4915CH04

باب 4

دو متغیر والی خطی مساواتیں
(LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES)

4.1 تعارف: (Introduction)

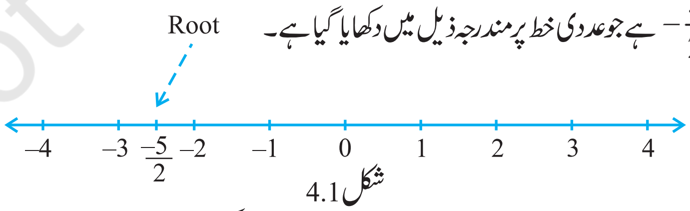
پچھلی جاعتوں میں آپ نے ایک متغیر والی خطی مساوات کے بارے میں پڑھا ہے۔کیا آپ ایک متغیر والی خطی مساوات لکھ سکتے ہیں؟ آپ کہہ سکتے ہیں کہ $x+1=0$ ، $x+\sqrt{2}=0$ اور $\sqrt{2}y+\sqrt{3}=0$ ایک متغیر والی خطی مساوات کی کچھ مثالیں ہیں۔آپ جانتے ہیں کہ ایسی مساواتوں کا صرف اور صرف ایک ہی حل ہوتا ہے۔آپ یہ بھی جانتے ہونگے کہ ان کے حل کو عددی خط پر کیسے ظاہر کیا جاتا ہے۔اس باب میں ہم ایک متغیر والی مساوات کے علم کو دہرائیں گے اور اس کی توسیع دو متغیر تک کریں گے۔آپ ان سوالات پر غور کر رہے ہونگے کہ کیا دو متغیر والی مساوات کا ایک حل ہوگا؟ اگر ہاں تو کیا یہ یکتا ہوگا؟ اور کارتیزی مستوی میں یہ حل کس طرح دیکھے گا؟ اسی طرح کے سوالوں کا جواب حاصل کرنے کے لئے آپ کو باب 3 میں پڑھے گئے تصورات کا استعمال بھی کرنا ہوگا۔

4.2 خطی مساواتیں (Linear Equations)

آیئے دہراتے ہیں کہ اب تک ہم نے کیا سیکھا ہے مندرجہ ذیل مساوات پر غور کیجئے۔

$$2x+5=0$$

اس کا حل $-\frac{5}{2}$ ہے جو عددی خط پر مندرجہ ذیل میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 4.1

کسی مساوات کو حل کرنے کے لئے آپ چند نقاط ہمیشہ اپنے ذہن میں رکھیں۔

خطی مساوات کے حل پر کوئی اثر نہیں ہوتا اگر

(i) اگر مساوات کے دونوں طرف ایک ہی عدد کو جمع (یا گھٹا) کریں۔

(ii) اگر مساوات کے دونوں طرف ایک ہی غیر صفر عدد سے ضرب اور تقسیم کریں تو

آیئے مندرجہ ذیل صورت حال پر غور کرتے ہیں

ایک یک روزہ کرکٹ میچ میں جو سری لنکا اور انڈیا کے درمیان ناگپور میں کھیلا گیا۔ ہندوستان کے دو بلے بازوں نے ایک ساتھ ساجھے داری میں 176 رن بنائے۔ اس اطلاع کو اب مساوات کی شکل میں ظاہر کریں۔

آپ یہاں دیکھتے ہیں دونوں میں سے کسی ایک کا بھی اسکور ہمیں نہیں معلوم یعنی یہاں دو نہ معلوم مقداریں ہیں۔ آیئے ان کو ظاہر کرنے کے لئے x اور y کا استعمال کرتے ہیں، مان لیجئے ایک بلے باز نے x رن بنائے اور دوسرے نے y رن ہم جانتے ہیں کہ $x + y = 176$ جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔

یہ دو متغیر والی ایک خطی مساوات کی مثال ہے۔ یہ رواج رہا ہے کہ اسی مساوات میں ہم متغیر کو x اور y سے ظاہر کرتے ہیں لیکن دوسرے حروف کا بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ دو متغیر والی کچھ اور مساواتوں کی مثالیں مندرجہ ذیل ہیں۔

$$1.2s + 3t = 5 \text{ ، } p + 4q = 7 \text{ ، } \pi u + 5v = 9 \text{ اور } 3 = \sqrt{2}x - 7y$$

نوٹ کیجئے کہ آپ ان سب مساواتوں کو $1.2s + 3t - 5 = 0$ ، $p + 4q - 7 = 0$ ، $\pi u + 5v - 9 = 0$ اور $\sqrt{2}x - 7y - 3 = 0$ شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔

اس طرح سے کوئی مساوات جو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں لکھی جا سکے جہاں a، b اور c حقیقی اعداد ہوں اور a اور b دونوں غیر صفر ہوں، دو متغیر والی خطی مساوات کہلاتی ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل ہر ایک مساوات کو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں لکھئے اور ہر ایک حالت میں a، b اور c کی قدر ظاہر کیجئے۔

$$(i)\ 2x + 3y = 4.37 \qquad (ii)\ x - 4 = \sqrt{3}y \qquad (iii)\ 4 = 5x - 3y \qquad (iv)\ 2x = y$$

