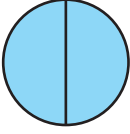




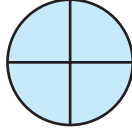
चला, चर्चा करूया.

समप्रमाण (Direct proportion)

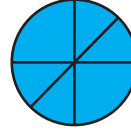
आपण मागील इयत्तेत दोन संख्यांची तुलना करून ती गुणोत्तराच्या रूपात कशी लिहितात ते पाहिले आहे. उदा. आता खालील चित्र पाहा. येथे वर्तुळात दाखवलेल्या व्यासांमुळे वर्तुळाचे झालेले भाग दाखवले आहेत.



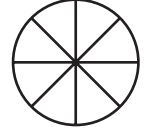
(A)



(B)



(C)



(D)

येथे व्यासांची संख्या व तयार होणाऱ्या वर्तुळाच्या भागांची संख्या यांचा काही संबंध दिसून येतो का ?

- आकृती (A) मध्ये एका व्यासामुळे वर्तुळाचे भाग झाले आहेत.
- आकृती (B) मध्ये दोन व्यासांमुळे वर्तुळाचे भाग झाले आहेत.
- आकृती (D) मध्ये चार व्यासांमुळे वर्तुळाचे भाग झाले आहेत.

$\frac{\text{व्यासांची संख्या}}{\text{भागांची संख्या}} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ येथे व्यासांची संख्या व त्यामुळे झालेल्या भागांची संख्या यांचे गुणोत्तर स्थिर आहे.

उदा. नगरपालिकेच्या शाळेतील विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या वह्यांची संख्या खालील सारणीत दाखवली आहे.

मुले	15	12	10	5
वह्या	90	72	60	30

$$\frac{\text{मुलांची संख्या}}{\text{वह्यांची संख्या}} = \frac{15}{90} = \frac{12}{72} = \frac{10}{60} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

म्हणजेच हे गुणोत्तर 1:6 असे स्थिर किंवा कायम (constant) आहे.

वरील दोन्ही उदाहरणांत असे दिसते की, व्यासांची संख्या वाढली तर वर्तुळातील भागांची संख्या वाढते. विद्यार्थ्यांची संख्या कमी झाली तर वह्यांची संख्या देखील कमी होते. व्यासांची संख्या व वर्तुळ भागांची संख्या या समप्रमाणात आहेत तसेच विद्यार्थी संख्या व वह्यांची संख्या समप्रमाणात आहेत.

उपक्रम : * मोटार सायकलमध्ये भरलेले पेट्रोल आणि तिने कापलेले अंतर हे समप्रमाणात असते का ? विचार करा.

* विज्ञानातील व दैनंदिन व्यवहारातील सम प्रमाणात बदलणाऱ्या संख्यांची उदाहरणे देता येतील का ? त्याची चर्चा करा.

उदा. 10 पेनांची किंमत 60 रुपये असेल तर, अशा 13 पेनांची किंमत किती रुपये ?

उकल : 13 पेनांची किंमत काढायची आहे. ती x रुपये होईल असे मानू.

पेनांची संख्या व त्यांची किंमत समप्रमाणात

$$\frac{10}{60} = \frac{13}{x}$$

असल्यामुळे त्यांचे गुणोत्तर मांडून समीकरण मिळवू.

$$\therefore 10x = 780 \text{ (दोन्ही बाजूंना 60x ने गुणले)}$$

$$x = 78$$

13 पेनांची किंमत 78 रुपये आहे.

सरावसंच 37

1. 7 किग्रॅ कांदे 140 रुपयांना तर 12 किग्रॅ कांदे किती रुपयांना मिळतील ?
2. 600 रुपयांमध्ये 15 पेंढ्या कडबा मिळतो, तर 1280 रुपयांमध्ये किती पेंढ्या कडबा मिळेल ?
3. रोज 13 किग्रॅ 500 ग्रॅम पूरक खुराक 9 गाईंना पुरतो, त्याच प्रमाणात 12 गाईंना किती खुराक लागेल ?
4. 12 क्विंटल सोयाबीनला 36,000 रुपये पडतात, तर 8 क्विंटल सोयाबीनची किंमत किती ?
5. दोन मोबाइलची किंमत 16,000 रुपये आहे असे 13 मोबाइल खरेदी केले, तर एकूण किती रुपये लागतील ?



