులతో ఏర్పడినదని మీరు గమనించవచ్చు.

చిత్రం T వైశాల్యం = P చిత్రం వైశాల్యం + Q చిత్రం వైశాల్యం అవి పై చిత్రం ద్వారాసులభంగా గమనించవచ్చు.

ఆకృతి A వైశాల్యంను పై (A) ఆకృతి B వైశాల్యం పై (B) అని ఆకృతి  వైశాల్యంను పై (T) అని సూచించవచ్చు ఆకృతి వైశాల్యం. **ఒక సంఖ్య (ఏదైనా ప్రమాణాలు) ఇది ఆకృతిలో ప్రతిభాగానికి చెందుతుంది దీనినుండి కింది రెండుధర్మాలు చెప్పవచ్చు.**

©KTBS Not to be republished

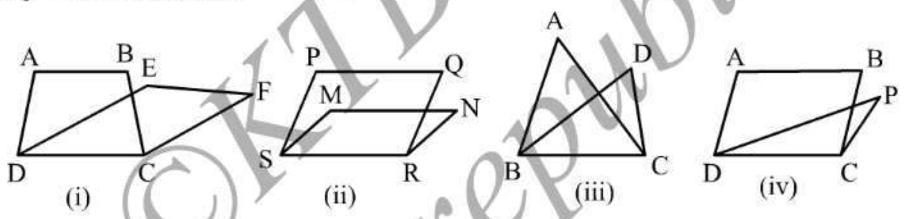
**1.** **A మరియు B లు సర్వసమాన వైశాల్యాలైతే వై (A) = వై(B) మరియు**

**2.** **T ఆకృతిలో సమతలాకృతి ప్రదేశం ఒకదానిపై మరొకటి వుండకుండా వుండేటట్లు P ఆకృతి మరియు Q ఆకృతికి సమానాకృతి ప్రదేశంతో కూడివున్నది. వై(T) = వై (P) + వై (Q)**

కింది తరగతులలో మీరు దీర్ఘచతురస్రం, చతురస్రం, సమాంతర చతుర్భుజం, త్రిభుజం మొదలైన ఆకృతుల వైశాల్యాలను కనుగొను సూత్రాలగురించి తెలుసుకొన్నారు. ప్రస్తుతం ఈ అధ్యాయంలో ఒకే భూమి ఒకే జత సమాంతర రేఖల మధ్యవుండే రెండు జామితీయ ఆకారాల వైశాల్యాల మధ్య సంబంధాన్ని. నేర్చుకోనడంలో ఈ సూత్రాలు జ్ఞానాన్ని పెంచే ప్రయత్నం చేద్దాం. ఈ అధ్యాయం త్రిభుజాల సర్వసమానత్వపు కొన్ని లక్షణాలను అర్థం చేసుకోవడానికి సహకరిస్తుంది.

## 11.2 : ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల ఆకృతులు

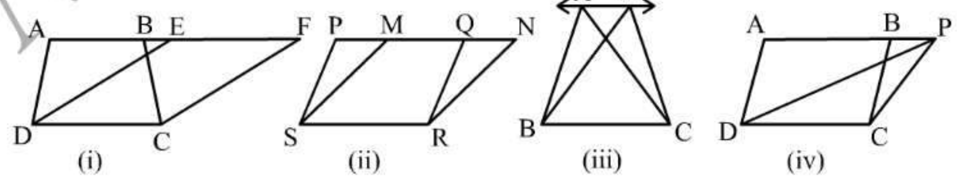
ఈ చిత్రాలను గమనించండి




చిత్రం 11.4

చిత్రం 11.4(i) లో ట్రెపీజియం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజం EFCD రెండింటికి ఉమ్మడి భుజం DC అందుచేత ట్రెపీజియం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజం EFCD అనేవి ఒకే భూమి DC పైవున్నవి ఇదేవిధంగా చిత్రం 11.4(ii) లో సమాంత చతుర్భుజము PQRS మరియు MNRS సమాంతర చతుర్భుజాలలో ఒకేపాదం SR పైవుంది అలాగే 11.4(iii) లో త్రిభుజం ABC మరియు DBC త్రిభుజాలు ఒకే భూమి BC పైకలదు. చిత్రం 11.4(iv) లో ABCD సమాంతర చతుర్భుజం PDC త్రిభుజము ఒకే భూమి DC పై వున్నాయి.

ఈ కింది చిత్రాలను పరిశీలించండి.




చిత్రం 11.5

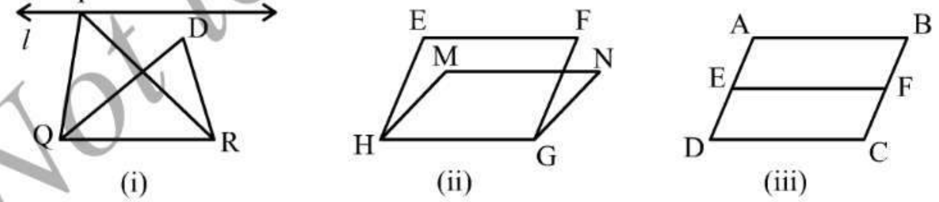
©KTBS Not to be republished

చిత్రం 11.5(i) లో ట్రెపీజియం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజం EFCD లు ఒకే భూమి DC పైవు వుండటమే కాక A మరియు B శీర్షాలు (ABCD ట్రెపీజియం) E మరియు F శీర్షాలు (EFCD సమాంతర చతుర్భుజం) DC భూమికి ఎదురుగావుండి AF రేఖ పైవుండి DC భూమికి సమాంతరంగా వున్నాయి.

ట్రెపీజియం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజం EFCD లు ఒకే భూమి DC పై వుండి ఒకే సమాంతర రేఖ AF మరియు DC ల మధ్య వుందని తెలుసుకున్నాము. అదేవిధంగా సమాంతర చతుర్భుజం PQRS మరియు MNRS లు ఒకే భూమి SR పై వుంది ఒకే సమాంతర రేఖ పైన PN మరియు SR ల మధ్యవుంది. చిత్రం 11.5 (ii) PQRS యొక్క P మరియు Q శీర్షాలు MNRS యొక్క M మరియు N శీర్షాలు భూమి SR కి సమాంతరంగావున్న PN రేఖపై వున్నాయి. అదేవిధంగా త్రిభుజం ABC మరియు DBC లు ఒకే భూమి BC పైవున్నవి. ఒక జత సమాంతర రేఖలైన AD మరియు BC ల మధ్యవుంది (చిత్రం 11.5(iii)) మరియు సమాంతర చతుర్భుజం ABCD మరియు త్రిభుజం PCD లు ఒకే భూమి DC పైవున్నాయి. సమాంతర రేఖలు AP మరియు DC ల మధ్యవుంది (చిత్రం 11.5(iv)).

**కావున రెండు చిత్రాలు ఒకే భూమి మరియు రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యవున్నాయి అని చెప్పాల్సి వస్తే, అవి ఒకే భూమి మీదవుండి, ఆ భూమికి ఎదురుంగావున్న శీర్షాలు భూమికి సమాంతరంగావున్న రేఖపైవుండాలి.**

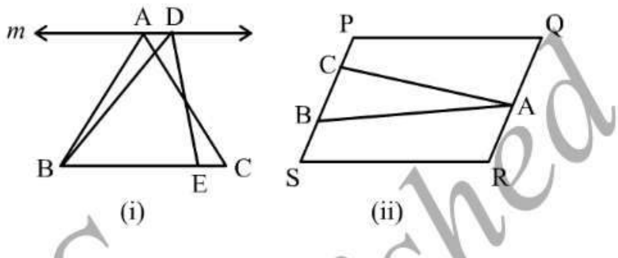
దీని ప్రకారం ΔPQR మరియు ΔDQR (చిత్రం 11.6(i)) లో ఒకే భూమి రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యవుంది అని చెప్పడం సాధ్యంకాదు.




చిత్రం 11.6

©KTBS Not to be republished

అలాగే చిత్రం 11.6(ii) లో సమాంతర చతుర్భుజం EFGH మరియు MNGH లో EF||GH రేఖల మధ్యవుందని తీసుకుంటే, చిత్రం 11.6(iii) లో సమాంతర చతుర్భుజం ABCD మరియు EFCD లు AB మరియు DC సమాంతర రేఖల మధ్యవుందని చెప్పడం సరికాదు. అవి ఒకే భూమి DC పైవుండి AD||BC రేఖల మధ్య వున్నాకూడా రెండు సమాంతర రేఖలలో ఒకటి ఉమ్మడి భూమిని కలిగివుండాలి. అనేదాన్ని స్పష్టంగా గమనించాలి. చిత్రం 11.7(i)లో త్రిభుజం ABC మరియు త్రిభుజం DBE లు ఒకే పాదంపై లేవు అని గమనించండి.



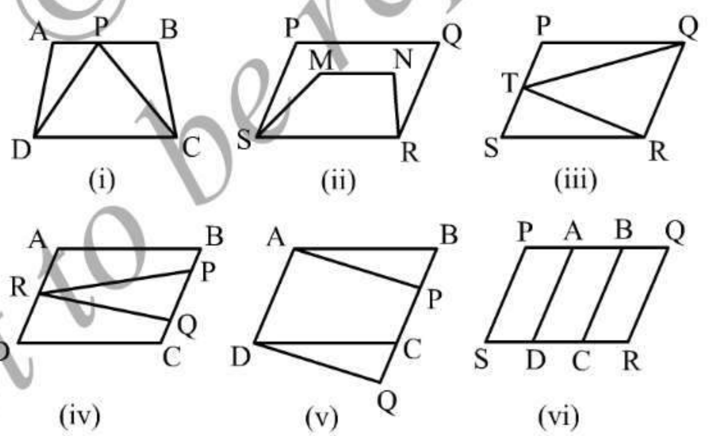

చిత్రం 11.7

అలాగే చిత్రం 11.7 (ii)లో ABC మరియు సమాంతర చతుర్భుజం PQRS లు ఒకే భూమిపైలేవు.

©KTBS Not to be republished

## అభ్యాసం 11.1

1. కింది చిత్రాలు ఏవి ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉన్నాయి. అటువంటి సందర్భం లో భూమి (ఉమ్మడిభుజం)ని, రెండు సమాంతర సరళ రేఖలను పర్కొనండి.

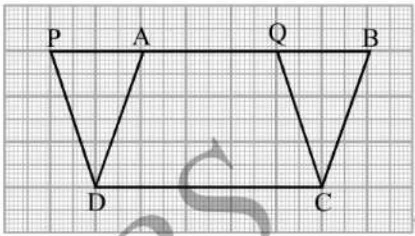



చిత్రం 11.8

## 11.3 ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల సమాంతర చతుర్భుజాలు

ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల మధ్యసంబంధం ఉందా? వుంటే దానిని తెలుసుకోవడానికి ముందుగా ఒక కృత్యంచేసి చూద్దాం?

**కృత్యం 1 :** ఒక గ్రాఫ్ కాగితంపై రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ABCD మరియు PQCD (చిత్రం లో 11.9)లో చూపినట్లు గీయాలి.



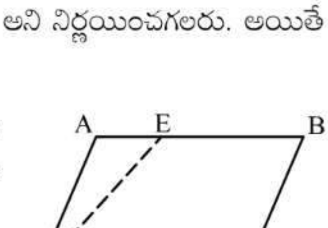

చిత్రం 11.9

ఈ రెండు చతుర్భుజాలు ఒకే భూమి DC పై మరియు ఒకే సమాంతర రేఖలు PB మరియు DC ల మధ్యవున్నాయి. ఏకమాన వైశాల్యంగల చదరాల సంఖ్యను లెక్కించి, సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాన్ని కనుగొను విధానం గుర్తు చేసుకోండి.

ఈ పద్ధతిలో ఏకమాన వైశాల్యంగల పూర్తిచదరాలను లెక్కించేటప్పుడు సగం కన్నా ఎక్కువ వున్న చదరాలను పూర్తిచదరంగా తీసుకొని లెక్కించాలి. అయితే సగంకన్నా తక్కువ భాగంవుండే చదరాలను వదిలివేయాలి. రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు 15cm² (సుమారు) అని మనకు తెలుస్తుంది. ఇంకా కొన్ని సమాంతర చతుర్భుజాలను గ్రాఫ్‌కాగితంపైగీసి ఈ కృత్యాన్ని చేయవచ్చు.[1]

మీరు ఏమిగమనిస్తారు? రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు పరస్పరం సమానమా? లేదా వేరువేరా? అవి ఖచ్చితంగా సమానము. కావున ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవున్న రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానం అని నిర్ణయించగలరు. అయితే ఇది సరిచూసే విధానం అని గుర్తుంచుకోండి.

**కృత్యం 2 :** ఒక అట్ట లేదా మందంగా వున్న పేపరుపై ABCD సమాంతర చతుర్భుజం గీయండి. (చిత్రం 11.10) చిత్రంలో చూపినట్లు DE అనే రేఖా ఖండాన్ని గీయండి.

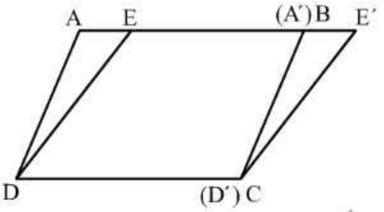



చిత్రం 11.10

1. ఈ కృత్యాన్ని జియోబోర్డు ఉపయోగించకుండా చేయవచ్చు

©KTBS Not to be republished

$\Delta ADE$కిసర్వసమానంగా$\Delta A^1D^1E^1$నుట్రేసింగ్‌పేపరు సహాయంతో ప్రత్యేకమైన పేపరుపై కత్తరించండి మరియు $A^1D^1$ BC పై ఏకీభవించేటట్లు చిత్రం 11.11 లో చూపినట్లు అనుర్చండి ABCD మరియు $EE^1CD$ సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే భూమి CD మరియు $AE^1$ మరియు DC సమాంతర రేఖలు మధ్య ఉన్నాయిని గమనించండి వీటివైశాల్యాల గురించి ఏమి చెప్పగలరు?




చిత్రం **11.11**

$$\Delta ADE \cong \Delta A^1D^1E^1$$

కావున వై (ADE) = వై ($A^1D^1E^1$) (వై = వైశాల్యాలు)

మరియు వై (ABCD) = వై (ADE) + వై (EBCD)

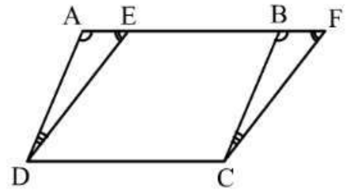
= వై ($A^1D^1E^1$) + వై (EBCD)

= వై ($EE^1CD$).

కావున రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు పరస్పరం సమానం.

ఇలాంటి రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల మధ్య సంబంధాన్ని సాధించడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

**సిద్ధాంతము 11.1: ఒకే భూమి మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గల రెండు సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానం**




చిత్రం **11.12**

**సాధన :** సమాంతర చతుర్భుజం ABCD మరియు సమాంతర చతుర్భుజం EFCD లు ఒకే భూమి DC పై ఒకే సమాంతర రేఖలు AF మరియు DC ల మధ్యవున్నాయి. (చిత్రం 11.12) ఇప్పుడు మనం వై (ABCD ) = వై (EFCD) అని నిరూపించాలి

$\Delta$ ADE మరియు $\Delta$ BCF లలో

$\angle DAE = \angle CBF$ (సదృశకోణాలు $AD \parallel BC$ మరియు AF తిర్యగ్ రేఖ) ............ (1)

$\angle AED = \angle BFC$ (సదృశకోణాలు $ED \parallel FC$ మరియు AF తిర్యగ్ రేఖ) ............ (2)

కావున, $\angle ADE = \angle BCF$ (త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం) ............ (3)

AD = BC. (ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఎదుటిభుజాలు) ............ (4)

©KTBS Not to be republished

$\therefore$ $\Delta ADE \cong \Delta BCF$(ASA సిద్ధాంతం ప్రకారం (1), (3), మరియు (4))

వై (ADE) = వై (BCF) (సర్వ సమాన ఆకృతుల వైశాల్యం సమానం) ............ (5)

వై (ABCD)= వై (ADE) + వై (EDCB)

= వై (BCF) + వై (EDCB)

= వై (EFCD)

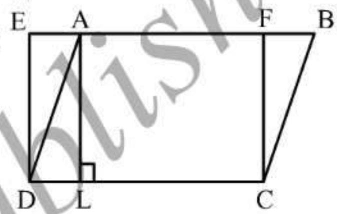
$\therefore$ ABCD మరియు EFCD సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానం

పై సిద్ధాంతం ఆధారంగా నిరూపించే కొన్ని ఉదాహరణలను పరిశీలిద్దాం.

**ఉదాహరణ 1 :** చిత్రం 11.13 లో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం EFCD ఒక దీర్ఘ చతురస్రం $AL \perp DC$

(i) వై (ABCD) = వై (EFCD)

(ii) వై (ABCD) = DC × AL అని చూపండి.



**చిత్రం 11.13**

**సాధన :** (i) దీర్ఘ చతురస్రం కూడా ఒక సమాంతర చతుర్భుజమే

కావున వై (ABCD) = వై (EFCD) (సిద్ధాంతం 11.1)

(ii) పై ఫలితంలో, వై (ABCD) = DC × FC (దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు) ............ (1)

$AL \perp DC$ కావున AFCL కూడా దీర్ఘ చతురస్రమే AL = FC ............ (2)

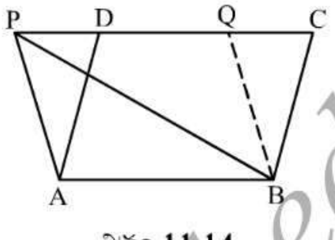
కావున, వై (ABCD) = DC × AL (1 మరియు 2 ల నుండి)

పై (ii) ఫలితం **సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం దాని భూమి మరియు దాని పైకి గీయబడి లంబాల పొడవుల లబ్ధానికి సమానము అని గమనించారా?** సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంకనుగొనే ఈ సూత్రం 7 వ తరగతిలో నేర్చుకున్నారని గుర్తుందా? ఈ సూత్రం ఆధారంగా సిద్ధాంతం 11.1ని ఎలా రాయగలరు. ఒకే భూమి లేదా సమాన భూములుకలిగిన మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవున్న సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యం పరస్పరం సమానం.