حل: (i) $2x + 3y - 4.37 = 0$ کو ہم $(i)\ 2x + 3y - 4.37 = 0$ کی شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ یہاں $a = 2$ ، $b = 3$ اور $c = -4.37$

(ii) مساوات $x - 4 = \sqrt{3}y$ کو ہم $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔ یہاں $a = 1$ ، اور

$b = -\sqrt{3}$ اور $c = -4$ ہے۔

(iii) مساوات $4 = 5x - 3y$ کو ہم $5x - 3y - 4 = 0$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں. یہاں $a = s$ ، $b = -3$ اور $c = -4$ ہے، کیا آپ اس بات سے اتفاق کرتے ہیں کہ اس کو $-5x + 3y + 4 = 0$ بھی لکھا جاسکتا ہے ایسی حالت میں $a = -5$ ، $b = 3$ اور $c = 4$ ہوگا۔

(iv) مساوات $2x = y$ کو ہم $2x - y + 0 = 0$ لکھ سکتے ہیں، یہاں $a = 2$ ،$b = 3$ اور $c = 3$ ہے۔

اب $ax + b = 0$ کی طرح کی مساوات کو بھی دو متغیر والی خطی مساواتوں میں شامل کر سکتے ہیں جیسے $ax + 0.y + b$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر $4 - 3x = 0 = 0$ کو ہم $-3x + 0.y + 4 = 0$ بھی لکھ سکتے ہیں۔

مثال 2: مندرجہ ذیل ہر ایک کو دو متغیر والی مساوات میں لکھئے۔

$(i)\ x = -5 \qquad (ii)\ y = 2 \qquad (iii)\ 2x = 3 \qquad (iv)\ 5y = 2$

حل: (i) $x = -5$ کو ہم $1.x + 0.y = -5$ یا $1.x + 0.y + 5 = 0$ لکھ سکتے ہیں۔

(ii) $y = 2$ کو ہم $0.x + 1.y = 2$ یا $0.x + 1.y - 2 = 0$ لکھ سکتے ہیں۔

(iii) $2x = 3$ کو $2x + 0.y - 3 = 0$ لکھا جاسکتا ہے۔

(iv) $5y = 2$ کو $0.x + 5y - 2 = 0$ لکھا جاسکتا ہے۔

مشق 4.1

1. ایک کاپی کی قیمت ایک پین کی قیمت کی دگنی ہے، اس بیان کو ظاہر کرنے کے لئے ایک دو متغیر والی مساوات لکھیے (اشارہ:۔ایک کاپی کی قیمت x اور پین کی قیمت y لیجئے)۔

2. مندرجہ ذیل خطی مساواتوں کو $ax + by + c = 0$ کی شکل میں لکھئے اور ہر حالت میں a، b اور c کی قدروں کی نشاندہی کیجئے۔

(i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

(v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 خطی مساوات کا حل (Solution of a Linear Equation)

آپ دیکھ چکے ہیں کہ ایک متغیر والی ہر خطی مساوات کا یکتا حل ہوتا ہے، دومتغیر والی خطی مساوات کے حل کے بارے میں آپ کیا کہتے ہیں؟ کیونکہ یہاں مساوات میں دو متغیر ہیں اس کے حل کا مطلب ہے دو قدریں ایک x کے لئے اور ایک y کے لئے جو دیئے ہوئے مساوات کو مطمئن کرسکیں، آیئے مساوات $2x+3y=12$ پر غور کرتے ہیں۔

یہاں $x=3$ اور $y=2$ ایک حل ہے کیونکہ اگر آپ مساوات میں $x=3$ اور $y=2$ رکھیں تو آپ کو ملتا ہے

$$2x+3y=(2\times3)+(3\times2)=12$$

اس حل کو ہم مرتب جوڑے $(3,2)$ کی شکل میں لکھتے ہیں جس میں پہلی قدر x کی اور دوسری y کی ہوتی ہے۔ دوسری طرف $(1,4)$ مساوات $2x+2y=12$ کا حل نہیں ہے، کیونکہ مساوات میں $x=1$ اور $y=4$ رکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $2x+3y=14$. جو کہ 12 نہیں ہے۔ $(0,4)$ مساوات کا حل ہے۔ جبکہ $(4,0)$ نہیں ہے۔

اس طرح سے آپ نے مساوات $2x+3y=12$ کے کم سے کم دو حل دیکھے یعنی $(3,2)$ اور $(0,4)$ کیا آپ دوسرے حل بھی معلوم کرسکتے ہیں؟ کیا آپ اس سے اتفاق کریں گے کہ (6.0) اس کا ایک اور حل ہے؟ اس کی تصدیق کیجئے۔ درحقیقت مندرجہ ذیل طریقہ سے ہم اس کے لامحدود حل معلوم کرسکتے ہیں۔ x کی ایک کوئی سی بھی قدر چنیے (مان لیجیے $x=2$) اور اس کو مساوات $2x+3y=12$ میں رکھیے۔ تب مساوات ہوجائیگی $4+3y=12$ جو کہ ایک متغیر والی خطی مساوات ہے۔ اس کو حل کرنے پر آپ کو $y=\frac{8}{3}$ حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح سے $\left(2,\frac{8}{3}\right)$ مساوات $2x+3y=12$ کا ایک اور حل ہے۔ اس طرح سے $x=-5$ چنیے سے آپ پاتے ہیں مساوات $-10+3y=12$ ہو جاتا ہے جس سے ہمیں $y=\frac{22}{3}$ حاصل ہوتا ہے دو متغیر والی خطی مساوات کے مختلف حلوں کا کوئی آخر نہیں ہے یعنی دو متغیر والی خطی مساوات کے لامحدود حل ہوتے ہیں۔