व्यस्तप्रमाण (Inverse proportion)



वृक्षारोपण करण्यासाठी 90 खड्डे खणायचे आहेत. त्यासाठी काही स्वयंसेवक जमले आहेत. एक स्वयंसेवक रोज एक खड्डा खणतो.

15 स्वयंसेवकांना ते खड्डे खणायला $\frac{90}{15} = 6$ दिवस लागतील.

10 स्वयंसेवकांना ते खड्डे खणायला $\frac{90}{10} = 9$ दिवस लागतील.

स्वयंसेवकांची संख्या व खड्डे खणण्यासाठी लागणारे दिवस हे समप्रमाणात आहेत का ?

स्वयंसेवकांची संख्या **कमी झाली** की लागणारे दिवस **वाढतात** याउलट स्वयंसेवकांची संख्या वाढली तर कामाचे दिवस कमी होतात. स्वयंसेवक व दिवस यांच्या संख्यांचा गुणाकार स्थिर आहे. या संख्या व्यस्त प्रमाणात आहेत असे म्हणतात.

उदा. समजा सुधाला एका संग्रहातील 48 उदाहरणे सोडवायची आहेत. तिने रोज 1 उदाहरण केले तर तिला

संग्रह पूर्ण करण्यास 48 दिवस लागतील. तिने रोज 8 उदाहरणे सोडवली तर, संग्रह पूर्ण करण्यास तिला

$$\frac{48}{8} = 6 \text{ दिवस लागतात. ती रोज 12 उदाहरणे करत असेल तर तिला } \frac{48}{12} = 4 \text{ दिवस लागतील.}$$

रोज सोडवलेली उदाहरणे व लागणारे दिवस व्यस्त प्रमाणात आहेत. त्यांचा गुणाकार स्थिर आहे.

$$8 \times 6 = 12 \times 4 = 48 \times 1 \text{ हे लक्षात घ्या.}$$

उदा. एक मोठी भिंत बांधायला 15 मजुरांना 8 तास लागतात; तर 12 मजुरांना तेच काम करायला किती तास लागतील ?

उकल : मजुरांची संख्या वाढली की कामाचे तास कमी होतात.

मजुरांची संख्या व त्यांना लागणारा वेळ यांचे प्रमाण व्यस्त आहे.

मजुरांची संख्या व भिंत बांधायला लागणारे तास यांचा गुणाकार स्थिर आहे.

आता x या चलाचा वापर करून हे उदाहरण सोडवू.

$$12 \text{ मजुरांना } x \text{ तास लागतात असे मानू.} \quad 12 \times x = 15 \times 8$$

$$15 \text{ मजुरांना 8 तास लागतात.} \quad \therefore 12x = 120$$

$$12 \text{ मजुरांना } x \text{ तास लागतात.} \quad \therefore x = 10$$

यावरून 12 मजुरांना भिंत बांधायला 10 तास लागतील.

उदा. वर्गामध्ये 40 पानी हस्तलिखित अंक तयार करण्याचे काम चालू केले. एका विद्यार्थ्याला हा अंक तयार करायला 80 दिवस लागतात, तर 4 विद्यार्थ्यांना अंक तयार करायला किती दिवस लागतील ?

उकल : एकच काम जास्त विद्यार्थी करत असतील तर कमी दिवस लागतील म्हणजे विद्यार्थी संख्या व दिवसांची संख्या यांचे प्रमाण व्यस्त आहे. चार विद्यार्थ्यांना x दिवस लागतात असे मानू.

विद्यार्थी	दिवस
1	80
4	x

$$4x = 80 \times 1$$

$$x = \frac{80}{4}$$

$$x = 20$$

$\therefore$ 4 विद्यार्थ्यांना 20 दिवस लागतील.

उदा. एका शाळेतील 7 वी चे विद्यार्थी सहलीसाठी एका शेतमळ्यामध्ये बसने गेले. त्या वेळी आलेले त्यांचे काही अनुभव पाहू. प्रत्येक अनुभवातील संख्या समप्रमाणात आहेत की व्यस्तप्रमाणात ते लिहा.