ఈ సిద్ధాంత విలోమము మీరు రాయగలరా? అది 'సమాన వైశాల్యాలు కలిగిన మరియు ఒకే భూమి లేదా సమాన భూమిగల రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవుంటాయి అనేది సరియైనదా? సమాంతర చతుర్భుజం వైశాల్యం సూత్రానికి విలోమాన్ని సాదిద్దాం.

©KTBS Not to be republished

**ఉదాహరణ 2:** ఒక త్రిభుజము మరియు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే భూమి పై మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవున్నచో త్రిభుజ వైశాల్యం సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంలో సగంవుంటుం దని సాధించండి.



చిత్రం 11.14

**సాధన :** Δ ABP ఒక త్రిభుజం మరియు ABCD ఒకే భూమి AB పై AB మరియు PC సమాంతర రేఖల మధ్య ఉన్నదనుకుందాం

వై (PAB) = $\frac{1}{2}$ వై (ABCD) అని నిరూపించాలి.

ABQP అనే సమాంతర చతుర్భుజాన్ని తీసుకోవడానికి BQ || AP అనిగీయాలి.

ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజం ABQP మరియు ABCD ఒకే భూమి AB పై వుండి AB మరియు PC సమాంతర రేఖల మధ్యవున్నాయి.

వై (ABQP) = వై (ABCD) (సిద్ధాంతం 11.1 ప్రకారం) ............... (1)

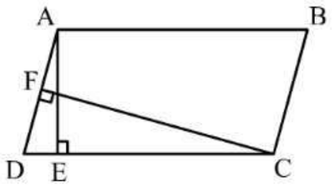
అయితే ΔPAB ≅ Δ BQP (PB కర్ణము ABQP సమాంతర చతుర్భుజాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది)

వై (PAB) = వై (BQP) ............... (2)

కావున వై (PAB) = $\frac{1}{2}$ వై (ABQP) (2)నుండి ............... (3)

వై (PAB) = $\frac{1}{2}$ (ABCD) (1 మరియు 3 నుండి)

## అభ్యాసం 11.2



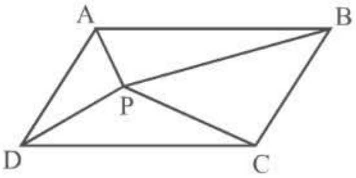
చిత్రం 11.15

1. చిత్రం 11.15లో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం AE ⊥ DC మరియు భుజము పైకి CF ⊥ AD గీయబడిన. AB = 16cmAE = 8cm, CF = 10cm అయిన AD కొలతను కనుగొనండి.

2. E,F,G మరియు H లు వరుసగా ABCD సమాంతర చతుర్భుజ భుజాల మధ్యబిందువులైన వై (EFGH) = $\frac{1}{2}$ వై (ABCD) అని చూపండి.

©KTBS Not to be republished

3. P మరియు Q లు వరుసగా ABCD సమాంతర చతుర్భుజపు DC మరియు AD భుజాలపై ఏవైనా రెండు బిందువులు. వై (APB) = వై (BQC) అని చూపండి.



చిత్రం 11.16

4. చిత్రం 11.16 లో ABCD సమాంతర చతుర్భుజం లోపల P అనేది ఒక బిందువు అయిన కిందివాటిని నిరూపించండి.

(i) వై (ABP) + వై (PCD) = $\frac{1}{2}$ వై (ABCD)

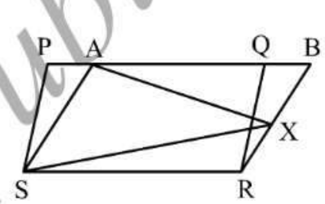
(ii) వై (APD) + వై (PBC) = వై (APB) + వై (PCD) అని సాధించండి.

(**సూచన :** AB కి సమాంతరంగా P నుండి ఒక కిరణాన్ని గీయండి.)

5. PQRS మరియు ABRS అనేవి రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు BR భుజముపై × అనేది ఒక బిందువు అయిన (చిత్రం 11.17).

(i) వై (PQRS) = వై (ABRS)

(ii) వై (AXS) = $\frac{1}{2}$ వై (PQRS).

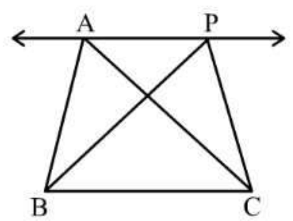


చిత్రం 11.17

6. ఒకరైతు మహిళ చిత్రం 11.18లో చూపిన సమాంతర చతుర్భుజం PQRS ఆకారంలో వుంది. RS భుజం పై మధ్య బిందువునుండి P మరియు Q బిందువులకు కలిపారు. పొలము ఎన్నిభాగాలుగా విభజించబడినది? ఏ ఏ భాగాలు ఏ ఆకారంలో ఉన్నాయి? ఆమె పొలంలో గోధుములు మరియు పప్పులు ప్రత్యేకంగా వేయాలంటే ఏ విధంగా వేయాలి కారణాలు ఇవ్వండి.

## 11.4 ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల త్రిభుజాలు

చిత్రం 11.18 గమనించిన త్రిభుజాలు ABC మరియు PBC లు ఒకే భూమి BC పైవుండి BC మరియు AP లు సమాంతర రేఖల మధ్య ఉన్నాయి. ఈ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలను గురించి మీరు ఏమి చెప్పగలరు? ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య అనేక జతల త్రిభుజాలు గీయవచ్చు. చిత్రంలో చూపినట్లు గ్రాఫ్ గీతంపై గీయండి. సమాంతర రేఖల



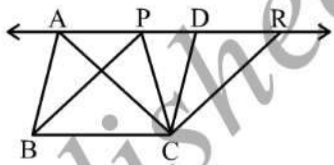
చిత్రం 11.18

©KTBS Not to be republished

మధ్యవుండేటట్లు ఒక గ్రాఫ్‌కాగితం కొన్ని త్రిభుజాలను గీసి, వాటితో వచ్చే చదరాలను లెక్కించి, వైశాల్యం కనుక్కోండి. కృత్యాన్ని చేయండి. ప్రతి ఒక్క సందర్భంలోను రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు పరస్పరం సమానం (సుమారు) అని మీరు గమనించండి. ఈ కృత్యాన్ని జియోబోర్డు ఉపయోగించి కూడా చేయవచ్చు. మళ్ళీ రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు పరస్పరం సమానంగావుండే దానిని (సుమారు) మీరు గమనించవచ్చు.

పై ప్రశ్నకు తార్కికంగా జవాబు కావాలంటే, మీరు ఇలా ప్రయత్నించవచ్చు.

చిత్రం 11.18 లో D మరియు Rలు AP రేఖ పైవుండేటట్లు CD ∥ BA మరియు CR ∥ BP గీయాలి. (చిత్రం. 11.19)



చిత్రం 11.19

దీనివల్ల వచ్చే సమాంతర చతుర్భుజాలైన PBCR మరియు ABCD లు ఒకే భూమి BC పైవుండే సమాంతర రేఖలైన BC మరియు AR ల మధ్య వుంది.

కావున : వై (ABCD) = వై (PBCR) (ఎలా?)

Δ ABC ≅ Δ CDA మరియు Δ PBC ≅ Δ CRP (ఎలా?)

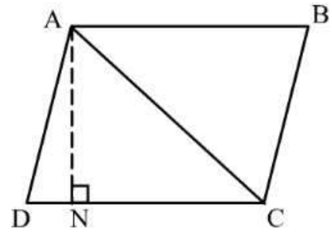
వై (ABC) = $\frac{1}{2}$ వై (ABCD) మరియు వై (PBC) = $\frac{1}{2}$ వై (PBCR) (ఎలా?)

కావున వై (ABC) = వై (PBC)

ఇప్పుడు కింది సిద్ధాంతాన్ని చూస్తారు.

**సిద్ధాంతం 11.2 ఒక భూమి (సమాన భూమి)పైవున్న మరియు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవుండే త్రిభుజాల వైశాల్యాలు పరస్పరం సమానం.**

(చిత్రం 11.20) లో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అయితే AC దాని ఒక కర్ణం AN ⊥ DC అయినది.



చిత్రం 11.20

Δ ADC ≅ Δ CBA (ఎందుకు?)

వై (ADC) = వై (CBA) (ఎలా?)

వై (ADC) = $\frac{1}{2}$ వై (ABCD)

= $\frac{1}{2}$ (DC × AN) (ఎలా?)

వై (ADC) = $\frac{1}{2}$ × భూమి DC × ఎత్తు AN.

©KTBS Not to be republished

లేదా త్రిభుజ వైశాల్యం దాని భూమి (ఏదైనా ఒక భుజం) మరియు దానికి క్షితిజ లంబపాదపు ఎత్తుల లబ్ధంలో సగం అయివుంటుంది. త్రిభుజ వైశాల్యం కనుగొను ఈ సూత్రాన్ని మీరు 7వ తరగతిలో నేర్చుకున్నారు కదా? గుర్తుందా? ఒకే భూమి లేదా సమానభూములను కలిగిన వైశాల్యాలు సమానమైన రెండు త్రిభుజాల లంబాల ఎత్తులు పరస్పరం సమానమై వుంటాయి అనేదాన్ని ఈ సూత్రం ద్వారా తెలుసుకోవచ్చు.

రెండు త్రిభుజాల ఎత్తులు సమానం కావాలంటే ఆ త్రిభుజాలు ఒకే సమాంత రేఖల మధ్య వుండాలి. దీనివల్ల మీరు సిద్ధాంతం 11.2కి విలోమం రాయవచ్చు.

**సిద్ధాంతం 11.3: ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూమి) మరియు ఒకే వైశాల్యాలు కలిగి వుంటే అవి ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యవుంటాయి.**

పై ఫలితాన్ని సాధించడానికి కొన్ని ఉదాహరణలు తీసుకుందాం.

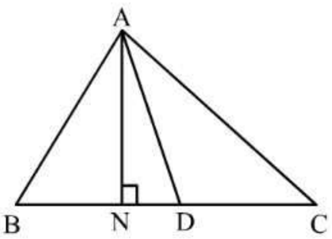
**ఉదాహరణ 3:** ఒక త్రిభుజాన్ని దాని మధ్యగతము సమానవైశాల్యాలు గల రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని చూపండి (చిత్రం 11.21)

**సాధన :** ABC ఒక త్రిభుజమైన AD ఏదైనా ఒక మధ్యరేఖ అయితే (చిత్రం 11.12ను గమనించండి)

మీరు సాధించాల్సినది,

వై (ABD) = వై (ACD)

వైశాల్యం కనుగొను సూత్రం ఎత్తును కలిగివుండడానికి కారణం $AN \perp BC$ ని గీస్తాం



చిత్రం 11.21

వై (ABD) = $\frac{1}{2}$ × భూమి × Δ ABD ఎత్తు

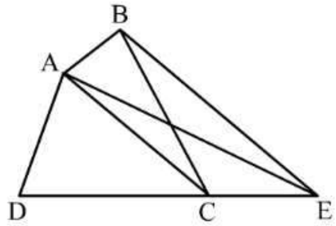
= $\frac{1}{2} \times BD \times AN$

= $\frac{1}{2} \times CD \times AN$ (BD = CD అవుతుంది)

= $\frac{1}{2}$ × భూమి × Δ ACD ఎత్తు

= వై (ACD)

**ఉదాహరణ 4 :** చిత్రం 11.22 లో ABCD ఒక చతుర్భుజం BE ∥ AC మరియు DE ; DC ని పొడిగించిన E వద్ద ఖండించును Δ ADE వైశాల్యం ABCD చతుర్భుజ వైశాల్యం సమానమని చూపండి.



చిత్రం 11.22

©KTBS Not to be republished

**సాధన :** చిత్రాన్ని సరిగ్గా గమనించండి.

$\Delta$ ABC మరియు $\Delta$ EAC లు ఒకే భూమి AC పై వున్నవి AC మరియు BE అను రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యవుంది.

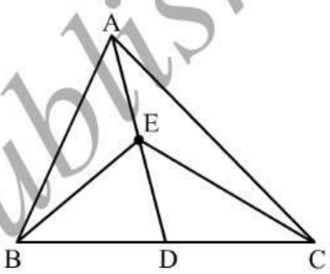
కావున వై (BAC) = వై(EAC) (సిద్ధాంతం 11.2 ప్రకారం))

కావున వై(BAC) + వై (ADC) = వై(EAC) + వై(ADC) (సమాన వైశాల్యాల చిత్రాలను రెండు వైపులా కలుపగా)

లేదా వై (ABCD) = వై (ADE)

## అభ్యాసం 11.3

(1) చిత్రం 11.23 లో $\Delta$ ABC లో మధ్యగత రేఖ AD యొక్క మధ్య బిందువు E అయిన వై (ABE) = వై (ACE) అని చూపండి.

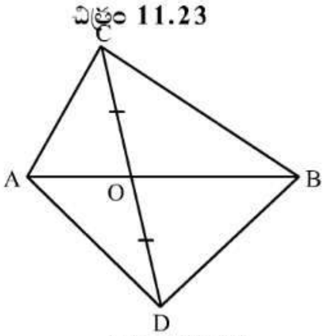


చిత్రం 11.23

(2) $\Delta$ ABC లో మధ్యగత రేఖపై బిందువు E అయితే వై (BED) = $\frac{1}{4}$ వై(ABC) అని చూపండి.

(3) సమాంతర చతుర్భుజంలో కర్ణాలు, దానిని సమాన వైశాల్యాలుగల నాలుగు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుందని చూపండి.

(4) చిత్రం 11.24 లో త్రిభుజాలు $\Delta$ABC మరియు $\Delta$ABD ఒకే భూమి AB పైన వున్నాయి CD రేఖా ఖండం AB ని O వద్ద సమద్విఖండన చేస్తే వై (ABC) = వై (ABD) వై అని చూపండి.



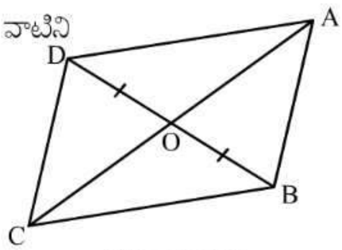
చిత్రం 11.24

(5) $\Delta$ ABC లో D,E, F లు వరుసగా భుజాలు BC, CA మరియు AB యొక్క మధ్య బిందువులు అయిన కింది వాటిని నిరూపించండి.

(i) BDEF ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.

(ii) వై(DEF) = $\frac{1}{4}$ వై(ABC)

(iii) వై(BDEF) = $\frac{1}{2}$వై(ABC) అనిచూపండి.



చిత్రం 11.25

©KTBS Not to be republished

(6) చిత్రం 11.25 లో ABCD చతుర్భుజ కర్ణాలైన AC మరియు BD లు OB = OD అయ్యేటట్లు O వద్ద పరస్పరం ఖండించుకుంటాయి AB = CD అయితే

(i) వై (DOC) = వై (AOB)

(ii) వై (DCB) = వై (ACB)

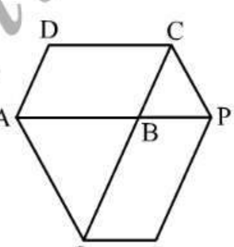
(iii) DA $\parallel$ CB లేదా ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి.

(**సూచన :** D మరియు B లతో AC లంబాలను గీయండి)

(7) Δ ABC లో D మరియు E బిందువులు వరుసగా AB మరియు AC భుజాల పైగల బిందువులు మరియు (DBC) వై = (EBC) వై అయిన DE $\parallel$ BC అని చూపండి.

(8) ΔABC లో BC భుజానికి సమాంతరంగా ఒక రేఖ అయిన BE $\parallel$ AC మరియు CF $\parallel$ AB లు XY ని క్రమంగా E మరియు F లు ఖండించుకుంటే వై (ABE) = వై (ACF) అని చూపండి.

(9) ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో AB భుజాన్ని ఏదైనా బిందువు P వరకు పొడిగిస్తే A గుండా పోతూ CP కి సమాంతరంగా వుండే సరళ రేఖ CB ను పొడిగించిన రేఖను Q వద్ద ఖండించును. సమాంతర చతుర్భుజం PBQR ను పూర్తి చేసింది. (చిత్రం 11.26)



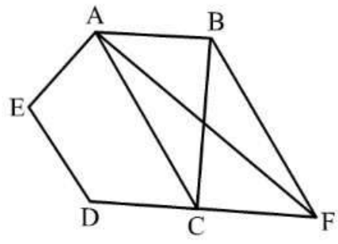
చిత్రం **11.26**

వై (ABCD ) = వై (PBQR) అని చూపండి.

(**సూచన:** AC మరియు PQ లను కలిపిన వై (ACQ) మరియు వై (APQ) లను పోల్చండి.

(10) ABCD ట్రెపీజియంలో AB $\parallel$ DC. AC మరియు BD కర్ణాలు O బిందువువద్ద పరస్పరం ఖండించుకున్న వై(AOD) = వై(BOC) అని చూపండి.

(11) చిత్రం 11.27 లో ABCDE ఒక పంచభుజాకృతి ఉంది B గుండా AC కు సమాంతరంగా గీచిన రేఖ పొడిగించబడిన DC ని F వద్ద ఖండించిన కింది వానిని నిరూపించండి.



చిత్రం **11.27**

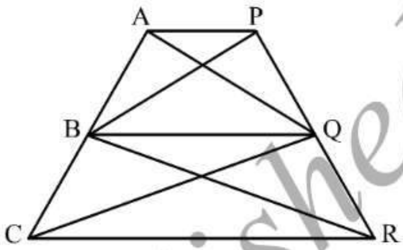
(i) వై (ACB) = వై (ACF)

(ii) వై (AEDF) = వై (ABCDE) అని చూపండి.

©KTBS Not to be republished

(12) ఒక గ్రామంలో ఇత్వారి అనే వ్యక్తికి చతుర్భుజాకారంలో ఖాళీ స్థలంకలదు. ఆగ్రామ పంచాయితీలో పాఠశాల నిర్మాణానికి అతని స్థలంలో ఒక మూలలో కొంతభాగం కావాల్సివచ్చింది. ఆయన స్థళాన్ని ఇవ్వడానికి అంగీకరిస్తూ దానికి బదులుగా అంతే వైశాల్యం గల స్థళాన్ని పొందితే, ఏ విధంగా ఆస్థలం వస్తుందో వివరించండి.

(13) ABCD ట్రెపీజియంలో AB || DC ; AC కి సమాంతరంగావుండే రేఖాఖండం AB ని X వద్ద మరియు BC ని Y వద్ద ఖండించును అయితే వై(ADX) = వై(ACY) అని చూపండి.