مثال 3: مساوات $x+2y=6$ کے چار مختلف حل معلوم کیجئے۔

حل: جانچ کرنے سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ $x=2, y=2$ اس مساوات کا حل ہے کیونکہ $x+2y=2+4=6$ اس لئے اب $x=0$ لیتے ہیں x کی اس قدر کے لئے دی ہوئی مساوات $2y=6$ ہوجاتی ہے۔ جس کا ایک یکتا حل ہے $y=3$ اس لئے $x=0, y=3$ بھی مساوات $x+2y=6$ کا حل ہے۔ اسی طرح سے $y=0$ لینے پر دی ہوئی

مساوات $x = 6$ ہو جاتی ہے۔اس لیے $x = 6, y = 0$ مساوات $x + 2y = 6$ کا حل ہے۔آخر میں $y = 1$ لیتے ہیں۔دی ہوئی مساوات اب $x + 2 = 6$ ہو جاتی ہے۔جس کا حل ہے $x = 4$ اس لئے $(4,1)$ دی ہوئی مساوات کا حل ہے۔اس طرح سے دی ہوئی مساوات کے لامحدود حلوں میں سے چار حل مندرجہ ذیل ہیں۔

$(2,2), (0,3), (6,0)$ اور $(4,1)$

ریمارک: نوٹ کیجئے کہ ایک آسان حل معلوم کرنے کے لئے $x = 0$ لیجیے اور اس سے متعلق y کی قیمت معلوم کیجیے اسی طرح سے $y = 0$ رکھ کر اس سے متعلق x کی قیمت معلوم کیجیے۔

مثال 4: مندرجہ ذیل ہر ایک مساوات کے 2 حل معلوم کیجئے۔

$(i)\, 4x + 3y = 12 \qquad (ii)\, 2x + 5y = 0 \qquad (iii)\, 3y + 4 = 0$

حل: (i) $x = 0$ لینے پر ہمیں $3y = 12$ یعنی $y = 4$ حاصل ہوتا ہے اس لئے $(0, 4)$ دی ہوئی مساوات کا حل ہے۔

اسی طرح سے $y = 0$ رکھنے پر ہمیں $x = 6$ حاصل ہوتا ہے اس لئے $(6, 0)$ بھی اس مساوات کا حل ہے۔

(ii) $x = 0$ لینے پر $5y = 0$ یعنی $y = 0$ ہمیں حاصل ہوتا ہے یعنی $(0,0)$ دی ہوئی مساوات کا حل ہے اب آپ $y = 0$ لیں آپ کو دوبارہ $(0,0)$ حل کے طور پر ملے گا جو وہی ہے جو پہلے حاصل ہوا ہے ایک دوسرا حل معلوم کرنے کے لئے آپ $x = 1$ لیجیے اب آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ y کی متعلقہ قدر $\frac{-2}{5}$ ہے اس لئے $1 - \frac{2}{5}$ مساوات $2x + 5y = 0$ کا ایک دوسرا حل ہے۔

(iii) مساوات $3y + 4 = 0$ کو $0.x + 3y + 4 = 0$ لکھنے پر آپ پائیں گے کہ x کی ہر قیمت کے لئے $y = \frac{-4}{3}$ ہے، اس طرح سے اس کے دو حل ہیں $0 = \frac{-4}{3}$ اور $1 = \frac{-4}{3}$

مشق 4.2

1. مندرجہ ذیل میں کون سا بیان درست ہے اور کیوں؟

$y = 3x + 5$ کے (i) یکتا حل ہے (ii) صرف دو حل ہیں (iii) لامحدود حل ہیں۔

2. مندرجہ ذیل ہر ایک مساوات کے چار حل لکھیے۔

(i) $2x + y = 7$ (ii) $\pi x + y = 9$ (iii) $x = 4y$

3. جانچ کیجیے کے مندرجہ ذیل میں کونسے جوڑے مساوات $x-2y=4$ کے حل ہیں اور کونسے نہیں

(i) $(0,2)$ (ii) $(2,0)$ (iii) $(2,0)$ (iv) $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

(v) $(1,1)$

4. k کی قدر معلوم کیجیے اگر $x=2, y=1$ مساوات $2x+3y=k$ کے حل ہیں۔

4.4 دو متغیر والی خطی مساوات کا گراف

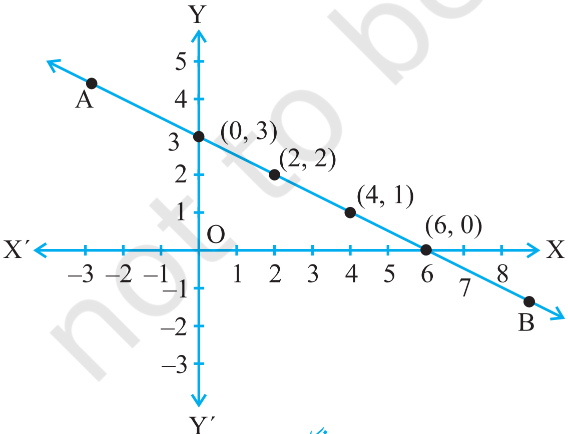
(Graph of linear Equation in two Variables)