- सहलीसाठी प्रत्येक मुलाकडून खर्चासाठी 60 रुपये घेतले.

एकूण 45 विद्यार्थी होते म्हणून रुपये जमले.

जर 50 विद्यार्थी असते तर रुपये जमले असते.

विद्यार्थ्यांची संख्या व जमणारी वर्गणी हे प्रमाणात आहेत.

- शाळेजवळच्या मिठाईवाल्याने सहलीसाठी 90 लाडू दिले.

45 विद्यार्थी सहलीला आले तर प्रत्येकाला लाडू मिळाले.

30 विद्यार्थी सहलीला आले असते तर प्रत्येकाला लाडू मिळाले असते.

विद्यार्थ्यांची संख्या व प्रत्येकाला मिळणारे लाडू प्रमाणामध्ये आहेत.

- सहलीचे ठिकाण शाळेपासून 120 किमी होते.

शेतमळ्यात जाताना बसचा वेग ताशी 40 किमी होता म्हणून तास लागले.

परत येताना बसचा वेग ताशी 60 किमी होता म्हणून तास लागले.

बसचा वेग व लागणारा वेळ हे प्रमाणात आहेत.

- शेतकऱ्याने त्याच्या झाडांची बोरे जमा केली. ती 180 होती.
त्याने 45 विद्यार्थ्यांना ती समान वाटली. प्रत्येकाला बोरे मिळाली.
जर 60 विद्यार्थी असते तर प्रत्येकाला बोरे मिळाली असती.
विद्यार्थ्यांची संख्या व प्रत्येकाला मिळणारी बोरांची संख्या हे प्रमाणामध्ये आहेत.

सरावसंच 38

- एका शेताची खुरपणी पूर्ण करण्यास 5 मजुरांना 12 दिवस लागतात, तर 6 मजुरांना किती दिवस लागतील ? 15 मजुरांना किती दिवस लागतील ?
- मोहनरावांनी रोज 40 पाने याप्रमाणे एक पुस्तक वाचले, तर ते पुस्तक 10 दिवसांत वाचून पूर्ण होते. तेच पुस्तक 8 दिवसांत वाचून पूर्ण करायचे असल्यास दररोज किती पाने वाचावीत ?
- मेरीचा सायकल चालवण्याचा वेग ताशी 6 किमी आहे. ती 12 किमी अंतरावरील मावशीच्या घरी जाणार आहे, तर तिला किती वेळ लागेल ? तिच्या सायकलचा वेग ताशी 4 किमी झाला, तर तिला किती वेळ लागेल ?
- एका शासकीय गोदामातील धान्यसाठा 4000 माणसांना 30 दिवस पुरतो, तर तो धान्यसाठा 6000 माणसांना किती दिवस पुरेल ?



भागीदारी (Partnership)

एखादा व्यवसाय चालू करताना जागा, कच्ची सामग्री इत्यादींसाठी पैसे लागतात. त्या रकमेला भांडवल म्हणतात. अनेकदा दोन किंवा अधिक व्यक्ती मिळून भांडवल गोळा करतात. म्हणजेच त्या व्यक्ती भागीदारीत गुंतवणूक करून व्यवसाय सुरू करतात. भागीदारीच्या व्यवसायात बँकेमध्ये भागीदारांचे संयुक्त खाते असते. त्या व्यवसायासाठी भांडवलाची ज्या प्रमाणात गुंतवणूक असते त्या प्रमाणात व्यवसायात झालेला नफा किंवा तोटा याचे वाटप केले जाते.

उदा. झेलम व अथर्व यांनी अनुक्रमे 2100 व 2800 रुपये भांडवल घालून व्यवसाय चालू केला. त्यांना 3500 रुपये फायदा झाला. तो कसा वाटावा ?

उकल : भांडवलाचे प्रमाण काढू. $2100:2800$ म्हणजे $\frac{2100}{2800} = \frac{3}{4}$ म्हणून भांडवलाचे प्रमाण 3:4 आहे.