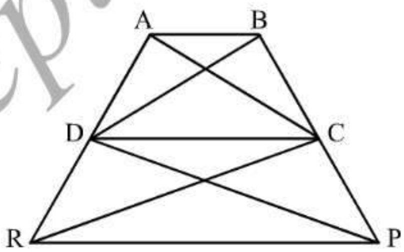


చిత్రం 11.28

(సూచన : CX ను కలపండి)

(14) చిత్రం 11.28 లో AP||BQ||CR అయితే వై (AQC) = వై (PBR) అని చూపండి.

(15) ΔAOD వైశాల్యం ΔBOC వైశాల్యానికి సమనంగావుండేటట్లు ABCD చతుర్భుజ కర్ణాలు O పరస్పరం ఖండించుకొంటాయి. ABCD ఒక ట్రెపీజయం అని చూపండి.



చిత్రం 11.29

(16) చిత్రం 11.29 లో వై(DRC) = వై (DPC) మరియు వై(BDP) = వై(ARC) అయితే ABCD మరియు DCPR చతుర్భుజాలు ట్రెపీజియాలు అనిచూపండి.

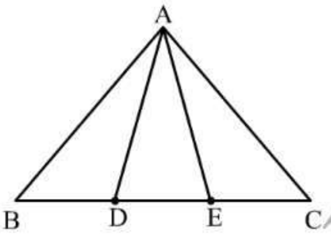
## అభ్యాసం 11.4 (ఐచ్ఛికం)[2]

(1) సమాంతర చతుర్భుజం ABCD మరియు ABEF దీర్ఘ చతురస్రం AB భూమి పైపుండి వైశాల్యాలు సమానము. అయితే సమాంతర చతుర్భుజం చుట్టుకొలత దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలతకంటే ఎక్కువ అని చూపండి.

2. పరీక్ష దృష్టిలో ఈ అభ్యాసం లేదు

©KTBS Not to be republished

(2) చిత్రం 11.30 లో BD = DE = EC. అయ్యేటట్లు BC పై D మరియు E బిందువులున్నాయి. వై (ABD) = వై(ADE) = వై(AEC) అనిచూపండి.

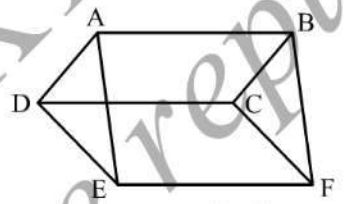


చిత్రం 11.30

ఈ అధ్యాయం పీఠికలో అడిగిన బుధియా తనపొలాన్ని సమాన వైశాల్యంతో మూడు భాగాలుగా విభజించిందా? అనే ప్రశ్నకు ఇప్పుడు మీరు జవాబు చెప్పగలరా?

(**గమనిక** : BD = DE = EC అని తీసుకోవడంతో Δ ABC సమాన వైశాల్యాలు గల Δ ABD, Δ ADE మరియు ΔAEC లుగా విభజించిన BC ని విభజించే బిందువులకు ఎదురుగావున్న శీర్షానికి కలిపిన Δ ABC సమాన వైశాల్యం కలిగిన *n* త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది)

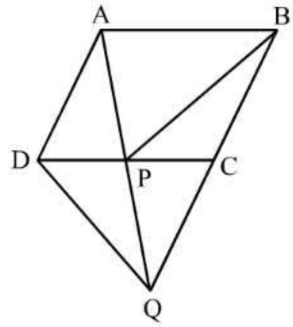
(3) చిత్రం 11.31 లో ABCD, DCFE మరియు ABEF లు సమాంతర చతుర్భుజాలు అయిన వై (ADE) = వై (BCF) అని చూపండి.



చిత్రం 11.31

(4) చిత్రం 11.32 లో ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం AD = CQ అయ్యేటట్లు BC ని Q వరకు పొడిగించిన AQ రేఖాఖండము DC ని P వద్ద ఖండించిన వై (BPC) = వై (DPQ) అని చూపండి.

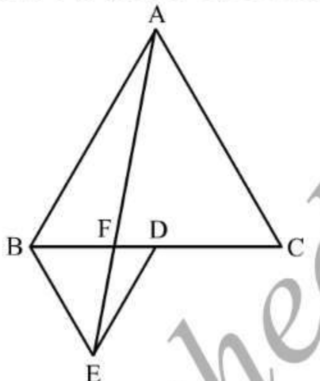
(**సూచన** : AC ని కలపండి)



చిత్రం 11.32

©KTBS Not to be republished

(5) చిత్రం 11.33 లో ABC మరియు BDE లు రెండు సమబాహు త్రిభుజాలు D, BC కి మధ్య బిందువు AE, BC ని F కలపండి,



చిత్రం 11.33

(i) వై (BDE) = $\frac{1}{4}$ వై (ABC)

(ii) వై (BDE) = $\frac{1}{2}$ వై (BAE)

(iii) వై (ABC) = 2 వై (BEC)

(iv) వై (BFE) = వై (AFD)

(v) వై (BFE) = 2 వై (FED)

(vi) వై (FED) = $\frac{1}{8}$ వై(AFC) అని చూపండి

(**సూచన** : EC మరియు AD లు కలిపి BE || AC మరియు DE || AB సాధించండి.)

(6) ABCD చతుర్భుజ కర్ణాలు AC మరియు BD లు పరస్పరం P వద్ద ఖండించుకుంటే.

వై (APB) × వై (CPD) = వై (APD) × వై (BPC) అని చూపండి.

(**సూచన** : A మరియు C లతో BD కి లంబరేఖలను గీయండి).

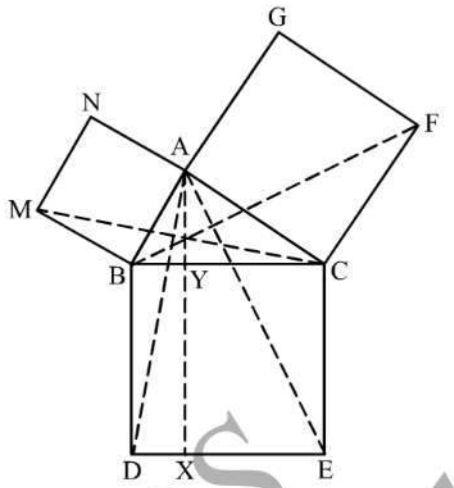
(7) Δ ABC లో P మరియు Q లు క్రమంగా AB మరియు AC లు మధ్యబిందువులు. R అని AP మధ్యబిందువు అయితే

(i) వై(PRQ) = $\frac{1}{2}$ వై(ARC) (ii) వై(RQC) = $\frac{3}{8}$ వై(ABC)

(iii) వై(PBQ) = వై(ARC) అని చూపండి.

(8) లంబకోణ త్రిభుజం ABC లో A లంబకోణం BC, CA మరియు AB ల పై వరుసగా BCED, ACFG మరియు ABMN అనే చతురస్రాలు గీయబడినాయి. రేఖా ఖండం AX ⊥ DE, BC ని Y వద్ద DE ని X వద్ద ఖండించింది AD, AE లు కలుపబడినాయి అదేవిధంగా BF, CM లు కలుపబడినాయి అయితే కిందివాటిని నిరూపించండి.

©KTBS Not to be republished




చిత్రం 11.34

(i) $\Delta$ MBC $\cong$ $\Delta$ ABD (ii) వై(BYXD) = 2 వై(MBC)

(iii) వై(BYXD) = వై (ABMN) (iv) $\Delta$ FCB $\cong$ $\Delta$ ACE

(v) వై(CYXE) = 2 వై (FCB) (vi) వై (CYXE) = వై (ACFG)

(vii) వై(BCED) = వై (ABMN) + వై (ACFG) అనిచూపండి.

**ఫలితం :** (vii) ను ప్రఖ్యాత పైథాగరస్ సిద్ధాంతం దీనిని సులభంగా నిరూపించడం 10 వ తరగతిలో నేర్చుకుంటారు.

## 11.5 సారాంశం :

ఈ అధ్యాయంలో కింది విషయాలను నేర్చుకున్నారు.

(1) ఒక చిత్రం యొక్క వైశాల్యం ఏదో ఒక యూనిట్‌లోవున్న వాస్తవ సంఖ్య ఇది ఆ చిత్రాన్ని ఆక్రమించిన ప్రదేశాన్ని తెలుపుతుంది.

(2) రెండు సర్వసమాన చిత్రాలు ఒకే వైశాల్యంకలిగివుంటాయి. దీని విపర్యయం ఎప్పుడూ సత్యం కాదు.

(3) చిత్రం T ఒక సమతలాకార ప్రదేశం ఒకదాని పై ఒకటివుండని చిత్రం P మరియు Q సమతలాకార ప్రదేశాలతో ఏర్పడినచో వై(T) = వై(P) + వై(Q),

వై(X) = X వైశాల్యం

©KTBS Not to be republished

(4) ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల చిత్రాలైతే, వాటికి ఉమ్మడి భుజం (భూమి) మరియు భుజానికి ఎదురుగా గల శీర్షాలన్నీ భూమికి సమాంతరంగా గీచినరేఖపై ఉంటాయి.

(5) ఒకే భూమి లేదా సమాన భూములు, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల రెండు సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యాలు సమానం.

(6) సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము దాని భూమి మరియు భూమి పైకి గీయబడిన లంబాల(ఎత్తు)లబ్ధానికి సమానం.

(7) ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూములు) మరియు సమాన వైశాల్యాలు గల రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉంటాయి.

(8) ఒకే భూమి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఒక త్రిభుజము, ఒక సమాంతర చతుర్భుజం వుంటే త్రిభుజ వైశాల్యం సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంలో సగం వుంటుంది.

(9) ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూములు) ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్యగల రెండు త్రిభుజ వైశాల్యాలు సమానము.

(10) త్రిభుజ వైశాల్యం దాని భూమి మరియు ఎత్తుల (లంబాల) లబ్ధానికి సమానం.

(11) ఒకే భూమి (లేదా సమాన భూములు) కలిగిన రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానం అయిన అవి ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉంటాయి.

(12) త్రిభుజ మధ్యగత రేఖ ఆ త్రిభుజాన్ని సమాన వైశాల్యాలుగాగల రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

© KTBS Not to be republished

అధ్యాయం - 12

# వృత్తాలు

## 12.1 పరిచయం

మనం మన పరిసరాలలో ఏన్నో వస్తువులను నిత్య జీవితంలో చూసి ఉంటాం. ఈ వస్తువులలో కొన్ని వృత్తాకారంలో ఉంటాయి. వాహనాల చక్రాలు, గాజులు, గడియారాలు, 50 పైసల నాణ్యం, ఒక రూపాయి నాణ్యం, 5రూ నాణ్యం, తాళంచెవి రింగు, చొక్కా గుండీలు మొదలగునవి (12.1 చిత్రాన్ని గమనించండి) గడియారంలో సెకనుల ముల్లును గమనించినట్లైతే అది గుండ్రం గా, వేగంగా వృత్తాకారంలో తిరుగుతూవుంటుంది. ముల్లు మొన తిరిగే దారిని నకలు చేసినట్లైతే అది వృత్తాకారంలో ఉంటుంది. ఈ అధ్యాయంలో మీరు వృత్తాల గురించి వృత్తానికి సంబంధించిన నిబంధనలు మరియు కొన్ని వృత్త లక్షణాల గురించి నేర్చుకుంటారు.

చిత్రం 12.1

© KTBS Not to be republished

## 12.2 : వృత్తాలు మరియు వాటికి సంబంధించిన నిబంధనలు: ఒక సమీక్ష

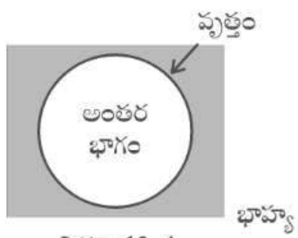
చిత్రం 12.2

ఒక పెన్సిల్‌ను వృత్త లేఖినికి బిగించండి. వృత్త లేఖిని యొక్క పదునైనకొనను కాగితంపై స్థిరంగా ఉంచండి. మరొక కొనను కొంచెం లాగి పెట్టండి. వృత్తాన్ని గీయుటకు స్థిరంగావుంచి, పెన్సిల్‌తో గుండ్రంగా కాగితంపై గీయండి. కాగితంపై గీచిన ఆవృత చిత్రం ఏది? మీకు తెలిసినట్లు అది ఒక వృత్తం (12.2లో చిత్రం గమనించండి). ఆ వృత్తం ఎలా ఏర్పడింది? మీరు వృత్తలేఖిని ఒక మొనను స్థిరంగా ఉంచారు (12.2లో A) A నుండి సమాన దూరంలో గల అన్ని బిందువులను కలిపారు. దీనిని బట్టి వృత్తం యొక్క నిర్వచనం కింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

చిత్రం 12.3

**'ఒక తలంలో ఒక స్థిర బిందువునుండి స్థిర దూరంలో గల బిందువుల సముదాయం' వృత్తం.**

స్థిర బిందువును వృత్త కేంద్రం అంటారు. స్థిర దూరాన్ని వృత్త వ్యాసార్థం అని అంటారు. చిత్రం 12.3లో O వృత్త కేంద్రం OP వృత్త వ్యాసార్థం.



చిత్రం 12.4

**వ్యాఖ్యాలు:** వృత్త కేంద్రం నుండి వృత్తం పై ఏదేని బిందువును కలుపు రేఖా ఖండాన్ని వృత్త వ్యాసార్థం అంటారు. వ్యాసార్థంను రేఖాఖండం మరియు వృత్తం పొడవు ఇలా రెండు విధాలుగా ఉపయోగిస్తాం.

**6వ తరగతిలో మీకు ఈ కింది కొన్ని పరికల్పనల పరిచయంవుంది. వాటిని ఇప్పుడు గుర్తుచేసుకుందాం.**

ఒక వృత్తం అది వుండే తలాన్ని మూడు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అవి :-

(1) **వృత్తం యొక్క లోపలిభాగం** దీనినే వృత్త అంతరం అని కూడా అంటారు.

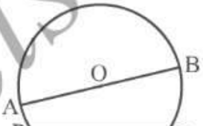
(2) **వృత్తం మరియు**

(3) వృత్తం బయటి భాగం లేదా వృత్త బాహ్యం (చిత్రం 12.4 చూడండి). వృత్తము మరియు వృత్త అంతరం కలిసి వృత్తాకార ప్రాంతాన్ని ఏర్పరుస్తాయి.

©KTBS Not to be republished

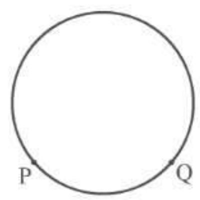
మీరు ఒక వృత్తం పై P, Q అను రెండు బిందువులను తీసుకుంటే, ఆ PQ రేఖాఖండం ఆ వృత్తము యొక్క 'జ్యా' అవుతుంది. అదే జ్యా వృత్తకేంద్రంగుండా వెళితే అది ఆ వృత్తం యొక్క 'వ్యాసం' అంటాం. వ్యాసార్థాన్ని తీసుకుంటే వ్యాసమును రేఖాఖండం మరియు వృత్తం పొడవు రెండు విధాలుగా చెప్పవచ్చు. వ్యాసం కంటే పొడవైన జ్యాను మీరు వృత్తం పై గుర్తించగలరా? గుర్తించలేము. వృత్తం పై అతి పెద్ద జ్యాను 'వ్యాసం' అంటాం. ఈ వ్యాసం వృత్తంలోని వ్యాసార్థానికి రెండు రెట్లు ఉంటుంది. వృత్తంలో AOB అనునది వృత్తం యొక్క వ్యాసం. ఒక వృత్తం ఎన్ని వ్యాసాలను కలిగి వుంటుంది? ఒక వృత్తాన్ని గీచి అందులో ఎన్ని వ్యాసాలను గుర్తించగలరు.

'ఒక వృత్తం పై ఏవేని రెండు బిందువుల మధ్యగల భాగాన్ని 'చాపం' అంటాం.'



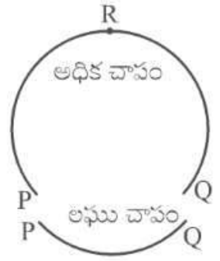
చిత్రం 12.5

చిత్రం 12.6లో వృత్తంపై గుర్తించి P, Q బిందువులును గమనిస్తే వృత్తం పై PQ భాగాన్ని **వృత్తచాపం** అంటాం. చిత్రం 12.7లో చూపినట్టు వృత్తం అర్ధ భాగం కంటే చాపం పొడవు ఎక్కువగా ఉన్నట్లయితో ఆ చాపాన్ని **అధిక చాపం** అంటాం. ఒక చాపం పొడవు అర్ధవృత్తం కన్నా చిన్నదయితే ఆ చాపాన్ని **'లఘు చాపం'** లేదా **'అల్ప చాపం'** అంటారు. అల్పచాపం PQ ను $\widehat{PQ}$ అని సూచిస్తారు. అధిక చాపం PQ ను $\widehat{PRQ}$ అని సూచిస్తారు. ఇక్కడ R అనేది. P మరియు Q బిందువుల మధ్యగల చాపం పై ఒక్క బిందువు. స్పష్టంగా చెప్పాలంటే $\widehat{PQ}$ అల్పచాపాన్ని సూచిస్తుంది. P మరియు Q లు వ్యాసం యొక్క అంత్యబిందువులైతే రెండు చాపాలు సమానమై, ప్రతి దానిని అర్ధవృత్తం అంటారు. రెండు చాపం పొడవులు సమానమైతే వాటిని అర్ధవృత్తాలు అంటాం.)



చిత్రం 12.6

"వృత్తం యొక్క మొత్తం పొడవు ఆ **'వృత్త పరిధి'** అంటాం. జ్యా మరియు చాపంల మధ్య ప్రదేశాన్ని వృత్తఖండం అని అంటాం. చాపం చివరి బిందువులను ఒక జ్యాతో కలిపితే ఆ జ్యా వృత్తాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అల్ప చాపానికి మరియు జ్యాకు మధ్యగల ప్రాంతాన్ని **'అల్ప వృత్త ఖండం'** అని మరియు జ్యాకు, అధిక చాపానికి మధ్యగల ప్రాంతాన్ని **'అధిక వృత్త ఖండ'** మని పిలుస్తారు. ఒకవేళ జ్యా కనుక వ్యాసమైతే అపుడు వ్యాసం వృత్తాన్ని రెండు సమాన వృత్త ఖండాలుగా విభజిస్తుంది.