ابھی تک آپ نے خطی مساوات کے حلوں کو الجبرے کے طریقہ سے حاصل کیا۔ آئیے اب ان کے جیومیٹریائی اظہار پر ایک نظر ڈالیں۔ آپ جانتے ہیں کہ ہر مساوات کے لامحدود حل ہوتے ہیں۔ ہم ان کو مختص مستوی میں کس طرح دکھائیں گے؟ جب ہم حلوں کو مرتب جوڑوں کی شکل میں لکھتے ہیں تو آپ کو اس سے کچھ اشارہ تو مل گیا ہوگا۔ مثال 3 میں خطی مساوات $x+2y=6$ کے کچھ حلوں کو جدول میں مندرجہ ذیل طریقہ سے اس طرح لکھتے ہیں کہ y کی قدر متعلقہ x کی قدر کے نیچے ہو۔

جدول 1

x	0	2	4	6	...
y	3	2	1	0	...

پچھلے سبق میں آپ پڑھ چکے ہیں کہ نقاط کو گراف پر کیسے پلاٹ کیا جاتا ہے۔ آئیے نقاط $(0,5)$, $(2,2)$, $(4,1)$ اور $(6,0)$ کو گراف پیپر پر پلاٹ کریں۔ آپ ان میں سے کسی بھی دو نقطوں کو ملائیے اور ایک خط حاصل کیجیے۔ اس خط کو AB نام دیجیے (شکل 4.2 دیکھئے)



شکل 4.2

کیا آپ دیکھتے ہیں کہ دوسرے نقطے بھی اسی خط AB پر واقع ہیں۔ آئیے اس خط پر سے ایک دوسرا نقطہ ہے $8, -1$ چنیے، کیا یہ مساوات کا حل ہے؟ درحقیقت $8+2(-1)=6$ اس لئے $8, -1$ ایک حل ہے۔ خط AB پر کوئی دوسرا نقطہ چنئے اور

تصدیق کیجئے کہ اس کے مختصات مساوات کو مطمئن کرتے ہیں یا نہیں اب ایسا نقطہ لیتے ہیں جو خط AB پر نہیں ہے مان لیجئے (2,0) کیا اس کے مختصات مساوات کو مطمئن کرتے ہیں؟ جانچ کیجئے اور دیکھئے کے یہ نہیں کرتے، اپنے مشاہدات کی فہرست بنائیے۔

1. ہر وہ نقطہ جو مساوات (1) کو مطمین کرتا ہے خط AB پر واقع ہے۔
2. خط AB پر ہر ایک نقطہ (a,b) مساوات (1) کا ایک حل x = a, y = b دیتا ہے۔
3. کوئی نقطہ جو خط AB پر نہیں ہے مساوات (1) کا حل نہیں ہے

اس طرح سے آپ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ خط پر موجود ہر نقطہ مساوات کے خط کو مطمین کرتا ہے اور مساوات کا ہر حل خط پر ایک نقطہ ہے۔ درحقیقت دو متغیر والی خطی مساوات کا جیومیٹریائی اظہار ایک خط ہوتا ہے جس کے نقاط مساوات کے حلوں کا مجموعہ ہے۔ یہ خطی مساوات کا گراف کہلاتا ہے۔ اس طرح سے دو متغیر والی خطی مساوات کا گراف حاصل کرنے کے لئے یہ کافی ہے کہ اس مساوات کے حلوں سے متعلق دو نقاط کو پلاٹ کریں اور ان کو ملا دیں، لیکن بہتر یہیں ہے کہ آپ ایسے دو سے زیادہ نقطہ لیں تاکہ آپ گراف کی درستگی کی جانچ کرسکیں۔

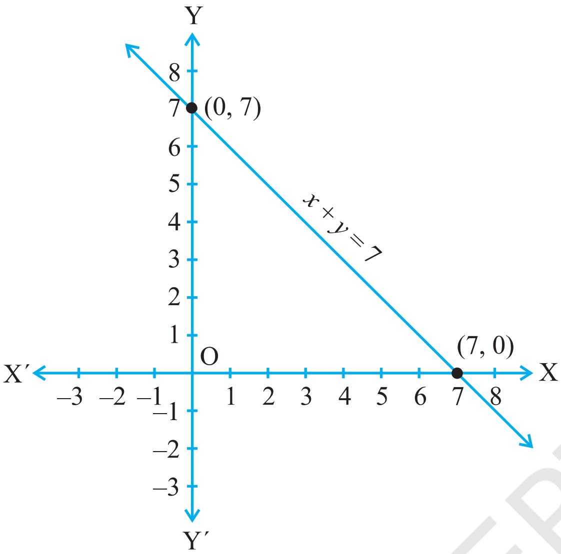
ریمارک: وہ بات جس کی وجہ سے ایک درجہ والی کثیر رکنی مساوات کو خطی مساوات کہا جاتا ہے یہ کہ اس مساوات کا گراف ہمیشہ ایک سیدھا خط ہوتا ہے۔