नफ्याचे वाटप भांडवलाच्या प्रमाणात करायचे आहे. झेलमचा नफा $3x$ व अथर्वचा नफा $4x$ मानू.

$$\therefore 3x + 4x = 3500 \quad \text{एकूण नफा 3500 आहे.}$$

$$\therefore 7x = 3500 \quad \therefore x = 500$$

झेलमला $3x = 1500$ रुपये व अथर्वला $4x = 2000$ रुपये नफा मिळेल.

उदा. एका व्यवसायात चिन्मय आणि सॅम यांनी 130000 रुपये भांडवल 3:2 या प्रमाणात गुंतवले तर प्रत्येकाची गुंतवणूक किती ? या व्यवसायात त्यांना 36000 रुपयांचा नफा झाला, तर प्रत्येकाचा नफा किती असेल ?

उकल : चिन्मय आणि सॅम यांच्या गुंतवणुकीचे प्रमाण 3:2 आहे.

गुंतवणुकीच्या प्रमाणात नफ्याची वाटणी होते म्हणून नफ्याचे प्रमाण 3:2 असेल.

चिन्मयची गुंतवणूक $3y$ व सॅमची गुंतवणूक $2y$ मानू.

$$3y + 2y = \text{एकूण गुंतवणूक}$$

$$\therefore 5y = 130000$$

$$\frac{5y}{5} = \frac{130000}{5} \dots\dots (5 \text{ ने भागून})$$

$$\therefore y = 26000$$

$$\therefore \text{चिन्मयची गुंतवणूक} = 3y$$

$$= 3 \times 26000$$

$$= 78,000$$

$$\text{सॅमची गुंतवणूक} = 2y$$

$$= 2 \times 26000$$

$$= 52000$$

चिन्मयचा नफा $3x$ व सॅमचा नफा $2x$ मानू.

$$3x + 2x = \text{एकूण नफा}$$

$$5x = 36000$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{36000}{5} \dots\dots (5 \text{ ने भागून})$$

$$\therefore x = 7200$$

$$\therefore \text{चिन्मयचा नफा} = 3x$$

$$= 3 \times 7200$$

$$= 21600$$

$$\text{सॅमचा नफा} = 2x$$

$$= 2 \times 7200$$

$$= 14400$$

उदा. अब्दुल, सेजल व सोहम यांनी सायलीला 30 रुपये व 70 रुपये आणि 50 रुपये दिले. सायलीने त्यात 150 रुपये घालून कागद, रंग या वस्तू आणल्या. त्यापासून सर्वांनी भेटकार्डे बनवली व ती सर्व भेटकार्डे विकली. त्यांना एकूण 420 रुपये नफा मिळाला. तर प्रत्येकाला किती नफा मिळाला ?

उकल : चौघांचे मिळून एकूण भांडवल 300 रुपये होते. त्यांपैकी सायलीचे 150 रुपये होते म्हणजे निम्मे भांडवल तिचे होते. त्यांना एकूण 420 रुपये नफा मिळाला. सायलीचा नफा 420 ची निमपट म्हणजे 210 रुपये झाला. उरलेला 210 रुपये नफा अब्दुल, सेजल व सोहम यांना वाटला.

अब्दुल, सेजल व सोहम यांचे भांडवल अनुक्रमे 30 रुपये व 70 रुपये आणि 50 रुपये आहे.

भांडवलाचे प्रमाण 30:70:50 आहे. म्हणजेच 3:7:5 आहे. तिघांचा नफा 210 रुपये आहे.

त्यांचा नफा अनुक्रमे $3k$, $7k$, $5k$ मानू. $3k + 7k + 5k = 210$

$$\therefore 15k = 210$$

$$\therefore k = 14$$

म्हणजे अब्दुलचा नफा $= 3k = 3 \times 14 = 42$ रुपये

सेजलचा नफा $= 7k = 7 \times 14 = 98$ रुपये, सोहमचा नफा $= 5k = 5 \times 14 = 70$ रुपये

उदा. सरिताबेन, आयेशा आणि मीनाक्षी यांनी प्रत्येकी 2400, 5200 व 3400 रुपये गुंतवून व्यवसाय चालू केला. त्यांना 50% नफा झाला. तो त्यांनी कसा वाटून घ्यावा ? तो काढून न घेता पुढच्या वर्षाच्या व्यवसायासाठी भांडवलात मिळवला, तर प्रत्येकीची पुढच्या वर्षासाठी भागीदारी किती असेल ?