చిత్రం 12.7

Not to be republished ©KTBS

ఒక చాపం మరియు దాని చివరి బిందువులను వృత్త కేంద్రంతో కలిపి వ్యాసార్థాల చేత ఆవరింపబడిన ప్రాంతాన్ని **'సెక్టారు'** అంటారు. వృత్తంలో ఒక సెక్టారు, అల్ప సెక్టారు అయిన మిగిలినది **'అధిక సెక్టారు'.** (సెక్టారును త్రిజ్యాంతరము అనికూడా అంటారు).

చిత్రం 12.8

చిత్రం 12.9

©KTBS Not to be republished

## అభ్యాసం 12.1

**1. ఖాళీలను పూరించండి.**

(i) వృత్తకేంద్రం వృత్తానికి _______ లో ఉంటుంది. (అంతర/బాహ్య)

(ii) ఒక బిందువు, వృత్తకేంద్రానికి గల మధ్యదూరం, వ్యాసార్థం కంటే ఎక్కువగా ఉంటే అది వృత్తానికి _________ లో ఉంటుంది. (అంతర/ బాహ్య).

(iii) వృత్తంలోని అతి పెద్ద జ్యాను _______ అంటాం.

(iv) వ్యాసం చివరి బిందువులు,చాపం చివరి బిందువులు కలిస్తే ఏర్పడేది _________ .

(v) వృత్తఖండము, వృత్త చాపం మరియు ________ ల మధ్య ప్రదేశం.

(vi) వృత్తము ఒక తలాన్ని _________ భాగాలుగా విభజిస్తుంది.

**2. సరి, తప్పులను గుర్తించి, వాటికి సరైన కారణాలను రాయండి.**

1 వృత్తం పై ఏదైనా బిందువు మరియు వృత్త కేంద్రమును కలుపు రేఖా ఖండాన్ని ఆ వృత్త వ్యాసార్థం అంటారు.

2 ఒక వృత్తం పరిమిత సంఖ్యలో, సమాన జ్యాలను కలిగి వుంటుంది.

3 ఒక వృత్తాన్ని మూడు సమాన చాపాలుగా విభజిస్తే, అందులో ప్రతి చాపం అధిక చాపం అవుతుంది.

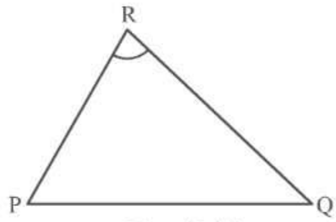
4 ఒక జ్యా వృత్త వ్యసార్థానికి రెండు రెట్లు ఉంటే, దానిని ఆ వృత్త వ్యాసం అంటాం.

5 జ్యా మరియు వృత్త చాపాల మధ్య ప్రదేశాన్ని త్రిజ్యాంతరం (సెక్టారు) అంటారు.

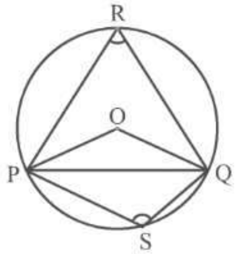
6 వృత్తం ఒక సమతల ఆకృతి.

## 12.3 వృత్తం మీద ఏదేని బిందువు వద్ద జ్యా చే ఏర్పడినకోణం

$\overline{PQ}$ అను రేఖా ఖండమును తీసుకోండి. PQ రేఖాఖండము పై తీనటువంటి బిందువు R ను గుర్తించండి. PR మరియు QR అను కలపండి చిత్రం 12.10లో చూపినట్టు. ఇపుడు $\Delta PQR$ ఏర్పడినది.




చిత్రం 12.10

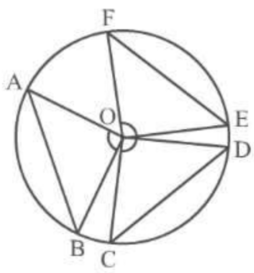



చిత్రం 12.11

చిత్రంలోని కోణాలు $\angle POQ$, $\angle PSQ$ మరియు $\angle PRQ$ అను మీరు ఏమని పిలుస్తారు.

కేంద్రం "O" వద్ద జ్యా PQ ఏర్పరచుకోణం $\angle POQ$. అదే విధంగా జ్యా PQ అల్పవృత్త ఖండం మరియు అధిక వృత్త ఖండాల పై గల బిందువు S మరియు R వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు వరుసగా $\angle PSQ$ మరియు $\angle PRQ$.

అయితే ఈ జ్యాలు కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచుతున్న కోణాలను గురించి నీవు ఏం చెప్పగలవు. కోణాలను పరిశీలించడం ద్వారా జ్యా పొడవు పెరిగిన కొద్దీ అది కేంద్రం వద్ద చేసే కోణం కొలత పెరుగుటను గమనిస్తాం.




చిత్రం12.12

మరి రెండు సమాన జ్యాలను తీసుకుంటే అవి కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు ఎలా ఉంటాయో ఆలోచించండి. ఇంకొక రెండు సమాన జ్యాలను గీచి, అవి వృత్త కేంద్రం వద్ద చేయు కోణాలను కొలిచి చూడండి.

ఆ కోణాలు సమానంగా ఉండుటను మీరు గమనిస్తారు. (చిత్రం 12.12). ఈ సత్యాన్ని నిరూపిస్తాం.

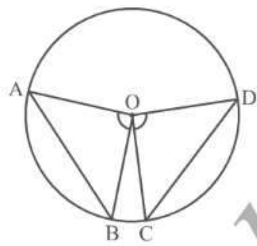
**సిద్ధాంతం 12.1: ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానం.**

**సాధన :** 'O' కేంద్రంగా గల వృత్తంలో AB మరియు CD లు రెండు సమాన జ్యాలు. (చిత్రం 12.13)

**సారాంశం :** $\angle AOB = \angle COD$

©KTBS Not to be republished

**నిర్మాణం :** వృత్త కేంద్రాన్ని జ్యాల యొక్క అంత్య బిందువులతో కలుపుము అప్పుడు $\Delta AOB$ మరియు $\Delta COD$ లు ఏర్పడుతాయి.



చిత్రం 12.13

**నిరూపణ :**

$\Delta$ AOB మరియు $\Delta$ COD లలో

OA = OC (దత్తాంశం నుండి)

OB = OD (ఒకే వృత్త వ్యాసార్ధాలు)

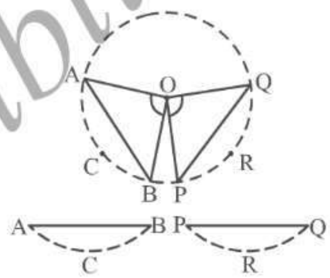
AB = CD (దత్తాంశం)

కావున $\Delta AOB \cong \Delta COD$ (భుజం, భుజం, భుజం నియమం)

కావున $\underline{|AOB} = \underline{|COD}$

(సర్వసమాన త్రిభుజపు అనురూపకోణాలు)

**గమనించండి :** మన అనుకూలం కోసం **సర్వసమాన త్రిభుజపు** అనురూపకోణాలు స.త్రి.అ.కో (CPCT) నిర్మించుకున్నాం. ఇలాంటివి మనం చాలా తక్కువగా చూస్తుంటాం.



చిత్రం 12.14

ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసేకోణాలు సమానమైన. జ్యాల గురించి నీవేమి చెప్పగలవు? ఈ విషయాలన్నీ కింది కృత్యం ద్వారా పరీక్షిద్దాం.

**కృత్యం :** ఒక ట్రేసింగ్ కాగితాన్ని తీసుకోని, అందులో ఒక వృత్తం గీయండి. వృత్త అంచులు ఏకీభవించునట్లు ఏదైనా ఒక వ్యాసం వెంట మడవండి. దీని కేంద్రం. 'O' A, B లు వృత్తం పై బిందువులను గుర్తించి $\underline{|AOB}$ ని గీయండి. 'O' ని కేంద్రంగా చేసుకొని $\underline{|POQ}$ మరొక కోణాన్ని గుర్తించండి. రెండు కోణాలకు కేంద్ర బిందువు 'O'. పటంలో చూపినట్లు AB మరియు PQ లను కత్తిరించండి. ఇప్పుడు మీకు ACB మరియు PRQ అను వృత్తఖండాలు లభిస్తాయి ఇప్పుడు మీరు వాటిని ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచిన, ఏమి గమనించారు. అవి రెండు సర్వసమానాలు. కాబట్టి AB = PQ ఇదే విషయాన్ని వేర్వేరు కొలతలుగల సమాన కోణాలు తీసుకొని సరిచూసిన జ్యాలు సమానమగును.

**సిద్ధాంతం 12.2: ఒక వృత్తంలోని జ్యాలు కేంద్రంవద్ద చేసే కోణాలు సమాన మైన ఆ జ్యాలు సమానం.**

ఇది ఇంతకు ముందు చెప్పబడిన సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయం. ఇచ్చిన సిద్ధాంతం 12.1, ప్రకారం చిత్రం 12.13 గమనించండి.

© KTBS Not to be republished

$\angle AOB = \angle COD$ తీసుకున్నచో

అప్పుడు మీరు $\Delta\ AOB \cong \Delta\ COD$ (ఎందుకు?)

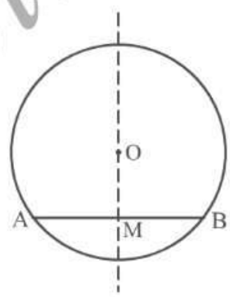
ఇప్పుడు $AB = CD$ (అని గమనించవచ్చు?)

**అభ్యాసం 12.2**

1. ఒకే వృత్తవ్యాసార్థం కలిగిన, రెండు సర్వసమాన వృత్తాలను తీసుకొని, ఆ వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానమైతే అవి కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానం అని నిరూపించండి.
2. ఒక వృత్తంలోని జ్యాలు కేంద్రం వద్ద చేసే కోణాలు సమానమైన ఆ జ్యాలు సమానమని నిరూపించండి.

## 12.4 వృత్తకేంద్రం నుండి జ్యాకు గీచిన లంబం :

'O' కేంద్రంగా ఒక వృత్తాన్ని నిర్మించండి. జ్యా AB ని గీయండి మరియు కేంద్రం 'O' నుండి జ్యా AB కి ఒక లంబాన్ని గీయండి. లంబం మరియు జ్యా AB ల ఖండన బిందువు M అనుకోండి. MA మరియు MB అవుతుంది. OM, AB కి లంబరేఖ కావున $\angle OMA = \angle OMB = 90^\circ$ లేక $MA \perp MB$.



చిత్రం 12.15

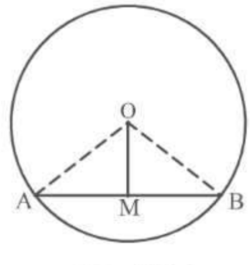
OA మరియు OB లను కలిపిన లంబకోణ $\Delta$ OMA మరియు $\Delta$ OMB లను సర్వసమానం అని మీరే స్వంతంగా సాధించండి. ఈ ఉదాహరణ ఈ కింద ఫలితానికి నిర్దిష్టమైన నిరూపణ.

**సిద్ధాంతం 12.3 : ఒక వృత్త కేంద్రం నుండి ఏదైనా జ్యాకు గీచిన లంబం జ్యా ను సమద్విఖండన చేస్తుంది.**

ఈ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయం ఏమిటి? వృత్త కేంద్రం నుండి గీచిన లంబరేఖను వృత్త జ్యా కూడా సమద్విఖండన చేస్తుంది. కాబట్టి వృత్త కేంద్రం నుండి జ్యాను సమద్విఖండన చేసే రేఖ జ్యాకు లంబంగా ఉంటుంది.

**సిద్ధాంతం 12.4 : వృత్త కేంద్రం నుండి గీచిన రేఖ వృత్త జ్యా ను సమద్విఖండన చేస్తుంది అది జ్యాకు లంబం.**

ఇది నిజమా? కొన్ని సందర్భాలలో ప్రయత్నించి చూడండి. అన్ని సంధర్భాలలో ఇది నిజమని తెలుసుకుంటారు. కింది అభ్యాసం చేయడంద్వారా సాధారణంగా ఇది నిజమని తెలుసుకుంటారు. మీరు దశలను రాయగలరు మరియు కారణాలు కూడా ఇవ్వగలరు.



చిత్రం 12.16

©KTBS Not to be republished

AB ని వృత్తం యొక్క జ్యా అనుగుంటే, కేంద్రబిందువు 'O' మరియు AB ల మధ్యబిందువు M అయిన OM ను కలపండి OM ⊥ AB అని నిరూపితము. ప్రక్క పటంలో చూపిన విధంగా OA మరియు OB లను కలపండి.

Δ OAM మరియు Δ OBM త్రిభుజాలలో,

$OA = OB$ (ఎందుకు ?)

$AM = BM$ (ఎందుకు?)

$OM = OM$ (సామాన్యభుజం)

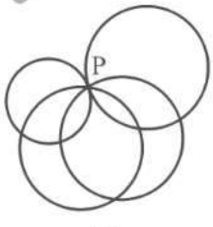
కాబట్టి, $\Delta\ OAM \cong \Delta\ OBM$ (ఎందుకు?)

$\underline{|OMA} = \underline{|OMB} = 90°$ (ఎందుకు?)

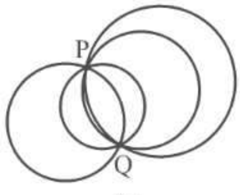
## 12.5 : వృత్తాన్ని నిర్ధారించే మూడు బిందువులు :

ఒక సరళ రేఖా ఖండాన్ని గీయడానికి కనీసం రెండు బిందువులు అవసరమని మీరు అధ్యాయం – 6లో నేర్చుకున్నారు. అయితే రెండు బిందువుల గుండా ఒకే రేఖ మాత్రమే గీయగలం. ఒక వృత్తమును నిర్మించాలంటే ఎన్ని బిందువులు అవసరం, అనే ప్రశ్న మీకు ఉత్పన్నమవుతుంది.

బిందువు P ని తీసుకోండి. ఈ బిందువు గుండా ఎన్ని వృత్తాలను గీయగలం? చిత్రం 12.17 (i)లో చూపిన విధంగా ఒక బిందువుగుండా సాధ్యమైనన్ని వృత్తాలను గీయవచ్చు. క్రింది చిత్రంలో చూపిన విధంగా P, Q అనే రెండు బిందువులను తీసుకొని, ఆ రెండు బిందువుల గుండా అనంత సంఖ్యలో వృత్తాలను గీయవచ్చు. ఒకే రేఖపై గల A, B మరియు C బిందువులను కలుపుతూ వృత్తాన్ని గీయగలమా? గీయలేము ఎందుకంటే, అవి ఒకే రేఖపైగల బిందువులు. వృత్తము రెండు బిందువుల గుండా మాత్రమే వెళుతుంది. మూడవ బిందువు వృత్తానికి బాహ్యంగా కాని, అంతరంగా కాని ఉంటుంది.




(i)

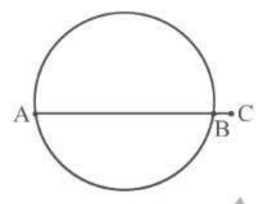



(ii)

చిత్రం 12.17

©KTBS Not to be republished

A,B మరియు C బిందువు ఒకే రేఖపై లేకపోతే చిత్రం 12.18లో చూపిన విధంగా తీసుకోండి. AB మరియు BC లను కలపండి. $\overline{AB}$ మరియు $\overline{BC}$ ల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు $\overline{PQ}$ మరియు $\overline{RS}$ లను గీయండి. అవి ఒకే ఒక బిందువు 'O' వద్ద ఖండించుకొంటాయి. (ఎందుకంటే రెండు వేర్వేరు రేఖలు ఒకటికన్నా ఎక్కువ ఉమ్మడి బిందువులను కలిగి వుండవు).




చిత్రం 12.18

కనుక ఇపుడు 'O' బిందువు $\overline{AB}$ లంబ సమద్విఖండన రేఖపై ఉంటుంది. కాబట్టి

OA = OB ................. (1)

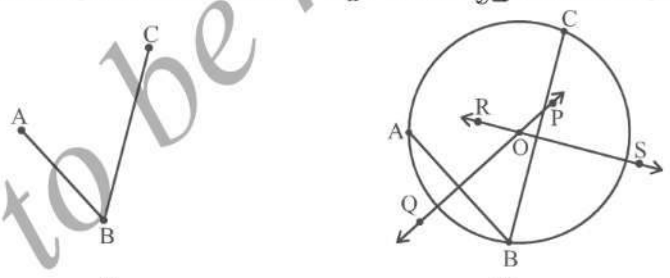
$\overline{PQ}$ పై గల ప్రతి బిందువు A, B లనుండి సమన దూరంలో ఉండుట వలన, అంతేకాక 'O' బిందువు $\overline{BC}$ లంబ సమద్విఖండన రేఖ పై కూడా ఉంటుంది. కాబట్టి

OB = OC ................. (2)

(1) & (2) సమీకరణాలనుండి

OA = OB = OC అని చెప్పగలం

కాబట్టి A, B, C ల నుండి సమానదూరంలో (సంక్రమణ ధర్మం) ఉండే ఏకైక బిందువు 'O'. అందుచేత మనం 'O' కేంద్రంగా మరియు OA వ్యాసార్థంతో గీచిన వృత్తం B మరియు C బిందువుల ద్వారా కూడా పోతుంది కావున A, B మరియు C ల ద్వారా పోయే వృత్తం ఒకే ఒకటి వుంటుంది.




చిత్రం 12.19

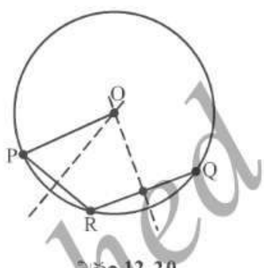
**సిద్ధాంతం 12.5 : మూడు సరేఖీయాలు కాని బిందువుల ద్వారా పోయే ఏకైక వృత్తం ఉంటుంది. అనే పరికల్పనను చేయవచ్చు.**

**గమనించండి :** $\Delta$ ABC ఒక త్రిభుజం అయితే సిద్ధాంతం 12.5 నుండి. ఆ త్రిభుజం అన్ని శీర్షాలు వృత్తముపై ఉండును. ఈ వృత్తాన్ని ఆ త్రిభుజపు **పరివృత్తం** అంటాం మరియు 'O' ను **పరివృత్త కేంద్రం** అంటాం. OA లేదా OB లేదా OC లు పరివృత్తపు వ్యాసార్థం అగును.