مثال 5: ایک نقطہ (1, 2) دیا ہوا ہے کیا آپ اس خط کی مساوات معلوم کرسکتے ہیں جس پر یہ نقطہ موجود ہو؟ ایسی کتنی مساواتیں ہیں؟

حل: یہاں (1,2) اس مساوات کا حل ہے جس کی آپ کو تلاش ہے، اس لئے آپ ایسے خط کو تلاش کررہے ہیں جو نقطہ (1,2) سے ہوکر گزرتا ہے ایسی خطی مساوات کی ایک مثال $x + y = 3$ ہے اور دوسری ہیں $y - x = 1$ $y = 2x,$ کیونکہ یہ بھی مختصات (1,2) سے مطمئن ہوتی ہیں درحقیقت ایسی لامحدود مساواتیں ہیں جو نقطہ (1,2) کے مختصات سے مطمئن ہوتی ہیں، کیا آپ ان کو تصویر کی شکل میں دیکھ سکتے ہیں؟

مثال 6: $x + y = 7$ کا گراف بنائیے۔

حل: گراف بنانے کے لئے ہم کومساوات کے کم سے کم دوحل درکار ہوتے ہیں۔آپ جانچ کر سکتے ہیں کہ $x = 0, y = 7$ اور $x = 7, y = 0$ دی ہوئی مساوات کے حل ہیں۔اس لئے آپ گراف بنانے کے لئے مندرجہ ذیل جدول کا استعمال کر سکتے ہیں۔



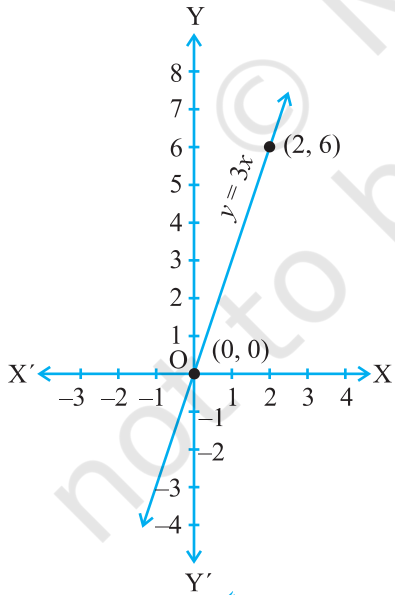
شکل 4.3

جدول 2

x	0	7
y	7	0

جدول2 میں سے دونقاط لیکر گراف پلاٹ کیجیے اوران دونوں کوایک خط سے ملادیجئے (شکل 4.3 دیکھئے)

مثال 7: آپ جانتے ہیں کہ کسی جسم پر لگائی گئی قوت (Force) اس جسم کے ذریعہ پیدا کی گئی اسراع (Acceleration) کے سیدھ تناسب میں ہوتی ہے۔اس صورت حال کا اظہار کرنے کے لئے ایک مساوات بنائیے اوراس مساوات کا گراف پلاٹ کیجیے۔



شکل 4.4

حل: یہاں جو متغیر استعمال ہوئے ہیں وہ قوت اوراسرع ہیں۔مان لیجئے لگائی گئی قوت y اکائی ہے اورجسم کے ذریعے پیدا کی گئی اسراع x اکائیاں ہے۔نسبت اورتناسب کے ذریعہ آپ اس حقیقت کواس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$y = kx$$

جہاں k ایک مستقلہ (Constant) ہے (اپنی سائنس کی معلومات

سے آپ یہ جانتے ہیں کہ k دراصل جسم کی کمیت ہے) کیونکہ ہم یہ نہیں جانتے کہ k کیا ہے اس لئے ہم $y = kx$ کا صحیح گراف نہیں بنا سکتے۔ لیکن اگر ہم k کو کچھ خاص قدر دے دیں تو ہم گراف بنا سکتے ہیں آیئے $k=3$ لیتے ہیں یعنی ہم اس خط کا گراف بناتے ہیں جو $y = 3x$ کو ظاہر کرتا ہے اس کے لئے ہم اس کے دو حل (0,0) اور (2,6) لیتے ہیں۔ (شکل 4.4 دیکھئے) گراف مندرجہ ذیل میں دکھایا گیا ہے۔

گراف سے آپ یہ بات آسانی سے جان سکتے ہیں کہ اگر لگائی گئی قوت 3 اکائیاں ہے تو اسراع 1 اکائی پیدا ہوگا، مزید (0,0) بھی گراف پر موجود ہے جس کا مطلب ہے جب 0 اکائی قوت لگائی جاتی ہے تو اسراع بھی 0 ہوتی ہے۔

ریمارک: $y = kx$ شکل والی مساوات کا گراف ہمیشہ مبدا سے ہوکر گزرتا ہے۔

مثال 8: شکل 4.5 میں دیئے گئے گرافوں کو غور سے دیکھیے اور ذیل میں دی گئی مساواتوں میں سے ان مساواتوں کو چنئے جو گراف میں دی ہوئی ہیں یا جن کا گراف بنا ہوا ہے۔