उकल : एकूण भांडवल $= 2400 + 5200 + 3400 = 11000$ रुपये

या भांडवलावर 50% नफा झाला.

$$\therefore \text{एकूण नफा} = \frac{11000 \times 50}{100} = 5500$$

भांडवलाच्या प्रमाणात नफा वाटायचा आहे.

आपण दोन संख्यांचे प्रमाण दोन्ही संख्यांना सामाईक विभाजकाने भागून सोपे करून घेतो. त्याचप्रमाणे दोनपेक्षा अधिक संख्यांचे प्रमाण सोपे करता येते.

$$\begin{aligned}\text{भागीदारीचे प्रमाण} &= 2400 : 5200 : 3400 \\ &= 24 : 52 : 34 && (100 \text{ ने भागून}) \\ &= 12 : 26 : 17 && (2 \text{ ने भागून})\end{aligned}$$

सरिताबेनचा नफा = 12p, आयेशाचा नफा = 26p, मीनाक्षीचा नफा = 17p मानू.

$$\therefore 12p + 26p + 17p = 55p = 5500 \therefore p = \frac{5500}{55} = 100$$

$$\therefore \text{सरिताबेनचा नफा} = 12 \times 100 = 1200, \text{ आयेशाचा नफा} = 26 \times 100 = 2600 \text{ व}$$

$$\text{मीनाक्षीचा नफा} = 17 \times 100 = 1700,$$

नफा काढून न घेता तो भांडवलात मिळवला तर प्रत्येकीचे नवे भांडवल काढू.

$$\text{पुढच्या वर्षासाठी सरिताबेनचे भांडवल} = 2400 + 1200 = ₹ 3600$$

$$\text{पुढच्या वर्षासाठी आयेशाचे भांडवल} = 5200 + 2600 = ₹ 7800$$

$$\text{पुढच्या वर्षासाठी मीनाक्षीचे भांडवल} = 3400 + 1700 = ₹ 5100$$



चला, चर्चा करूया.

- वरील उदाहरणात सरिताबेन, आयेशा व मीनाक्षी यांतील प्रत्येकीने नफा काढून न घेता स्वतःच्या गुंतवणुकीत मिळवला, तर पुढच्या वर्षासाठी त्यांच्या गुंतवणुकीचे प्रमाण काढा.

सरावसंच 39

- सुरेश आणि रमेश यांनी 144000 रुपये 4:5 या प्रमाणात गुंतवून एक भूखंड खरेदी केला. काही वर्षांनी तो विकून त्यांना 20% नफा मिळाला, तर प्रत्येकाला किती नफा मिळाला ?
- विराट व सम्राट यांनी अनुक्रमे 50000 रुपये व 120000 रुपये गुंतवून व्यवसाय चालू केला. या व्यवसायात त्यांना 20% तोटा झाला. तर प्रत्येकाला किती तोटा झाला ?
- श्वेता, पियुष आणि नचिकेत या तिघांनी मिळून सोलापुरी चादर व टॉवेल विकण्याचा व्यवसाय 80000 रुपये गुंतवून सुरू केला. त्यांपैकी श्वेताचे भांडवल 30000 रुपये होते व पियुषचे भांडवल 12000 रुपये होते. त्यांना वर्षाखेरीस 24% नफा झाला, तर नचिकेतची भागीदारी किती होती ? नचिकेतला मिळालेल्या नफ्याची रक्कम किती ?
- अ व ब यांनी मिळालेला 24500 रुपये नफा 3:7 या प्रमाणात वाटून घेतला. प्रत्येकाने आपल्याला मिळालेल्या नफ्यापैकी 2% रक्कम सैनिक कल्याण निधीला दिली, तर प्रत्येकाने किती रक्कम निधीसाठी दिली ?
- जया, सीमा, निखिल आणि निलेश यांनी व्यवसायासाठी 3:4:7:6 या प्रमाणात 360000 रुपयांची भागीदारी केली. तर जयाचे भांडवल किती रुपये होते ? त्यांना या व्यवहारात 12% नफा झाला. तर निखिलच्या वाट्याला किती रुपये मिळतील ?