©KTBS Not to be republished

**ఉదాహరణ 1 :** ఒక వృత్తము మీద చాపరేఖను తీసుకుంటే అది పూర్తి వృత్తాన్ని ఇస్తుంది

**సాధన :** ఒక వృత్తముపై చాపరేఖ PQ అనుకొంటే, వృత్తమును పూర్తిగా గీయాలి అంటే ఇప్పుడు వృత్త కేంద్రం, వ్యాసార్థం కనుక్కోవాలి. చాపంపై ఒక బిందువు R గా తీసుకుంటే PR లను మరియు RQ లను కలుపవలెను. సిద్ధాంతం 12.5లో నిర్మాణంను ఉపయోగించి వృత్త కేంద్రమును మరియు వృత్త వ్యాసార్థమును కనుగొనవచ్చు.



చిత్రం 12.20

వృత్త కేంద్రమును మరియు వృత్త వ్యాసార్థమును తీసుకొని, ఆ వృత్తాన్ని పూర్తిగా ప్రక్క పటంలో 12.20 చూపిన విధంగా గీయవచ్చు.

### అభ్యాసం 12.3

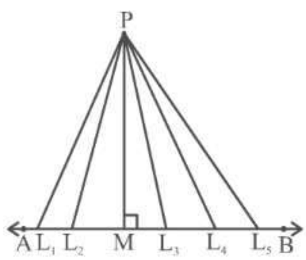
1. వివిధ జతల వృత్తాలను గీయండి. ప్రతి వృత్త జతలు ఎన్ని బిందువులను కలిగి వున్నాయి? ప్రతి వృత్త జత ఎన్ని అత్యధిక ఉమ్మడి బిందువులను కలిగివుంది?

2. ఒక వృత్తాన్ని తీసుకుంటే. ఆ వృత్త కేంద్రాన్ని కనుగొనడానికి నిర్మాణాన్ని గీయండి.

3. ఒక వేళ రెండు వృత్తాలు రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుకుంటే, ఆ వృత్తాల వృత్త కేంద్రం అనేది ఆ వృత్త జ్యాలకు లంబంగా వుంటుంది. అని నిరూపించండి.

## 12.6 సమాన జ్యాలు మరియు కేంద్రం నుండి వాటి మధ్యగల దూరాలు.

AB అనే ఒక సరళ రేఖను తీసుకొంటే P అనేది తలంలో ఒక బిందువు అయితే. ఒక సరళ రేఖపై అనతంమైన బిందువులు వుంటాయి. కాబట్టి. ఒక వేళ వాటిని P బిందువుతో కలిపితే, అనంత సంఖ్యలో రేఖా ఖండాలు అనేవి ఏర్పడతాయి. ఉదా : $PL_1$, $PL_2$, PM, $PL_3$, $PL_4$.......వాటి మధ్య దూరం (AB) P ? బాగా ఆలోచించి సమాధానం రాయండి? పై రేఖాఖండాలన్నిం టిలోనూ P నుండి AB కి గీచినవి అన్ని లంబంగా ఉన్నాయా? కేవలం PM మాత్రమే AB కి లంబంగా ఉండి అని చిత్రంనుం



చిత్రం 12.21

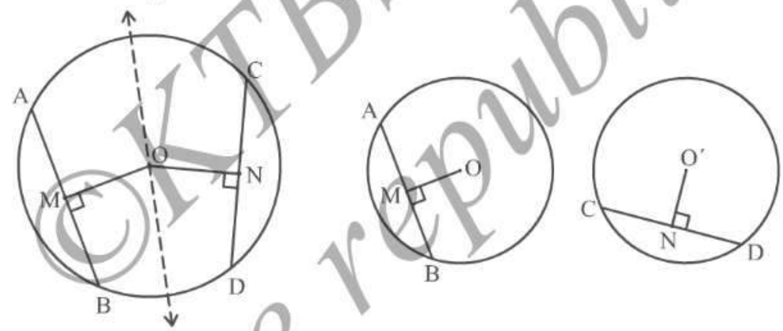
డి అర్థమవుతుంది. (12.21) మరియు అదే అదే అతి తక్కువ పొడవు. గణితపరంగా AB పై P అనే బిందువునుండి గీచిన రేఖాఖండం అతి తక్కువ పొడవును కలిగివుంది అని నిర్వచిస్తాం. కాబట్టి దీనిని క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

©KTBS Not to be republished

సరళ రేఖపై ఒక బిందువు నుండి గీచిన లంబరేఖ పొడవు అనేది. బిందువు నుండి సరళరేఖపై ఒక బిందువుకు గీచిన పొడవుకు సమానం.

గమనించాల్సిన విషయం ఏమిటంటే, ఒక వేళ ఒక బిందువు సరళరేఖపై బిందువు ఒక్కటే ఆయితే ఆ బిందువుకు సరళరేఖపై బిందువుకు గీచిన మధ్య దూరం శూన్యం లేదా సున్న అవుతుంది.

ఒక వృత్తానికి గల జ్యాలు అపరమితం మనం వృత్తంలో ఒకే పొడవులు గల అనేక జ్యాలను గీస్తే. కేంద్రం నుండి సమాన జ్యాలకు గల దూరం ఎలా ఉంటుంది. కేంద్రానికి దక్కరగా పోయే జ్యా చాలా పెద్దగా వుంటుంది. మిగిలిన జ్యాలతో పోల్చిన, అందులో వ్యాసం యొక్క దూరం ఎంత? వృత్తంలో అతి పెద్ద జ్యా ఏది? కేంద్రం గుండా పోతే వాటి మధ్య దూరం సున్న గమనించండి ఇక్కడ జ్యాల యొక్క పొడవుకు మరియు కేంద్రం యొక్క మధ్య దూరానికి రెండిటి మధ్య అవినాభావ సంబంధం ఉంది. వాటి మధ్య సంబంధం చూద్దాం!



(i) (ii)

చిత్రం 12.22

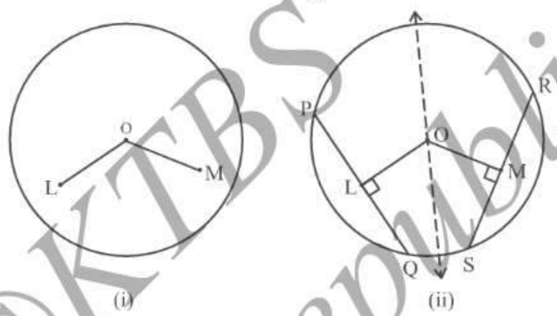
**కృత్యము :** వృత్తాన్ని గీచి దీనిని సగానికి మధ్య మడవండి. అర్ధవృత్తపు చాపపు అంచుదగ్గర నుండి మడత విప్పన మీకు రెండు సర్వసమాన జ్యాల మడతలు వచ్చును. వాటిని AB మరియు CD గా గుర్తించండి. మరియు వృత్త కేంద్రం 'O' నుండి జ్యాలకు గీచిన లంబదూరాలు OM మరియు ON. ఇప్పుడు పేపరును మడిచిన B, D తోనూ A, C తోనూ ఏకీభవిస్తాయి. పై పటం 12.22(i) లో చూపిన విధంగా! M కు N కు మధ్యలో వృత్తకేంద్రం గుండా పోయే జ్యా సరిహద్దుగా ఉంటుంది.

∴ కాబట్టి OM = ON. కృత్యాన్ని పునరావృతం చేయగా సర్వసమాన వృత్తాలు గీయగా వాటి వృత్త కేంద్రాలు 'O' మరియు O' అయిత సమాన జ్యాలు AB మరియు CD లను ఒక్కొక్క వృత్తంలో గీస్తే. లంబాలను OM మరియు O'N లను చిత్రం 12.22(ii)లో చూపిన విధంగా గుర్తించాలి. ఒకదాన్ని కత్తరించి రెండవదానిపై AB, CD లను పోలి వుంటుంది. ఇక్కడ వృత్తకేంద్రం O, O' దగ్గరే ఉంటుంది. M ను N గాతీసుకుంటాం. ఈ విధంగా కిందివాటిని సరిచూడండి.

©KTBS Not to be republished

**సిద్ధాంతం 12.6 :** సమాన పొడవులు గల జ్యాలు కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

తర్వాత ఈ సిద్దాంత విపర్యయం సత్యమో కాదో గమనిద్దాం. 'O' కేంద్రంగా గల ఒక వృత్తాన్ని నిర్మించండి. 'O' ను కేంద్రంగా చేసుకొని రెండు రేఖా ఖండాలను గీయండి. వాటిని OL మరియు OM గా గుర్తించండి. ఈ వృత్త రేఖా ఖండాల పొడవులు సమానంగా వుండే విధంగా సమాన దూరంలో వృత్తం అంతర భాగంలో ప్రక్క పటం లో(12.23(i)) చూపిన విధంగా గీయండి. ఇప్పుడు PQ మరియు RS ల పొడవును కొలవండి. ఏమైనా వ్యత్యాసం ఉందా? లేదు, రెండూ సమానం ఇదే విధంగా కృత్యాన్ని తిరిగి చేయండి. సమాన రేఖా ఖండాలను గీచి సమాన జ్యాలను గీచి వాటికి లంబంగా వుండే విధంగా చూడండి. ఈ పరిశీలన ద్వారా చేయండి.




చిత్రం 12.23

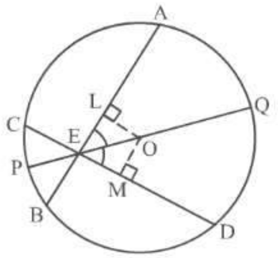
©KTBS Not to be republished

సిద్ధాంతం 12.6 యొక్క విపర్యయం సత్యం అని ఋజువయింది.

**సిద్ధాంతం 12.7: ఒక వృత్త కేంద్రంనుండి గీచిన సమాన జ్యాలు ఆ వృత్తంలో వాటి పొడవులు సమానం.**

పై సిద్ధాంతాన్ని వివరించడానికి ఒక ఉదాహరణ ద్వారా ప్రయత్నిద్దాం!

**ఉదాహరణ 2 :** ఒక వృత్తానికి పరస్పరం ఖండించుకునే రెండు జ్యాలు వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా పోయే వ్యాసంతో సమానమైన కోణాలను ఏర్పరిస్తే, ఆ జ్యాలు పరస్పరం సమానమవుతాయని చూపండి.




చిత్రం 12.24

**సాధన :** ఒక వృత్తంలో AB మరియు CD లు ఆ వృత్త జ్యాలుగా తీసుకుంటే, 'O' వృత్త కేంద్రంలో E పరిచ్ఛేదన బిందువు. PQ అనేది E గుండా వ్యాసం అయితే. అప్పుడు $\angle AEQ = \angle DEQ$ (పటం 12.24) నుండి. ఇపుడు AB = CD అని నిరూపిద్దాం 'O' వృత్త కేంద్రంగా OL మరియు OM అనే లంబాలను గీచిన, ఇవి AB మరియు CD లకు లంబంగా వుంటాయి. అదే విధంగా ఇప్పుడు.

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO = 90° - \angle LEO$ (త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం ధర్మం ఆధారంగా)

$= 90° - \angle AEQ = 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO = \angle MOE$

$\Delta$ OLE మరియు $\Delta$ OME నుండి

$\angle LEO = \angle MEO$ (ఎందుకు?)

$\angle LOE = \angle MOE$ (పైనిరూపణ ఆధారంగా)

EO = EO (ఉమ్మడివి)

కాబట్టి $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (ఎందుకు?)

**ఇస్తుంది** OL = OM (సర్వసమాన త్రిభుజపు అనురూప కోణాలు)

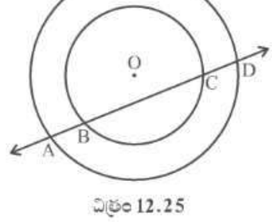
కావున AB = CD (ఎందుకు?)

## అభ్యాసం 12.4

1. రెండు వృత్త వ్యాసార్థాలు, వరుసగా 5cm మరియు 3cm లు కేంద్రంనుండి 4cm దూరంలో అవి రెండు బిందువులు ఖండించుకుంటే, ఆ వృత్త ఉమ్మడి జ్యా పొడవు ఎంత?

2 ఒక అంతర వృత్తం లో రెండు సమాన జ్యాలు సమద్వి ఖండన చేసుకుంటే, ఒక జ్యాలో గల ఖండించుకున్న భాగాలు మిగిలిన జ్యాలో గల భాగానికి సమానంగా ఉంటాయి. అని నిరూపించండి.

3 ఒక వృత్తంలో ఖండించుకొనుచున్న రెండు జ్యాలు వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా పోయే వ్యాసంతో సమాన కోణాలు చేస్తే, ఆ జ్యాల పొడవులు సమానమని నిరూపించండి.



చిత్రం 12.25

4 రెండు ఏక కేంద్రక వృతాలను ఒక సరళ రేఖ ఖండించిన ఆ వృత్తకేంద్రం. O ఖండన బిందువులు A,B,C మరియు D అయిన (పక్క చిత్రం 12.25) నుండి AB = CD అని నిరూపించండి.

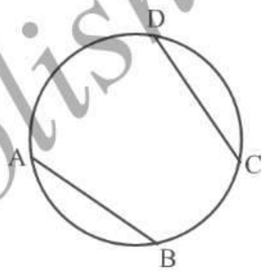
5 ఒక పార్కులో 5m వ్యాసార్థంతో గీచినటువంటి ఒక వృత్తంలో రేష్మా, సల్మా మరియు జ్యోత్స్న అనే ముగ్గురు అమ్మాయిలు ఆడుకుంటున్నారు. రేష్మా బంతిని సల్మాకు విసిరింది. సల్మా

©KTBS Not to be republished

అదే బంతిని జ్యోత్స్నకు విసిరింది. జ్యోత్స్న తిరిగి అదే బంతిని రేష్మాకు విసిరింది. అయితే రేష్మా మరియు సల్మా మరియు సల్మా మరియు జ్యోత్స్నల మధ్య దూరం 6m ప్రతి ఒక్కరికి, అయితే రేష్మా మరియు జ్యోత్స్నల మధ్య దూరం ఎంత?

6 ఒక కాలనీలో 20m వ్యాసార్థం కలిగిన వృత్తాకారపు పార్క్‌ను నిర్మించారు. ఆ పార్కులో అంకుర్, సయ్యద్ మరియు డేవిడ్ అనే ముగ్గురు మిత్రులు బొమ్మ టెలిఫోన్ తీసుకొని ఆ పార్కు (వృత్తపు) అంచులలో కూర్చుని మాట్లాడుకుంటున్నారు. అయితే, ప్రతి ఒక్కరి బొమ్మ టెలిఫోన్‌తీగ యొక్క పొడవును కనుగొనండి.

## 12.7 వృత్త చాపము ఏర్పరిచే కోణం :



చిత్రం 12.26

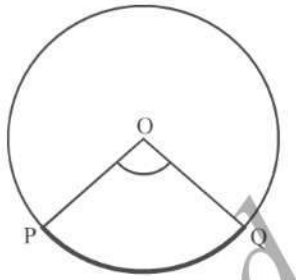
ఒక వృత్తంలో ఖండించుకొనుచున్న రెండు జ్యాలు వాటి ఖండన బిందువు ద్వారా పోయే వ్యాసంతో వృత్తాన్ని రెండు చాపాలుగా విభజిస్తుంది. ఒకటి అధిక మరియు ఇంకొకటి అల్ప చాపం. ఒకవేళ రెండు సమాన జ్యాలు అయితే అప్పుడు చాపంయొక్క పరిమాణం ఎంత? మొదటి చాపాన్ని మొదటి జ్యా రెండవ చాపాన్ని రెండవ జ్యా సమానంగా ఏకీభవించును? పొడవులో దాదాపుగా సమానం. ఒక చాపాన్ని మరోచాపంతో కలిపిన అవి రెండు సర్వ సమానాలు అగును. వాటిని రెండింటిని కదల్చకుండా, ఒక దానిపై మరొకటి తాకే విధంగా వుంచిన అవి రెండు కలిసిపోయి పూర్తిగా కనిపిస్తాయి.

ఒక చాపాన్ని కత్తరించి ఈ నిజాన్ని నిరూపించండి. వృత్తాన్ని దానిలో సగానికి మధ్యలో మడవండి. ఇప్పుడు అర్ధవృత్తం చాపపు అంచు దగ్గర నుంచి మడత విప్పిన మీకు రెండు సర్వసమాన జ్యాల మడతలు వచ్చును. వాటిని AB మరియు CD లుగా గుర్తించండి. అపుడు CD పూర్తిగా ABలో కలిసిపోయి కనిపిస్తుంది. (లేదా సర్వ సమానాలుగా) చిత్రం 12.26లో చూపిన విధంగా ఉంటుంది. దీనిని బట్టి సమాన జ్యాలు సర్వసమాన చాపాలను ఏర్పరుచును మరియు విపర్యయంగా సర్వసమాన చాపాలు వృత్తంలో సమాన జ్యాలను ఏర్పరుచును అని చెప్పవచ్చునని నిరూపించుదాం.

**ఒక వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానాలు అయితే, అందులో ఏర్పడు చాపాలు సర్వసమానాలు మరియు విపర్యయంగా, ఒకవేళరెండు చాపాలు సర్వసమానాలు అయిన ఆ వృత్తంలో ఏర్పడే జ్యాలు కూడా సమానాలు.**

©KTBS
Not to be republished

అదే విధంగా వృత్తచాపం ఏర్పరచే కోణం యొక్క మధ్య బిందువు వద్ద రెండు జ్యాలు ఖండించుకొను బిందువు వద్ద ఏర్పడే ప్రాంతం ఆ వృత్తం యొక్క మధ్యబిందువు అగును. అల్పచాపం ఏర్పరచే కోణం మరియు అధిక చాపం ఏర్పరచేకోణం దాని ప్రతిబింబం అగును అందుచేత పటం 12.27 నుండి అల్పచాపం PQ, O వద్ద ఏర్పరిచేకోణం $\angle POQ$ మరియు అధిక కోణ చాపము O వద్ద ఏర్పరిచే చాపం PQ అనేది $\angle POQ$ కోణం యొక్క ప్రతిబింబం.