(a) شکل $4.5(i)$ کے لئے

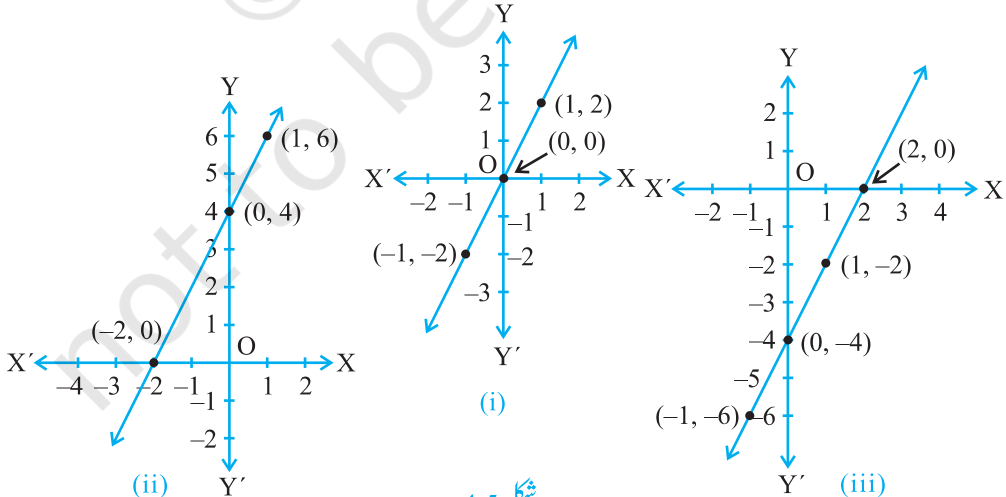
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) شکل 4.5(ii) کے لئے

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

(c) شکل 4.5(iii) کے لئے

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$



شکل 4.5

حل: (a) شکل (i) 4.5 میں دیئے گئے گراف پر $(1,2),(0,0),(-1,-2)$ نقاط موجود ہیں مشاہدہ سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اس گراف کی مساوات $y = 2x$ ہے آپ آسانی سے اندازہ لگا سکتے ہیں کہ ہر نقطہ میں y مختص x کا دگنا ہے۔

(b) شکل (ii) 4.5 میں دیئے گئے گراف پر $(-2,0), (0,4), (1,6)$ نقاط ہیں آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ نقطوں کے مختصات مساوات $y = 2x + 4$ کو مطمئن کرتے ہیں۔ اس لئے اس گراف کی مساوات $y = 2x + 4$ ہے۔

(c) شکل (iii) 4.5 میں دیئے گئے گراف پر $(-1,-6),(0,-4),(1,-2),(2,0)$ نقاط ہیں آپ آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تمام نقاط مساوات $y = 2x - 4$ کو مطمئن کر رہے ہیں اس لئے اس گراف کی مساوات $y = 2x - 4$ ہے۔

مشق 4.3

1. مندرجہ ذیل دومتغیر والی ہر ایک مساوات کا گراف بنائیے

(i) $x + y = 4$ (ii) $x - y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

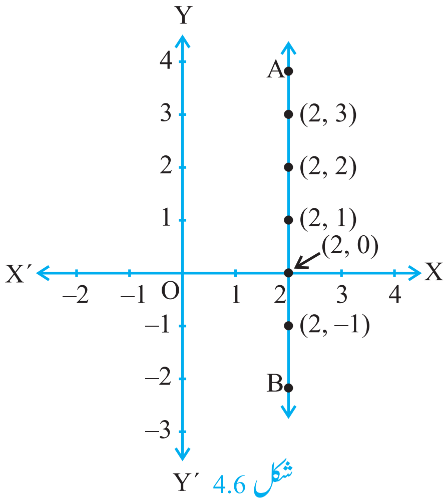
2. ان دوخطوط کی مساواتیں معلوم کیجیے جو $(2, 14)$ سے ہو کر گزرتی ہیں اور ایسی اور کتنی مساواتیں ہیں اور کیوں؟

3. اگر نقطہ $(3,4)$ مساوات $3y = ax + 7$ کے گراف پر موجود ہے تو a کی قدر معلوم کیجیے۔

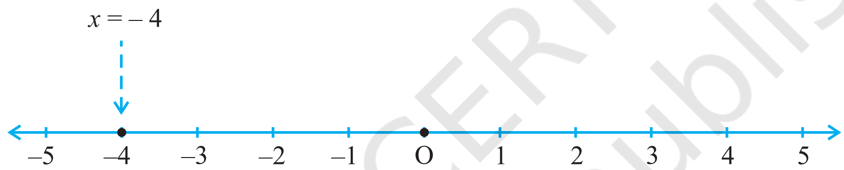
4. کسی شہر میں ٹیکسی کا کرایہ دیا ہوا ہے۔ پہلے کلومیٹر کے لئے 8 روپے اور اس سے آگے کے فاصلہ کے لئے ہر کلومیٹر پر 5 روپے طے کیا گیا فاصلہ x اور کل کرایہ y روپے لیتے ہوئے ان اطلاعات کی ایک خطی مساوات لکھئے اور اس کا گراف بھی بنائیے۔

5. درج ذیل ہر گراف کے لئے صحیح مساوات کا انتخاب کیجیے۔

(i) $y = x$	(i) $y = x + 2$
(ii) $x + y = 0$	(ii) $y = x - 2$
(iii) $y = 2x$	(iii) $y = -x + 2$
(iv) $2 + 3y = 7x$	(iv) $x + 2y = 6$



