7 സ്ക്യൂനതയും കർട്ടോസിസും
(Skewness and Kurtosis)

V7W1E9

ആമുഖം

സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ ഡാറ്റയുടെ ഏറ്റവും പ്രധാനപ്പെട്ട സവിശേഷതകളാണ് (കേന്ദ്രപ്രവണത, പ്രകീർണനം) കഴിഞ്ഞ രണ്ട് യൂണിറ്റുകളിൽ ചർച്ച ചെയ്യപ്പെട്ടത്. ഒരു ഡാറ്റയുടെ സവിശേഷതകൾ നിർണയിക്കുന്നതിന് ശരാശരികളുടെയും പ്രകീർണന മാനങ്ങളുടെയും അറിവുകൾക്ക് വളരെ പ്രാധാന്യമുണ്ട്. ശരാശരി എന്നത് ഒരു വിതരണത്തിന്റെ കേന്ദ്രപ്രവണതയെയും പ്രകീർണനം എന്നത് കേന്ദ്രവിലയിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനത്തിന്റെ അളവിനെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഒരു ശരാശരിയുടെ ഇരുഭാഗത്തും വിലകളെ സമമിത (Symmetric) മായി വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടോ എന്ന് വ്യക്തമാക്കുവാൻ കേന്ദ്രപ്രവണതാമാനങ്ങൾക്കും പ്രകീർണനമാനങ്ങൾക്കും സാധിക്കുകയില്ല. ഒരു വക്രത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഇരുഭാഗത്തേക്കും ആവൃത്തികളുടെ വ്യാപനം തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ വക്രത്തിനെ സമമിത വക്രം (Symmetric Curve) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ പഠനത്തിന് അതിന്റെ ആവൃത്തി വക്രം സമമിതമാണോ എന്നും അല്ലെങ്കിൽ സമമിതത്തിൽ നിന്നും എത്രമാത്രം വ്യതിചലിച്ചിരിക്കുന്നു എന്നും അറിയുന്നത് സഹായകരമാണ്. ഒരു ഡാറ്റയിലെ സമമിതത്തിന്റെ അസാന്നിധ്യത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന പദമാണ് ചരിവ് അഥവാ സ്ക്യൂനത (Skewness). ആവൃത്തി വക്രത്തിന്റെ ആകൃതിയെക്കുറിച്ചുള്ള ധാരണ ഉണ്ടാകുന്നതിനു വേണ്ടിയാണ് സ്ക്യൂനത പഠിക്കുന്നത്.

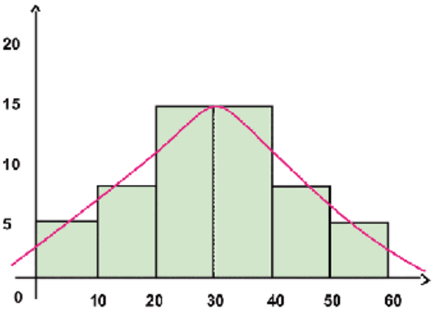
രണ്ടോ അതിലധികമോ വിതരണങ്ങൾ അവയുടെ ആവൃത്തി വക്രത്തിന്റെ പരപ്പിലോ, കൂർമതയിലോ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കാം. ഡാറ്റയുടെ ഈ സവിശേഷത അളക്കുന്നതിനുള്ള രീതിയാണ് കൂർമത അഥവാ കർട്ടോസിസ് (Kurtosis)അതായത്, ഒരു ഡാറ്റയുടെ പരപ്പിന്റെയോ കൂർമതയുടെയോ അളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന പദമാണ് കൂർമത അഥവാ കർട്ടോസിസ് (Kurtosis).

7.1. സ്ക്യൂനത (Skewness)

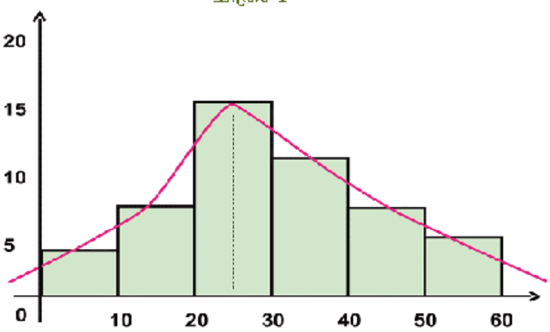
ഒരു ഹയർസെക്കണ്ടറി സ്കൂളിൽ കോമേഴ്സ്, ഹ്യുമാനിറ്റീസ്, സയൻസ് വിഭാഗങ്ങളിൽ പഠിക്കുന്ന വിദ്യാർഥികളുടെ സ്കോറുകളുടെ ആവൃത്തി വിതരണം ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നത് പരിഗണിക്കുക.

1.	സ്കോറുകൾ	: 0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
	വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം	: 5	8	15	15	8	5
2.	സ്കോറുകൾ	: 0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
	വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം	: 4	7	16	11	7	5
3	സ്കോറുകൾ	: 0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
	വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം	: 5	7	11	16	7	4

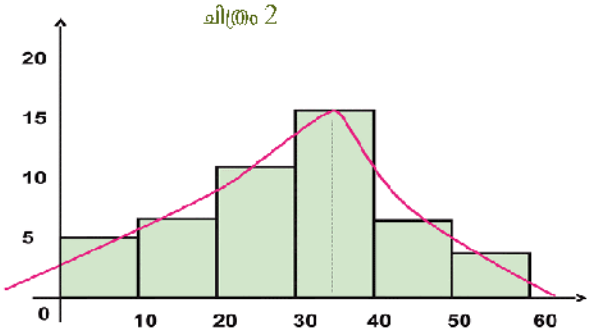
മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന വിതരണങ്ങളുടെ മാധ്യവും വ്യതിചലനവും ഒന്നു തന്നെയാണ്, എന്നാൽ അവയുടെ ആകൃതി ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതായി കാണാം.