చిత్రం 12.27

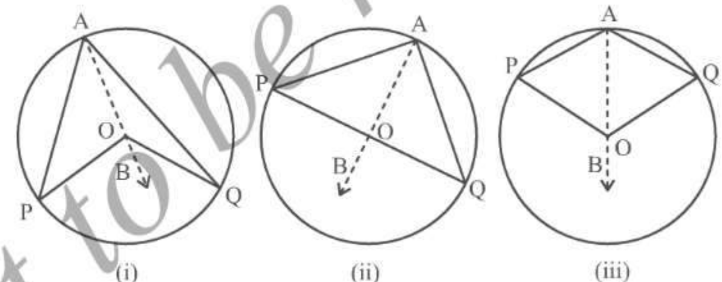
సిద్దాంతం 12.1 నుండి పైన చెప్పబడిన అంశాలు సత్యము.

**ఒక వృత్తములోని సర్వసమాన చాపాలు ఆ వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచే కోణాలు సమానాలు.**

అందువలన, వృత్తంలో జ్యాల ద్వారా ఏర్పడే కోణం యొక్క మధ్య బిందువు గుండా వెళ్ళే అనురూప జ్యాల యొక్క కోణం సమానం. ఈ సిద్దాంతం వృత్త కేంద్రంవద్ద వృత్త చాపం ఏర్పరచే కోణం మరియు అది వృత్తంలోని ఒక బిందువు.

**సిద్ధాంతం 12.8: ఒక చాపము వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణం, ఆ చాపం మిగిలిన వృత్తం పై ఏదైనా బిందువు వద్ద ఏర్పరచే కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది.**

**సాధన :** 'O' అనునది వృత్త కేంద్రం, చాపము PQ కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచుకోణం $\angle POQ$, $\angle PAQ$ అనునది మిగిలిన వృత్తం మీద ఏదేని ఒక బిందువు అయిన $\angle POQ = 2\angle PAQ$ అని నిరూపించాలి.



చిత్రం 12.28

ఇక్కడ (i) PQ ఒక అల్పచాపం, (ii) PQ ఒక అర్ధ వృత్తం మరియు (iii) PQ ఒక అధిక చాపం అయ్యే మూడు సందర్భాలు కలవు.

A బిందువును 'O' కలిపి B బిందువు దాక పొడిగించడం ద్వారా నిరూపణను మొదలు పెడదాం (అన్ని సందర్భాలలోనూ)

$\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$

Not to be republished ©KTBS

బాహ్యకోణం అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానం.

$\Delta OAQ$ లో

$OA = OQ$ ................ (ఒకే వృత్త వ్యాసార్ధాలు)

అందువలన, $\angle OAQ = \angle OQA$ ................ (సిద్ధాంతం 5.5)

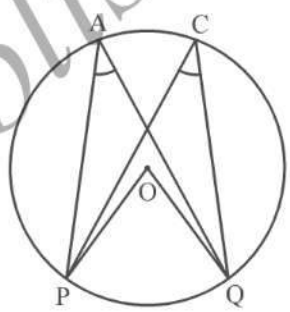
దీని నుండి, $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ ................ (1)

అదే విధంగా $\angle BOP = 2\angle OAP$ ................ (2)

1 మరియు 2 నుండి $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

ఇదేవిధంగా $\angle POQ = 2\angle PAQ$ ................ (3)

సందర్భం (iii) లో PQ అధికచాపం (3) ను మళ్ళు పెట్టిన ప్రతిబింబ కోణం $\angle POQ = 2\angle PAQ$



చిత్రం 12.29

**గమనిక :** ఒక వేళ P మరియు Q బిందువులను కలిపిన PQ యొక్క జ్యాలు ప్రక్క చిత్రంలోచూపిన విధంగా ఉంటాయి. $\angle PAQ$ ను PAQP ల కోణఖండన బిందువులు అంటారు.

సిద్ధాంతం 12.8లో A అనేది వృత్తం పై ఏదైనా ఒక బిందువు. C మరొక బిందువు అదే వృత్తంపై అనుకుంటే చిత్రం (12.29)నుండి.

$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$

**కావున :** $\angle PCQ = \angle PAQ$

అని నిరూపించవచ్చును.

**సిద్ధాంతం 12.9 : వృత్తంలోని కోణ సమద్విఖండన రేఖలు సమానం.**

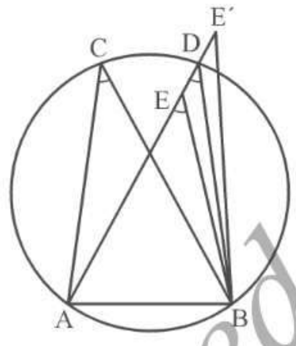
కోణాన్ని ఈ సందర్భం (ii) లో చర్చిద్దాం. సిద్ధాంతం 12.8లో ప్రత్యేకంగా $\angle PAQ$ కోణ సమద్వి ఖం డన చేయగా అది అర్ధవృత్తం అగును.

అందులో $\angle PAQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$ అర్ధవృత్తం పై మరో ఏదైనా ఒక బిందువు C అనుకుంటే $\angle PCQ = 90°$ మరలా వచ్చును.

**అందుచేత వృత్తంలోని అంశాలను బట్టి.**

అర్ధ వృత్తంలోని కోణం ఒక లంబకోణం అని చెప్పవచ్చు.

©KTBS Not to be republished



చిత్రం 12.30

**సిద్ధాంతం 12.10:** రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం (ఆ రేఖా ఖండానికి ఒకే వైపుగల) ఏవైనా వేర్వేరు బిందువుల వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు సమానం అయితే ఆ నాలుగు బిందువులు ఒకే వృత్తంపై ఉంటాయి. (అంటే అవి చక్రీయాలు అవుతాయి).

ఈ ఫలితం యొక్క సత్యవిలువను కిందివిధంగా పరిశీలించవచ్చు. చిత్రం 12.30 నుండి. AB ఒక రేఖా ఖండం AB నకు ఒకే వైపుగల బిందువుల C మరియు D ల వద్ద AB చేయు కోణాలు,

$\underline{|ACB} = \underline{|ADB}$

A,B,C మరియు D లు ఒకే వృత్తంపైన బిందువులు అయిన. ఒకవేళ D గుండా వృత్తం వెళ్ళకపోతే. AD ని ఒక చోట ఖండిస్తాయి. (లేదా AD ని పొడిగించగా) దానిని E బిందువుగా గుర్తిద్దాం! (లేదా E').

ఒక వేళ A,C,E మరియు B లు ఒకే వృత్తం పై బిందువులు అయితే

$\underline{|ACB} = \underline{|AEB}$ (ఎందుకు?)

కాని $\underline{|ACB} = \underline{|ADB}$ (అని ఈయబడినది)

కాబట్టి $\underline{|AEB} = \underline{|ADB}$

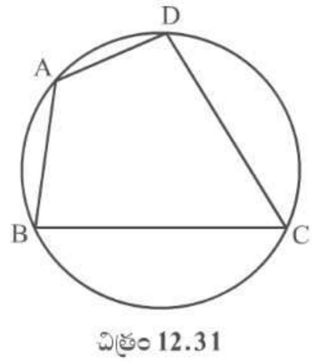
ఇది E మరియు D లు ఏకీభవిస్తే తప్ప సాధ్యం కాదు. (ఎందువలన ?)

కావున E కూడా D తో ఏకీభవిస్తుంది.

అదే విధంగా E' కూడా D తో ఏకీభవిస్తుంది.

## 12.8 చక్రీయ చతుర్భుజం

చిత్రం 12.31లో చతుర్భుజ శీర్షాలు A,B,C మరియు D లు ఒకే వృత్తం పైగలవు. ఇటువంటి చతుర్భుజంABCD ను చక్రీయ చతుర్భుజం అంటాం. ఇటువంటి చతుర్భుజాలు ABCD లను నాల్గింటిని గీచి, చతుర్భుజ కోణాలను కొలిచి పట్టికను నింపండి.



చిత్రం 12.31

©KTBS Not to be republished

| క్రమ సంఖ్య (చక్రీయ చతుర్భుజాలు) | $\angle A$ | $\angle B$ | $\angle C$ | $\angle D$ | $\angle A + \angle C$ | $\angle B + \angle D$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

ఈ పట్టిక నుండి నీవు ఏమి చెప్పగలవు?

$\angle A + \angle C = 180^\circ$ మరియు $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ను సాధించండి. కొలతలలో దోషాలను వదిలివేయగా క్రింది వాటిని సాధించండి.

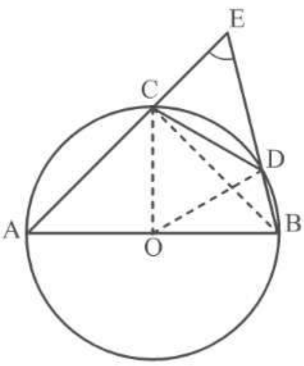
**సిద్ధాంతం 12.11 : ఒక చతుర్భుజంలో ఏ రెండు ఎదుటికోణాల మొత్తం అయినా 180° అయితే, అది చక్రీయ చతుర్భుజం.**

**దీని విపర్యయం కూడా ఎల్లప్పుడూ సత్యమే**

**సిద్ధాంతం 12.12 : ఒక చతుర్భుజంలో ఏ రెండు ఎదుటి కోణాల మొత్తం 180° అయితే, ఆ చతుర్భుజం ఒక చక్రీయం.**

ఈ సిద్ధాంతంను సాధంచడానికి సిద్ధాంతం 12.10లో ఉన్న సాధన ఉపయోగపడుతుంది.

**ఉదాహరణ 3:** చిత్రం 12.32 లో AB వృత్త వ్యాసం. CD ఆ వృత్త జ్యా మరియు వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానం. AC మరియు BD లను పొడిగించిన ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. ఆ బిందువు E. అయితే $\angle AED = 60^\circ$ అని నిరూపించండి.



చిత్రం 12.32

**సాధన :** OC, OD మరియు BC లను కలుపగా.

$\Delta ODC$ ఒక సమబాహు త్రిభుజం (ఎందుకు?)

కాబట్టి $\angle COD = 60^\circ$

ఇప్పుడు : $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (సిద్ధాంతం 12.8)

©KTBS Not to be republished

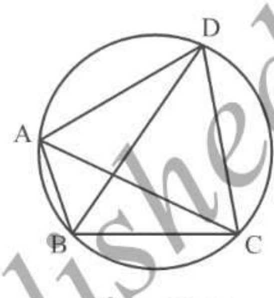
దాని నుండి $\angle CBD = 30^\circ$

అదే విధంగా $\angle ACB = 90^\circ$ (ఎందుకు?)

కావున $\angle BCE = 180^\circ - \angle ACB = 90^\circ$

దీని నుండి $\angle CEB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ కావున $\angle AEB = 60^\circ$

**ఉదాహరణ 4:** చిత్రం 12.33లో ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం AC మరియు BD లు వాటి కర్ణాలు.అయిన $\angle DBC = 55^\circ$, మరియు $\angle BAC = 45^\circ$, $\angle BCD$ ఎంత?.



చిత్రం 12.33

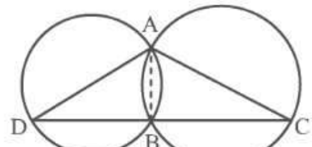
**సాధన :** $\angle CAD = \angle DBC = 55^\circ$ (ఒకే రేఖా ఖండంలోని కోణాలు)

కాబట్టి $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC = 55^\circ + 45^\circ = 100^\circ$

కానీ $\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$ (చక్రీయ చతుర్భుజంలోని ఎదుటి కోణాలు)

కావున $\angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

**ఉదాహరణ 5 :** రెండు వృత్తాలు రెండు వేర్వేరు బిందువులు A మరియు B ల వద్ద ఒక దానిని ఒకటి ఖండించుకొనిన. AD మరియు AC లు ఆ రెండు వృత్తాల వ్యాసాలు. (చిత్రం 12.34లో చూడండి). B గుండా గీయబడిన రేఖ DC ని ఖండించును అని ఋజువుచేయండి.



చిత్రం 12.34

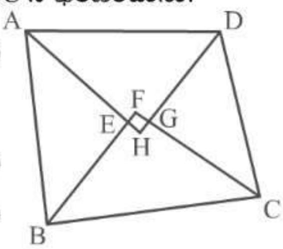
**సాధన :** AB లను కలిపిన

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABD = 90^\circ \\ \angle ABC = 90^\circ\end{array}\right\}$$ అర్ధవృత్తంలోని కోణం

కావున $\angle ABD + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

కాబట్టి DBC ఒక సరళ రేఖ అగును. ఈ B సరళ రేఖ అనునది DC ని ఖండించును.

**ఉదాహరణ 6 :** ఒక చతుర్భుజంలోని అంతర్గతకోణాలు ఖండించుకొనిన అక్కడ ఏర్పడేది ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం అని నిరూపించండి.



చిత్రం 12.35

**సాధన :** పటం 12.35 లో ABCD ఒక చతుర్భుజం మరియు AH, BF, CF మరియు DH లు కోణ సమద్విఖండన బిందువుల అంతర్గతంగా ఖండించుకొనిన $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ లు దానిలోని EFGH చతుర్భుజం అగును.

©KTBS Not to be republished

ఇప్పుడు $\angle FEH = \angle AEB = 180° - (\angle EAB - \angle EBA)$ (ఎందుకు?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

మరియు $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (ఎందుకు?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

కాబట్టి,

$$\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D)$$

$$= 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

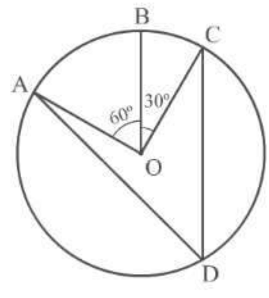
$$= 360° - 180° = 180°$$

సిద్ధాంతం 12.12 నుండి చతుర్భుజంలో EFGH చక్రీయం.

©KTBS Not to be republished

## అభ్యాసం 12.5

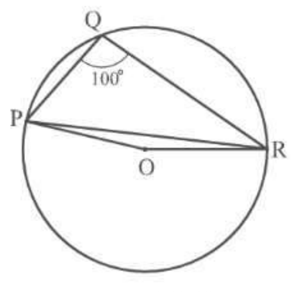
1. చిత్రం 12.36 నుండి A,B మరియు C లు వృత్తం పై ఏవైనా మూడు బిందువులు O వృత్తం కేంద్రం. అయిన $\angle BOC = 30°$ మరియు $\angle AOB = 60°$ మిగిలిన వృత్త చాపం పై ABC కి మరొక వైపున బిందువు D అనుకుంటే $\angle ADC$ ని కనుక్కోండి.



చిత్రం 12.36

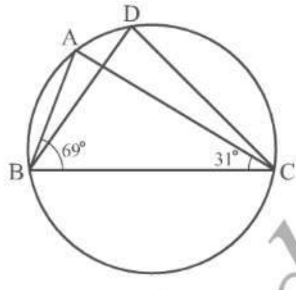
2. ఒక వృత్తం యొక్క జ్యా ఆ వృత్త వ్యాసార్ధానికి సమానం. అయిన వృత్తచాపం వద్ద ఈ రెండు ఖండించుకొనిన ఏర్పడుకోణం. అల్పచాపం మరియు ఖండన బిందువుం వద్ద ఏర్పచే చాపం అధికచాపం అని నిరూపించండి.

3. చిత్రం 12.37 నుండి $\angle PQR = 100°$ P,Q మరియు R లు వృత్తం పై ఏదైనా బిందువులు. 'O' వృత్త కేంద్రం అయిన $\angle OPR$ ను కనుగొనండి.



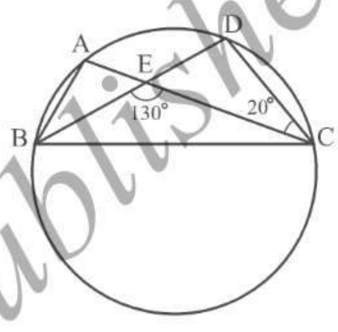
చిత్రం 12.37

4. చిత్రం 12.38లో $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$ అయిన $\angle BDC$ ఎంత?




చిత్రం 12.38

5. చిత్రం12.39 లో A,B,C మరియు D లు వృత్తంపై ఏవేని నాలుగు బిందువులు. AC మరియు BD లను పొడిగించిన ఒక బిందువు వద్ద అది ఖండించుకొనును. ఆ ఖండన బిందువు E అయిన $\angle BEC = 130°$ మరియు $\angle ECD = 20°$ అప్పుడు. $\angle BAC$ ఎంత?



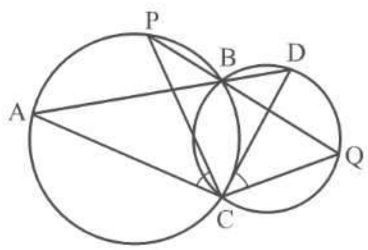

చిత్రం 12.39

6. ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం అయిన అందులోని కర్ణాలు E బిందువు వద్ద ఖండించుకొనిన, $\angle DBC = 70°$, $\angle BAC = 30°$ అయిన $\angle BCD$ ని కనుక్కోండి. ఒకవేళ AB = BC అయిన $\angle ECD$ ని కనుక్కోండి.

7. చక్రీయ చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు వృత్తం యొక్క వ్యాసాలు ఒకటే అయిన ఆ చతుర్భుజ శీర్షాల ద్వారా ఏర్పడునది ఒక చతురస్రం అని నిరూపించండి.

8. సమాంతర కాని భుజాలతో ఏర్పడిన ఒకే ట్రెపీజియం అది చక్రీయం అని నిరూపించండి.

9. రెండు వేర్వేరు వృత్తాలు రెండు వేర్వేరు బిందువులు B మరియు C ల వద్ద ఖండించుకొనిన B గుండా ఒక రేఖాఖండంను పొడిగించిన ఆ బిందువు A, D అగును. అపుడు ABD మరియు PBQ లు వృత్తంపై A,D,P ల వద్ద ఖండించుకొనిన. Q పరంగా పటంలో 12.40 నుండి $\angle ACP = \angle QCD$ అని నిరూపించండి.




చిత్రం 12.40

©KTBS Not to be republished

10. త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలను వృత్తం యొక్క వ్యాసంగా గీచిన, ఆ మూడవ భుజం వృత్తంలోని మిగిలిన రెండు వ్యాసాలతో ఖండించును అని చూపండి.

11. $\Delta ABC$ మరియు $\Delta ADC$ లు రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు అయిన వాటి ఉమ్మడికర్ణాలు AC అయిన $\underline{|CAD} = \underline{|CBD}$ అని నిరూపించండి.

12. సమాంతర చక్రీయ చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘ చతురస్రం అని నిరూపించండి.