شکل 4.6



شکل 4.7

.6 ایک مستقل قوت لگانے پر کسی جسم کے ذریعہ کیا گیا کام جسم کے ذریعہ طے کئے گئے فاصلہ کے سیدھے تناسب میں ہوتا ہے۔اس کا اظہار دو متغیر والی ایک خطی مساوات کے ذریعہ کیجئے اور قوت کو مستقل 5 اکائیاں لے کر اس کا گراف بھی بنائیے۔گراف کو پڑھ کر کیا گیا کام معلوم کیجئے اگر طے کیا گیا فاصلہ ہے۔

(i)2 اکائیاں (ii) 0 اکائی

[اشارہ: مان لیجیے مستقل قوت کے ذریعہ کیا گیا کام y اکائیاں اور جسم کے ذریعہ طے کیا گیا فاصلہ x اکائیاں ہے اس طرح $y = 5x$]

.7 زلزلہ سے متاثر لوگوں کی مدد کے لئے IX جماعت کی دو طالبات یامنی اور فاطمہ نے مل کر 100 روپے وزیراعظم کے امدادی فنڈ میں جمع کرائے،ان اعداد وشمار کو مطمئن کرنے کے لئے ایک خطی مساوات لکھئے (اب ان کے الگ۔الگ عطیہ کو x روپے اور y روپے لے سکتے ہیں۔اس کا گراف بھی بنائیے۔

.8 امریکہ اور کناڈا جیسے مما لک میں درجہ حرارت کی پیائش فارن ہائٹ میں ہوتی ہے جبکہ دوسرے مما لک جیسے ہندوستان میں ان کی پیائش سیلیس میں ہوتی ہے یہاں ایک سیلیس کو فارن ہائٹ میں بدلنے کی ایک مساوات دی گئی ہے۔

$$F = \left\{\frac{9}{5}\right\} C + 32$$

x(i)-محور کو سیلیس لیکر اور y محور کو فارن ہائٹ لیکر مذکورہ بالا مساوات کا گراف بنائیے۔

(ii) اگر درجہ حرارت 30^0 ڈگری سیلیس ہے تو فارن ہائٹ F میں یہ درجہ حرارت کیا ہوگا۔

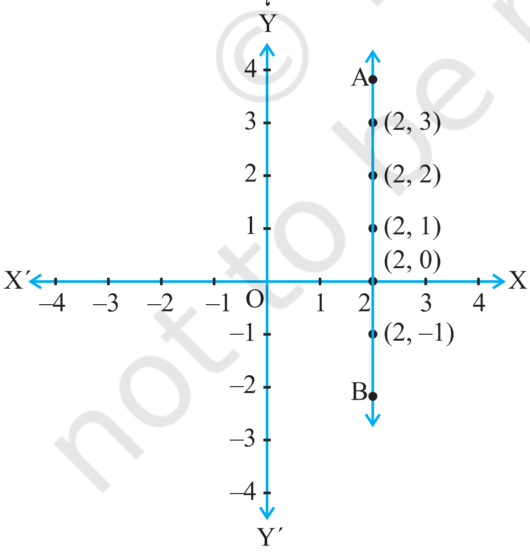
(iii) اگر درجہ حرارت 95^0 ڈگری فارن ہائٹ ہے تو سیلیس میں یہ درجہ حرارت کیا ہوگا۔

(iv) اگر درجہ حرارت 0^0 ڈگری سیلیس ہے تو فارن ہائٹ میں درجہ حرارت کیا ہوگا اور اگر درجہ حرارت 0^0 ڈگری فارن ہائٹ ہے تو سیلیس میں درجہ حرارت کیا ہوگا۔

(v) کیا کوئی ایسا درجہ حرارت ہے جو فارن ہائٹ اور سیلیس میں عددی طور پر ایک ہی ہو؟ اگر ہاں تو اسے معلوم کیجئے۔

4.5 x اور y محوروں کے متوازی خطوط کی مساواتیں
(Equations of Lines Parallel to the x-axis and y-axis)

آپ سیکھ چکے ہیں کہ کارتیزی مستوی میں دیئے ہوئے نقطہ کے مختصات کو کس طرح لکھا جاتا ہے کیا آپ جانتے ہیں کہ نقاط (2,0), (-3,0), (4,0) اور (n,0) جہاں x کوئی حقیقی عدد ہے، کارتیزی مستوی میں کہاں واقع ہیں؟ ہاں یہ x- محور پر واقع ہیں، لیکن آپ یہ جانتے ہیں کہ کیوں؟ کیونکہ x- محور پر ہر نقطہ کے y- مختص 0 ہے درحقیقت x- محور پر نقطہ (x,0) شکل کا ہوتا ہے کیا آپ x- محور کی مساوات کا اندازہ کر سکتے ہیں؟ ہاں یہ ہے y=0 جیسا کہ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $y = 0$ کو $0.x + 1.y = 0$ بھی لکھا جاسکتا ہے اسی طرح سے آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ Y محور کی مساوات $x = 0$ ہے۔