## అభ్యాసం 12.6 (ఐచ్ఛికం)[1]

1. రెండు వృత్తాలు ఖండించుకొనుచున్న వాటిగుండా ఒక సరళరేఖను గీచిన ఖండించిన బిందువుల వద్ద రెండు వృత్తాలపై చేసే కోణం రెండు బిందువుల వద్ద సమానంగా ఉంటుంది అని నిరూపించండి.

2. వృత్త కేంద్రంనుండి సమాంతరంగా రెండు వైపుల గీయబడిన AB మరియు CD లు జ్యాలు వాటి పొడవులు వరుసగా 5cm మరియు 11cm AB మరియు CD ల మధ్య దూరం 6cm అయిన ఆవృత్త వ్యాసార్ధంను కనుక్కోండి?

3. ఒక వృత్తంలోని రెండు సమాంతర జ్యాల పొడవులు వరుసగా 6cm మరియు 8cm కేంద్రం నుంది ఉపజ్యాకు గలదూరం 4cm అయిన కేంద్రంనుండి రెండవ జ్యాకుగల మధ్యదూరం ఎంత?

4. ఒక వృత్తానికి ABC కోణశీర్షాలు బాహ్యంగావున్నాయి మరియు వృత్తంలోని జ్యాలు AD మరియు CE లు వాటిని ఖండించును. అయితే $\underline{|ABC}$ ల యొక్కకోణం AC మరియు DE లు ఖండించుకొనగా వృత్తంలో ఏర్పడే కోణానికి సగం ఉంటుంది అని నిరూపించండి.

5. ఒక వృత్తాన్ని, రాంబస్ యొక్క ఏదైనా ఒక భుజం పొడవు ఆవృత్త వ్యాసంతో సమానంగా వుండేలా నిర్మించిన వాటిశీర్షాల గుండా ఖండన బిందువు పోవును అని నిరూపించండి.

6. ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. ఒక వృత్తం ఈ A,B, మరియు C ల గుండా పోయిన CD వృత్తాన్ని E వద్ద ఖండించును. అయిన AE = AD అని నిరూపించండి.

7. AC మరియు BD లు ఒక వృత్త వ్యాసాలు మరియు ఇవి ఒక దానిని కొకటి ఖండించుకొనునని,
    1. AC మరియు BD లు వ్యాసార్ధాలు.
    2. ABCD ఒక దీర్ఘచతురస్రం అని నిరూపించండి.

1. పరీక్ష దృష్టిలో ఈ అభ్యాసంలేదు

©KTBS Not to be republished

8. $\Delta$ ABC యొక్క కోణ సమద్వి ఖండన రేఖలు A, B మరియు C లు అయిన అవి పరివృత్త కేంద్రాలు. వృత్తం పై D,E మరియు F లు అగును $\Delta$ DEF లేదా $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$ మరియు $90° - \frac{1}{2}C$ అని నిరూపించండి.

9. రెండు సర్వసమాన వృత్తాలు A మరియు B బిందువుల వద్ద ఒకదనికొకటి ఖండించుకొనిన. A ను పొడిగించిన ఏదేని రేఖాఖండం PAQ ఏర్పడును Q నుండి సరళరేఖను గీచిన 2 రెండు వృత్తాలను ఖండించుకొనునట్లు వెళ్ళును అయిన BP = BQ అని చూపండి.

10. ఏదైనా ఒక $\Delta$ ABC లో కోణ సమద్వి ఖండన బిందువు |A మరియు BC కి లంబంగా వుండేలాగీచిన ఆ $\Delta$ ABC పరివృత్త త్రిభుజం అగును అని చూపండి.

## 12.9 సారాంశం

**ఈ అధ్యాయంలో మనం కింది అంశాలు నేర్చుకున్నాం**

1. వృత్తం అనేది ఒక తలంలోని అనేక బిందువుల సముదాయం ఆ బిందువులు సమాన దూరంలో ఉంటాయి.
2. వృత్తంలోని సమాన జ్యాలు ఖండించుకొనిన కేంద్రం వద్ద ఏర్పడుకోణాలు సమానం.
3. వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు ఖండించుకొనగా, వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పడిన కోణాలు సమానాలు అలాగే వ్యాసాలు సమానాలు.
4. వృత్తంలోని లంబం వృత్త జ్యాలను సమద్విఖండన చేయును.
5. ఒక వృత్త కేంద్రం నుండి గీచిన సరళ రేఖ ఆవృత్త వ్యాసాన్ని సమద్వి ఖంఢన చేయును మరియు వ్యాసానికి లంబంగా వుండును.
6. ఏవైనా 3 సరేఖీయం కాని బిందువుల గుండా కేవలం ఒకే ఒక వృత్తాన్ని గీయగలం.
7. ఒక వృత్తంలోని సమాన జ్యాలు ఆ వృత్త కేంద్రానికి సమాన దూరంలో వుంటాయి.
8. వృత్త కేంద్రంనుండి సమాన దూరంలో గీచిన జ్యాలు సమానాలు.
9. ఒక వృత్తంలోని రెండు చాపాలు సర్వసమానాలు అయిన వాటి వ్యాసాలు కూడా సమానాలు మరియు విపర్యయంగా వృత్తంలోని రెండు జ్యాలు సమానాలు అయిన వాటి (అల్ప, అధిక) చాపాలు సర్వసమానాలు.

©KTBS Not to be republished

10. ఒక వృత్తంలోని సర్వసమాన చాపాలు ఖండించు కొనిన వృత్త కేంద్రంవద్ద చేసే కోణం సమానం.

11. వృత్తచాపం వద్ద చేసేకోణం వృత్తంలో మిగిలిన చాపం యొక్క కోణం ఏ బిందువునద్ద నైనా చేసే కోణానికి రెట్టింపు ఉంటుంది.

12. వృత్తంలోని కోణ సమద్వి ఖండన రేఖలు చేసేకోణాలు సమానం.

13. అర్ధవృత్తంలోని కోణం లంబకోణం.

14. ఒక రేఖా ఖండం రెండు బిందువులను కలిపి ఆ బిందువుల వద్ద చేసే కోణంతో సమాన కోణం గల మరొక రెండు బిందువులను కలుపగా ఏర్పడే రేఖాఖండాలు బిందువులు నాలుగు కూడా వృత్తం పై వుంటాయి.

15. ఒకచక్రీయచతుర్భుజంలోని ఒకజతఅంతరకోణాలమొత్తంలేదాఎదురెదురుకోణాలమొత్తం కూడా 180°.

16. చతుర్భుజంలోని ఒక జత ఎదురెదురు కోణాల మొత్తం 180° అయిన అది చక్రీయ చతుర్భుజం.

©KTBS
Not to be republished

అధ్యాయం-13

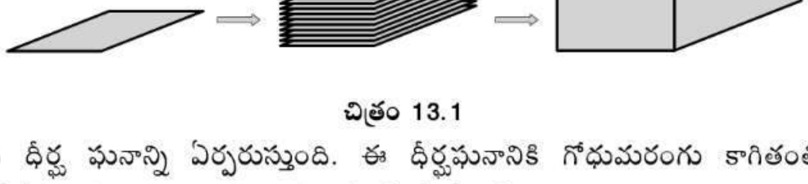
# ఉపరితల వైశాల్యాలు మరియు ఘనపరిమాణాలు

## 13.1 పరిచయం

మనం సాధారణంగా ఎక్కడ చూసినా ఘన పదార్థాలు కనబడుతాయి. మనం ఇప్పటి వరకు అన్ని నోటుపుస్తకంలో లేదా నల్లబల్ల మీద సులభంగా గీయగలిగిన చిత్రాల గురించి మాత్రమే చదివాం. వీటిని సమతలాకృతులు అని అంటాం. మనకిదివరకే చతురస్రం, దీర్ఘ చతురస్రం మరియు వృత్తాల గురించి తెలుసు. వీటి చుట్టుకొలతలు మరియు వైశాల్యాల అర్థం మరియు వాటిని మనం కనుగొనాలని మనకు తెలుసు. వీటి గురించి మనం మన వెనుకటి తరగతులలో చదివాం. ఒక వేళ మనం కార్డుబోర్డులో ఒకే ఆకారం మరియు కొలతల చాలాసంఖ్యలో లంబంగా సమతలాకృతులను కత్తరించండి. ఒక దానిపై మరొకటి పేర్చినప్పుడు ఏమి ఏర్పడుతుంది అని కుతూహలం ఏర్పడుతుంది. ఈ విధమైన ప్రక్రియ నుండి మనకు దీర్ఘఘనం, సిలిండర్ మొదలగు ఘనాకృతులను పొందుతాం. మీరు మీ వెనుకటి తరగతులలో ధీర్ఘఘనం, ఘనం మరియు సిలిండర్ల ఉపరి వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణాలు ఎలా కనుగొనాలో నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు మీరు ధీర్ఘఘనం మరియు సిలిండర్ల ఉపరితల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణాలను ఎలా కనుగొనాలో నేర్చుకున్నారు. ఇప్పుడు మీరు ధీర్ఘఘనం మరియు సిలిండర్ల ఉపరితల వైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణాలను కనుగొనడాన్ని వివరంగా నేర్చుకుందాం. వీటిని ఇతర ఘనాకృతులైన శంఖువు మరియు గోళాలకు విస్తరించి చదువుదాం.

## 13.2 ధీర్ఘఘనం మరియు ఘనపు ఉపరితల వైశాల్యం

మీరు చాలా మందపు కాగితాలుగల అట్టను చూశారా? అదెలా కనబడుతుంది. అది చిత్రం 13.1 లో ఉన్నట్లు మీకు చూడడానికి కనిపిస్తోందా?

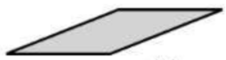


చిత్రం 13.1

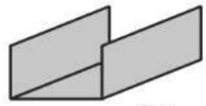
ఇది ధీర్ఘ ఘనాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. ఈ ధీర్ఘఘనానికి గోధుమరంగు కాగితంతో దీనికి కప్పడానికి ఎన్ని కాగితాలు కావాలి? అని ఇప్పుడు మనం చూద్దాం.

©KTBS Not to be republished

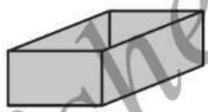
ఇప్పుడు మనకు ముందుగా కాగితపు అట్ట కింది భాగం పూరించడానికి దీర్ఘచతురస్రాకార గోధుమరంగు కాగితం కావాలి దీనిని చిత్రం 13.2 (a) లో చూపడమైంది.


(a)

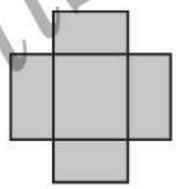
తరువాత మనకు రెండు వైపుల కప్పడానికి రెండు పొడవైన దీర్ఘచతురస్రాకార గోధుమ రంగు కాగితంకావాలి. అది చిత్రం 13.2 (b) లో చూపినట్లు కనబడుతుంది.


(b)

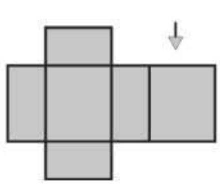
ఇప్పుడు మనకు తరువాతి చుట్టు వెనుక భాగాన్ని కప్పడానికి వేరే కొలతగల ఇంకా రెండు దీర్ఘచతురస్రాకార గోధుమ రంగు కాగితాలు కావాలి. ఇప్పుడు మనకు అది చిత్రం 13.2 (c) లో చూపినట్లు కనబడుతుంది.


(c)

ఈ చిత్రాన్ని మనం తుదిని కత్తరించి వదిలి తెరచినప్పుడు అది చిత్రం 13.2 (d) లో చూపినట్లు కనబడుతుంది.

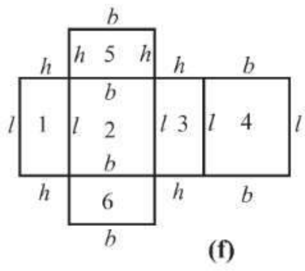

(d)

చివరిగా కాగితపు అట్ట పైభాగాన్ని కప్పడానికి మనకు కిందవేసిన దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితం కొలత కల్గిన మరొక దీర్ఘచతురస్రాకార గోధుమ రంగు కాగితం కావాలి. దానిని మనం కుడిభాగంలో అమర్చినచో, అది చిత్రం 13.2 (e) లో ఉన్నట్లు చూపుతుంది.


(e)

మనకు ఇప్పటి వరకు దీర్ఘఘనపు బయటి వైపును కప్పడానికి ఆరు దీర్ఘచతురస్రాకార గోధుమ రంగు కాగితాలు అవసరమయ్యాయి.

ఇది మనకు దీర్ఘ ఘనపు వెలుపలి ఉపరితలం ఆరు దీర్ఘచతురస్రాకారాలలో చేశామని చూపుతుంది. (వాస్తవంగా ఈ దీర్ఘచతురస్రాకార వలయాన్ని / ప్రదేశాలను దీర్ఘఘనపు ముఖాలు అని పిలుస్తారు.) వీటి వైశాల్యాన్ని పొడవు మరియు వెడల్పులను వేర్వేరుగా గుణించి మరియు ఈ ఆరు వైశాల్యాలను కూడడం ద్వారా కనుగొనవచ్చు.



(f)

చిత్రం 13.2

©KTBS Not to be republished

మనం ఇప్పుడు ధీర్ఘఘనపు పొపవును $l$ అని వెడల్పును '$b$' అని, ఎత్తును $h$ అని తీసుకుందాం తరువాత ఈ కొలతలు పొందిన చిత్రం 13.2 (f) లోచూపినట్లుగా చూడటానికి కనిపిస్తుంది.

అందువలన ఆరు ధీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యం మొత్తం:

ధీర్ఘచతురస్రం 1 వైశాల్యం $(= l \times h)$

$+$

ధీర్ఘచతురస్రం 2 వైశాల్యం $(= l \times b)$

$+$

ధీర్ఘచతురస్రం 3 వైశాల్యం$(= l \times h)$

$+$

ధీర్ఘచతురస్రం 4 వైశాల్యం $(= l \times b)$

$+$

ధీర్ఘచతురస్రం 5 వైశాల్యర $(= b \times h)$

$+$

ధీర్ఘచతురస్రం 6 వైశాల్యం$(= b \times h)$.

$= 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h)$

$= 2\ (lb + bh + hl)$

అది మనకు ఇచ్చేదేమనగా,

**ధీర్ఘఘనం ఉపరితల వైశాల్యం**= $2\ (\boldsymbol{lb} + \boldsymbol{bh} + \boldsymbol{hl})$

ఇక్కడ $l$, $b$ మరియు $h$ లు ధీర్ఘఘనం అంచులు.

**సూచన** : వైశాల్యపు ప్రమాణాన్ని ఒక చదరపు మానం అని తీసుకుంటాం. ఎందుకనగా వలయం / ప్రదేశపు పరిమాణాన్ని మీరు ఒక చదరపు ప్రమాణం కల్గియున్న చతురస్రాన్ని నింపడం ద్వారా కొలుస్తాం.

ఉదాహరణకు మన దగ్గరగల ఒక ధీర్ఘఘనం పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా 15 cm, 10 cm మరియు 20 cm దాని ఉపరి వైశాల్యం,

$= 2\ [(15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)]\ cm^2$

$= 2\ [150 + 200 + 300]\ cm^2$

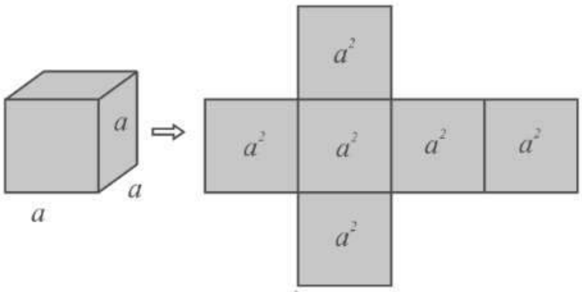
$= 2 \times 650\ cm^2 \quad = 1300\ cm^2$

ఒక ధీర్ఘఘనంలో పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు సమానమైతే దానిని ఘనం అని పిలుస్తాం. ఘనపు ఒక అంచు పొడవు $a$ అయితే , దాని ఉపరితల వైశాల్యం $2[a \times a + a \times a + a \times a] = 6a^2$ [చిత్రం 13.3 చూడండి]. చిత్రం నుండి మనకు తెలియునది,

©KTBS Not to be republished

| ఘనం ఉపరితల వైశాల్యం $= 6a^2$ |
| --- |

ఇక్కడ a అనునది ఘనపు అంచు.

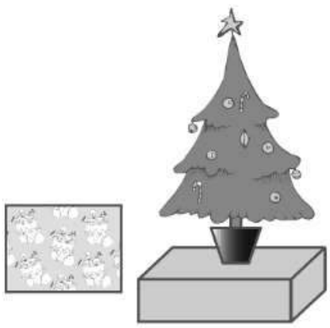



చిత్రం 13.3

ఒకవేళ ధీర్ఘ ఘనపు ఆరు ముఖాలకు బదులుగా పై మరియు కింది భాగాల ముఖాలను వదిలి మనం కేవలం 4 ముఖాల వైశాల్యాన్ని కనుగొందాం. ఇలాంటి ప్రకరణలలో నాలుగు ముఖాల వైశాల్యాన్ని ధీర్ఘఘనపు పార్శ్వ ఇపరితల వైశాల్యం అని పిలుస్తాం. పొడవు $l$, వెడల్పు $b$ మరియు ఎత్తు $h$ అయిన ధీర్ఘ ఘనపు పార్శ్వ ఉపరితల వైశాల్యం $2lh + 2bh$ లేదా $2(l + b)h$ కు సమానం. అదే విధంగా '$a$' భుజం కల్గిన ఘనపు పార్శ్వఉపరితల వైశాల్యం $4a^2$ సమానం.

పై వాటిని దృష్టిలో పెట్టుకుని ధీర్ఘఘనం లేదా ఘనపు ఉపరితల వైశాల్యాన్ని కొన్ని సార్లు పూర్తి * ఉపరితల వైశాల్యం అని చెప్పబడుతుంది ఇప్పుడు మనం కొన్ని సమస్యలు సాధిద్దాం.

**ఉదాహరణ 1** : మేరి క్రిస్మస్ వృక్షాన్ని అలంకరించాలని కోరుకుంది. అమె శాంతాక్లాజ్ చిత్రం ఉన్న రంగు కాగితాన్ని ఒక కొయ్య పెట్టెకు కప్పండి. దానిపైన వృక్షాన్ని పెట్టడానికి ఉంచింది [చిత్రం 13.4 చూడండి].