شکل 4.8

اب مساوات $x - 2 = 0$ پر غور کیجئے۔ اگر آپ اس کو ایک متغیر والی مساوات کی حقیقت سے دیکھتے ہیں تب اس کا صرف ایک ہی حل ہے $x = 2$ جو کہ عددی خط پر ایک نقطہ ہے۔ لیکن جب آپ اس کو دومتغیر والی مساوات کی حیثیت سے دیکھتے ہیں اس کو ہم $x + 0.y - 2 = 0$ سے ظاہر کرتے ہیں اس کے لامحدود حل ہوتے ہیں۔ درحقیقت یہ تمام (2,r) کی شکل کے ہوتے ہیں جہاں r کوئی حقیقی عدد ہے۔ مزید آپ یہ بھی جانچ کر سکتے ہیں کہ (2,x) شکل کا ہر نقطہ اس مساوات کا حل ہے اس لئے دومتغیر والی مساوات

$x - 2 = 0$ کو ہم ایک خط AB سے ظاہر کرتے ہیں (شکل4.8 دیکھئے)۔

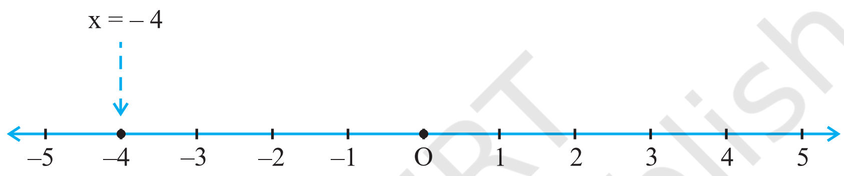
مثال 9: مساوات $2x + 1 = x - 3$ کو حل کیجئے اور اس کے حلوں کو(i) عددی خط(ii) کارتیزی مستوی پر ظاہر کیجئے۔

حل: ہم حل کرتے ہیں $2x+1 = x-3$

$$2x - x = -3 - 1$$

$$x = -4$$

(i) عددی خط پر اس کا اظہار یعنی شکل4.9 میں دکھایا گیا ہے جہاں $x = -4$ کو ایک متغیر والی مساوات کے طور پر لیا گیا ہے۔



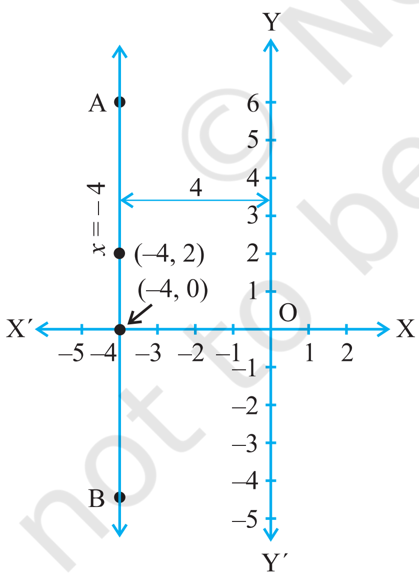
شکل4.9

(ii) ہم جانتے ہیں کہ $x = -4$ کو $x + 0.y = -4$ بھی لکھا جا سکتا ہے کیونکہ یہ دو متغیر x اور y کی مساوات ہے اس لئے اس کو ایک خط سے ظاہر کیا گیا ہے۔ y کی تمام قدروں کے لئے یہ درست ہے کیونکہ 0.y ہمیشہ 0 ہے لیکن x ہمیشہ متعلق x=-4 کو مطمئن کرتا ہے۔ اس طرح سے دی ہوئی مساوات کے دو حل $x = -4, y = 0$ اور $x = -4, y = 2$ ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ خط AB کا گراف y- محور کے متوازی ہے اور بائیں طرف سے 4 اکائیوں کے فاصلہ پر ہے۔ (شکل4.10 دیکھئے)

اسی طریقہ سے آپ x- محور کے متوازی خط حاصل کر سکتے ہیں جس کی متعلقہ مساواتیں ہیں

$y = 3$ یا $0.x + 1.y = 3$



شکل4.10

مشق: 4.4

.1 مساوات $y = 3$ کا (i) ایک متغیر (ii) دومتغیر کے طور پر جیومیٹریائی اظہار دیجیے۔

.2 مساوات $2x + 9 = 0$ کا (i) ایک متغیر (ii) دومتغیر کے طور پر جیومیٹریائی اظہار دیجیے۔

4.6 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں۔

.1 $ax + by + c = 0$ شکل والی مساوات جس میں b,a اور c حقیقی اعداد ہیں جبکہ a اور b غیر صفر کو دومتغیر والی خطی مساوات کہا جاتا ہے۔

.2 دومتغیر والی خطی مساوات کے لامحدود حل ہوتے ہیں۔

.3 دومتغیر والی ہر مساوات کا گراف ایک خط مستقیم ہوتا ہے۔

.4 $x = 0$ y-محور کی مساوات ہے اور $y = 0$، x محور کی مساوات ہے۔

.5 $x = a$ کا گراف ایک خط مستقیم ہے جو y- محور کے متوازی ہے۔

.6 $y = a$ کا گراف ایک خط مستقیم ہے جو x- محور کے متوازی ہے۔

.7 $y = mx$ قسم کی مساوات ایک ایسے خط کو ظاہر کرتی ہے جو مبدا سے گذرتا ہے۔

.8 کسی دومتغیر والی خطی مساوات کے گراف پر ہر ایک نقطہ اس خطی مساوات کا ایک حل ہوتا ہے دوسری طرح سے کسی خطی مساوات کا ہر حل اس خطی مساوات کے گراف کا ایک نقطہ ہوتا ہے۔