చిత్రం 13.4

ఈ ప్రక్రియకొరకు ఆమె కొనవలసిన కప్పే కాగితపు సరైన సంఖ్యను తెలుసుకోవాల్సి ఉంది. పెట్టె పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా. 80 cm, 40 cm మరియు 20 cm అయితే ఆమెకు 40 cm భుజం కల్గిన ఎన్ని చతురస్రాకార కాగితాలు కావాలి?

**సాధన** : మేరి పెట్టె వెలుపలి భాగపు ఉపరితలానికి కాగితం అంటించాల్సి ఉంది. కావలసిన కాగితం పరిమాణం ధీర్ఘఘనాకృతి ఆకారపు పెట్టె ఉపరితల వైశాల్యానికి సమానం ఈ పెట్టె కొలతలు పొడవు = 80 cm, వెడల్పు = 40 cm, ఎత్తు = 20 cm

పెట్టె ఉపరితల వైశాల్యం $= 2[lb + bh + hl]$

$$= 2\,[(80 \times 40) + (40 \times 20) + (20 \times 80)]\ \text{cm}^2$$

©KTBS Not to be republished

$= 2\ [3200 + 800 + 1600]\ cm^2$
$= 2 \times 5600\ cm^2 = 11200\ cm^2$

ప్రతి కాగితం వైశాల్యం $= 40 \times 40\ cm^2$

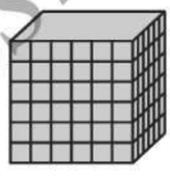
$= 1600\ cm^2$

అందువలన కావలసిన కాగితాలు = $\dfrac{\text{పెట్టె ఉపరితల వైశాల్యం}}{\text{ప్రతి కాగితం వైశాల్యం}}$

$= \dfrac{11200}{1600} = 7$

ఆమెకు కావలసిన కాగితాలు = 7

**ఉదాహరణ 2 :** హమీద్ తన ఇంటికొరకు 1.5 m అంచు కల్గిన ఘనాకృతిగల ఆకారపు నీటి తొట్టిని మూతతో మూసిఉంటాడు. ట్యాంక్ (తొట్టి) అడుగుభాగం వదిలి అతడు 25 cm అంచుకల్గిన చతురస్రాకార టైల్స్ (పలకలు) ట్యాంక్ ఉపరితలం కప్పడానికి తేవాల్సి ఉంది. [చిత్రం 13.5 చూడండి] ఒక డజన్ టైల్స్‌కు ₹ 360 అయితే, అతడు టైల్స్‌కు చేసిన ఖర్చు ఎంత ?


చిత్రం 13.5

**సాధన** : హమీద్ నీటి ట్యాంకుకు ఐదు ముఖాలకు టైల్స్ వేయడానికి కొనవలసిన టైల్స్ నిర్ణయించడానికి అతడు ట్యాంక్ ఉపరితల వైశాల్యం తెలుసుకోవలిసి ఉంది.

ఘనాకార ట్యాంక్ అంచు పొడవు $= a = 1.5\ m = 150\ cm$

ఉపరితల వైశాల్యం $= 5 \times 150 \times 150\ cm^2$

ప్రతి టైల్ వైశాల్యం = భుజం × భుజం $= 25 \times 25\ cm^2$

అందువలన కావలసిన టైల్స్ = $\dfrac{\text{ట్యాంక్ ఉపరితల వైశాల్యం}}{\text{ప్రతి టైల్స్ వైశాల్యం}}$

$= \dfrac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$

ఒక డజను టైల్స్ వెల = ₹ 360

అనగా 12 టైల్స్ వెల = ₹ $\dfrac{360}{12}$ = ₹ 30

అలాగయితే 180 టైల్స్ వెల = 180 × ₹ 30 = ₹ 5400

### అభ్యాసం 13.1

1. 1.5m పొడవు, 1.25m వెడల్పు మరియు 65 cm లోతుగల ఒక ప్లాస్టిక్‌పెట్టె చేయాల్సిఉంది. దాని పైభాగం తెరువబడిఉంది. ప్లాస్టిక్ రేకు (షీటు) మందం గుర్తించండి.

© KTBS Not to be republished

(i) పెట్టె తయారు చేయడానికి కావలసిన ప్లాస్టిక్ షీటు వైశాల్యం.

(ii) 1 $m^2$ ప్లాస్టిక్ షీటుకు ₹ 20 చొప్పున, షీటుకు ఇవ్వవలసిన డబ్బును కనుగొనండి.

2. ఒక గది పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు వరుసగా 5m, 4m మరియు 3m గది గోడలకు మరియు పైకప్పు (ceiling) లోపలి ఉపరితలానికి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 7.50 చొప్పున సున్నం పూయడానికి అగు ఖర్చు కనుగొనండి.

3 దీర్ఘ చతురస్రాకారంలోగల సభాభవనం నేల చుట్టు కొలత 250m సభాభవనం నాలుగు గోడలను ప్రతి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 10 చొప్పున రంగులు వేయడానికి అయ్యే ఖర్చు ₹ 15000 అయితే, సభాభవనం ఎత్తు కనుగొనండి.

(**సూచన:** నాలుగు గోడల వైశాల్యం = పార్శ్వ ఉపరితల వైశాల్యం)

4. ఒక డబ్బాలో గల రంగు 9.375 $m^2$ వైశాల్యానికి రంగు పూయడానికి సరిపోతుంది. ఈ డబ్బులోగల రంగు నుండి 22.5 cm × 10 cm × 7.5 cm కొలతలుగా ఎన్ని ఇటుకలకు రంగు వేయవచ్చు?

5. ఒక ఘనాకృతిగల పెట్టె యొక్క ప్రతి అంచు 10 cm మరియు మరొక దీర్ఘఘనాకృతి పెట్టె 12.5 cm పొడవు, 10 cm వెడల్పు మరియు 8cm ఎత్తు ఉంది.

(i) వాటిలో ఏ పెట్టె ఎక్కువ పార్శ్వ ఉపరితల వైశాల్యం కల్గియుంది. మరియు ఎంత ఎక్కువగా ఉంది?

(ii) వాటిలో ఏ పెట్టె తక్కువ పార్శ్వ ఉపరితల వైశాల్యం కల్గియుంది. అలాగే ఎంత తక్కువ ఉంది?

6. ఒక చిన్న ఇండోర్ సస్యసేకతరణాలయం(మూలికలగది)(herbarium) అడుగుభాగంతో పాటు సంపూర్ణంగా గాజు ఫలకలతో టేపుతో అంటించి చేయబడింది. అది 30 cm పొడవు, 25 cm వెడల్పు మరియు 25 cm ఎత్తు ఉంది

(i) గాజు ఫలకల వైశాల్యం ఎంత?

(ii) అన్ని 12 అంచులకు కావలసిన టేపు ఎంత?

7. శాంతి మిఠాయి దుకాణం వారు తీపు పదార్థాలను కట్టడానికి కార్డ్ బోర్డు డబ్బాను చేయడానికి చెప్పారు. వారికి రెండు కొలతల డబ్బాలు కావాలి. అందులో పెద్ద డబ్బా కొలత 25cm × 20 cm × 5 cm మరియు చిన్న డబ్బా కొలత 15 cm × 12 cm × 5 cm వాటిని మడిచి డబ్బా చేయడానికి డబ్బా పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం 5% ఎక్కువ కార్డ్‌బోర్డ్ అంచులు కావాలి. కార్డ్‌బోర్డ్ వెల ప్రతి 1000 $cm^2$ కు ₹ 4 అయితే, ప్రతి రకం 250 డబ్బాలను పూర్తిచేయడానికి కావలసిన కార్డ్ బోర్డ్ వెలను కనుగొనండి.

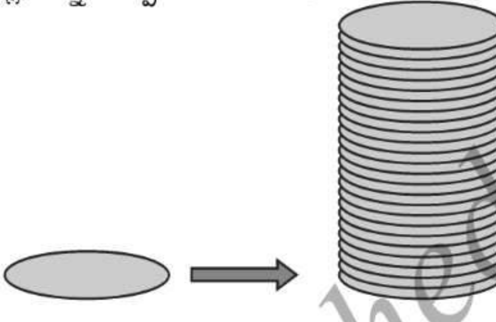
8. పర్వీన్ ఆమె కారు నిలపడానికి ఒక తాత్కాలిక ఆశ్రయం (Shelter) చేయాల్సి ఉంది. ఇది కారు యొక్క నాలుగు భాగాలు మరియు పైభాగాన్ని మూసే రీతిలో టార్పాలిన్ తో పెట్టె ఆకారంలో చేయబడింది. (ముందుభాగాన్ని చుట్టుతూ పైకి ఎత్తునట్లు చేశారు). దాని కుట్టే

©KTBS Not to be republished

అంచు చాలా చిన్నది. అనుకొని దానిని గణనకు తీసుకిబడింది. ఆశ్రయం ఎత్తు 2.5 m దాని పొడవు కొలత 4 m × 3 m ఉండునట్లు, ఎన్ని టార్పాలిన్‌లు కావాలి?

### 13.3 వృత్తాకార సిలిండర్ ఉపరితల వైశాల్యం

కాగితంతో తయారుచేసిన వృత్తాకార కాగితాలను తీసుకుందాం. వాటిని ఒకదానిపై ఒకటి ముందుగా దీర్ఘ చతురస్రాకార కాగితాలను అమర్చినట్లు అమర్చుదాం. మనకు ఏమి లభిస్తుంది? (చిత్రం 13.6 చూడండి)



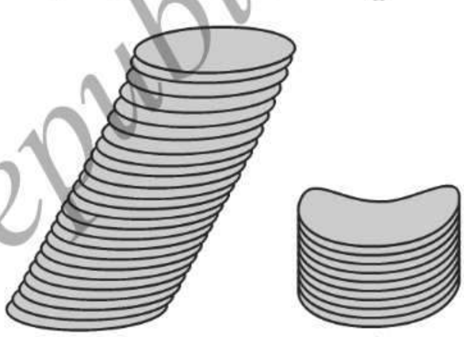
చిత్రం 13.6

ఇక్కడ మనం ఒకదాని మీద మరొకటి లంబంగా పేర్చినచో ఏర్పడు ఆకృతిని నిటారు సిలిండర్ అని పిలుస్తాం. ఎందుకనగా పాదం వృత్తాకారంలో మరియు వాటిని పాదానికి లంబకోణంలో పెట్టిబడినవి.

ఇప్పుడు మనం ఏ రకం సిలిండర్ వృత్త పాదం నేరు(నిటారు) సిలిండర్ కాదని చూద్దాం.

చిత్రం 13.7లో మీరు ఒక విధమైన వృత్తపాదం సిలిండర్ చూస్తున్నారు. అయితే, ఇది పాదానికి లంబకోణంలో లేదు. అందువలన మనం దానిని వృత్తపాద నిటారు(నేరు) సిలిండర్ అని పిలువరాదు.

మీ దగ్గర వృత్తాకారంలోని పాదం కల్గిన సిలిండర్ ఉన్నచో, చిత్రం 13.7(b) లో చూపినట్లుగా ఖచ్చితంగా మీరు దానిని వృత్తాకార నిటారు సిలిండర్ అని పిలువరాదు.



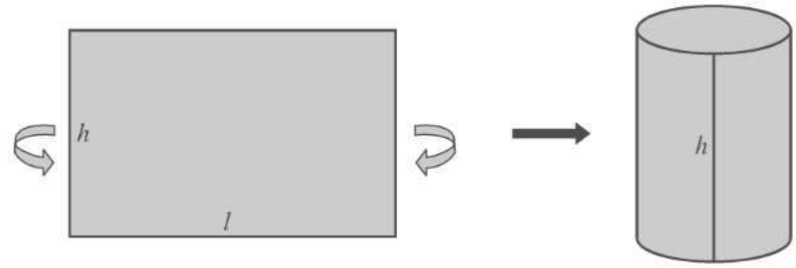
(a) (b)

చిత్రం 13.7

**గమనించండి :** గమనించండి : ఇక్కడ మనం కేవలం వృత్తపాద నిటారు(నేరు) సిలిండర్ గురించి చర్చిస్తున్నాం. అందువలన చెప్పాలే మినహా సిలిండర్ అని తెలుసుకోవాలి.

ఇప్పుడు సిలిండర్‌ను రంగుకాగితంతో కప్పాల్సి ఉంది. దీనిని మనం తక్కువ వైశాల్యపు కాగితం ఉపయోగించి చేయడం ఎలా? ముందుగా దీర్ఘ చతురస్రాకార కాగితాన్ని తీసుకోండి. దాని పొడవు సిలిండర్ చుట్టడానికి ఒకసారి చుట్టూ వచ్చునట్లు మరియు దాని వెడల్పు సిలిండర్ ఎత్తుకు చిత్రం 13.8 లో చూపినట్లుగా సమానంగా ఉండాలి .

©KTBS Not to be republished




చిత్రం 13.8

కాగితం వైశాల్యం సిలిండర్ యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యాన్ని ఇస్తుంది. కాగితం పొడవు సిలిండర్ యొక్క వృత్తాకార పాదం పరిధికి సమానంగా ఉంటుంది. అది $2\pi r$ కు సమానం.

అందువలన సిలిండర్ యొక్క వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం =

= పొడవు x వెడల్పు

= సిలిండర్ పాదపు వృత్త పరిధి x h

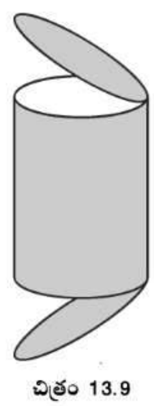
$= 2\pi r \times h$

అందువలన, **సిలిండర్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం = $2\pi rh$**

ఇందులో r సిలిండర్ పాదపు వ్యాసార్థం మరియు h సిలిండర్ ఎత్తు.

**గమనించండి** : సిలిండర్‌కు సంబంధించి వేరే ఏదో చెప్పాడు. తప్పు సిలిండర్ వ్యాసార్థం అనగా సిలిండర్ పాదపు వ్యాసార్థం. అని అర్థం.

సిలిండర్ యొక్క పైభాగం మరియు కిందిభాగాన్ని కూడా పొందవలసివుంది. మనకు $r$ వ్యాసార్థంగల ఇంకా రెండు వృత్తాలు (ఖచ్చితంగా వృత్తాకార ప్రదేశం కావాలి. ప్రతి వృత్త వైశాల్యం $\pi r^2$ ఉంటుంది. (చిత్రం 13.9 గమనించండి) దీనివలన మనకు పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$ లభిస్తుంది.



అందువలన, **సిలిండర్ పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం = $2\pi r(r + h)$**

ఇక్కడ r సిలిండర్ యొక్క పాదపు వ్యాసార్థం మరియు h సిలిండర్ ఎత్తు

చిత్రం 13.9

**గమనించండి** : మీరు మొదటి అధ్యాయం నుండి $\pi$ ఒక భాగలబ్ద సంఖ్య అనే దానిని గుర్తించుకోండి అందువలన $\pi$ విలువ అంత్యం చెందని పునరావర్తనం కాని దశాంశ సంఖ్య

అయితే, మనం మన లెక్కలో దాని విలువన సుమారుగా $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14 గా తీసు కుంటాం.

**ఉదాహరణ 3** : సావిత్రి విజ్ఞాన యోజన (Project) కొరకు సిలిండర్ ఆకారపు వివిద చిత్ర దర్శక (Kaleidoscope) నమూనా చేయవలసి ఉంది. ఆమె చార్టు కాగితాన్ని కెలిడో స్కోప్ వక్ర ఉపరితల

©KTBS Not to be republished

వైశాల్యంగా ఉపయోగిస్తుంది.(చిత్రం 13.10 చూడండి). ఆమె కెలిడొస్కోప్ పొడవు 25 cm మరియు దాని వ్యాసార్థం 3.5 cm ఉండునట్లు చేయడానికి ఆమెకు కావలసిన చార్టు కాగితం వైశాల్యం ఎంత? మీరు $\pi = \frac{22}{7}$ అని తీసుకోండి.

**సాధన** : సిలిండరాకారపు కెలిడోస్కోప్ పాదవు వ్యాసార్థం $r = 3.5$ cm

కెలిడోస్కోప్ ఎత్తు (పొడవు) $h = 25$ cm

కావలసిన చార్టు కాగితం వైశాల్యం = కెలిడోస్కోప్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25 \text{cm}^2$

$= 550 \text{ cm}^2$

చిత్రం 13.10

## అభ్యాసం 13.2

($\pi$ కు ఇతర విలువ ఇవ్వనిచో $\pi = \frac{22}{7}$ అని ఊహించుకోండి(భావించుకోండి.)

1. వృత్తపాద లంబ సిలిండర్ ఎత్తు 14 cm మరియు దాని వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం 88 $\text{cm}^2$ సిలిండర్ పాదపు వ్యాసం కనుగొనండి.
2. లోహకు రేకుతో 1m ఎత్తు మరియు 140 cm వ్యాసం ఉండునట్లు ఒక మూసిన సిలిండరాకార నీటి తొట్టిని చేయాల్సి ఉంది. దీనికొరకు కావలసిన లోహపు రేకును చదరపు మీటర్లలో తెల్పండి.
3. లోహపు గొట్టము 77 cm పొడవు ఉంది. దాని లోపలి వ్యాసం 4 cm, బయటి వ్యాసం 4.4 cm అయితే. (చిత్రం 13.11 చూడండి) దాని
   (i) లోపలి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం
   (ii) బయటి వక్ర ఉపరితల వైశాల్యర
   (iii) పూర్తి ఉపరితల వైశాల్యం కనుగొనండి.

చిత్రం 13.11

4. ఒక రోలర్ వ్యాసం 84 cm మరియు దాని పొడవు 120 cm ఉంది. ఆట మైదానం మీద ఒక సారి చుట్టిన తలం చేయడానికి అది 500 పూర్తి చుట్లు తీసుకుంటుంది. ఆట మైదానం వైశాల్యాన్ని చదరపు మీటర్లలో కనుగొనండి.
5. సిలిండరాకార స్థూపం వ్యాసం 50 cm మరియు దాని ఎత్తు 3.5 m స్థూలం వక్ర ఉపరితల వైశాల్యానికి చదరపు మీటర్‌కు ₹ 12.50 దర చొప్పున రంగువేయడానికి అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.
6. వృత్తాకార లంబ(నిటారు) సిలిండర్ వక్ర ఉపరితల వైశాల్యం 4.4 $\text{m}^2$ సిలిండర్ పాదపు

©KTBS Not to be republished