ചിത്രം 1



ചിത്രം 2

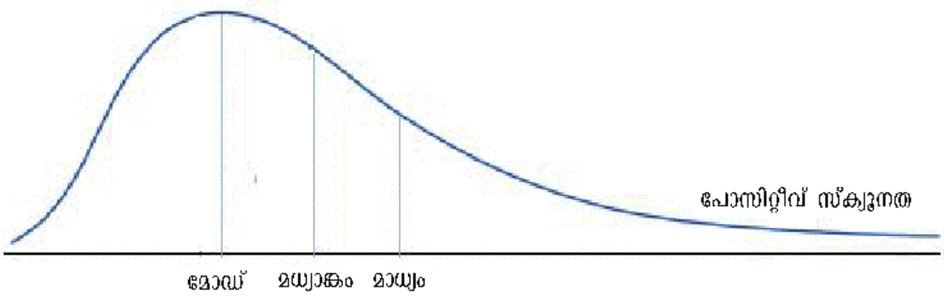


ചിത്രം 3

ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ മോഡിന്റെ വലതുഭാഗവും ഇടതുഭാഗവും പരസ്പരം കണ്ണാടി ബിംബങ്ങൾ പോലെയാണ്. അത്തരം ഡാറ്റാ വിതരണത്തെ സമമിത വിതരണം (Symmetric Distribution) എന്നു പറയുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങളെ നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ കഴിയും. കൂടാതെ ആവൃത്തി വക്രത്തിന് മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്തേക്ക് നീളം കൂടുതലുള്ളതായും കാണാം. ഇതുപോലെ മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ മോഡിന്റെ ഇടതു ഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങളുള്ളതായും ആവൃത്തി വക്രത്തിന് മോഡിന്റെ ഇടത് ഭാഗത്തേക്ക് നീളം കൂടുതലുള്ളതായും കാണാം. വ്യത്യസ്ത ആവൃത്തി വിതരണങ്ങൾക്ക് ആവൃത്തി വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുമ്പോൾ കാഴ്ചയിൽ തന്നെ അവ സമമിതമാണോ അല്ലയോ എന്നു ദർശിക്കാവുന്നതാണ്. ചിത്രങ്ങൾ രണ്ട്, മൂന്ന് എന്നിവ സമമിതമല്ലായെന്നും ചരിവ് (സ്ക്യൂനത) ഉള്ളതാണെന്നും വ്യക്തമാണ്. ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്നും സ്ക്യൂനത രണ്ടു തരത്തിലുള്ളതായി കാണാം. (1) പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത (2) നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത.

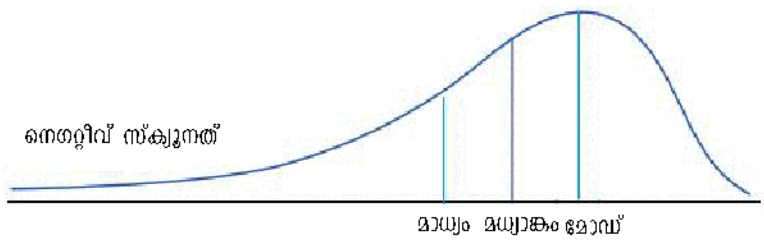
പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത (Positive Skewness)

മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ കാണപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ അത്തരം ആവൃത്തി വക്രത്തിന് പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട് എന്നു പറയുന്നു. ഇത്തരം ആവൃത്തി വക്രത്തിന് വലതു ഭാഗം നീളം കൂടുതലായിരിക്കും. കൂടാതെ മോഡ് , മധ്യാങ്കം, മാധ്യം എന്നിവയുടെ അളവുകൾ ആരോഹണക്രമത്തിലായിരിക്കും. (മോഡ് < മധ്യാങ്കം < മാധ്യം)



നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത (Negative Skewness)

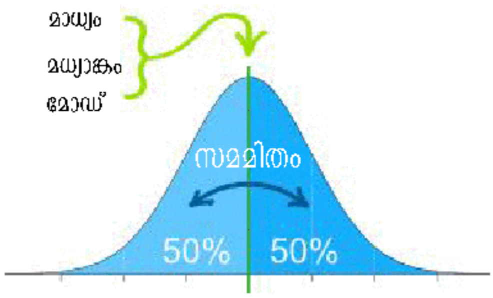
മോഡിന്റെ ഇടതുഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ കാണപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ അത്തരം ആവൃത്തി വക്രത്തിന് നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട് എന്നു പറയുന്നു. ഇത്തരം ആവൃത്തി വക്രത്തിന് ഇടതുഭാഗം നീളം കൂടുതലായിരിക്കും. കൂടാതെ മോഡ്, മധ്യാങ്കം, മാധ്യം എന്നിവയുടെ അളവുകൾ അവരോഹണക്രമത്തിലായിരിക്കും. (മാധ്യം < മധ്യാങ്കം <മോഡ്)



ഒരു സമമിത ആവൃത്തി വക്രത്തിന്റെ

- മാധ്യം=മധ്യാങ്കം=മോഡ്
- മോഡ് വക്രത്തിന്റെ താഴെയുള്ള ആകെ വിസ്തീർണത്തെ രണ്ട് തുല്യഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.
- ചതുരംശങ്ങൾ മധ്യാങ്കത്തിൽ നിന്നും തുല്യ അകലങ്ങളിലായിരിക്കും.

  അതായത് Q_3 - മധ്യാങ്കം = മധ്യാങ്കം - Q_1 ആയിരിക്കും.



ഒരു പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് Q_3 - മധ്യാങ്കം > മധ്യാങ്കം - Q_1 ആയിരിക്കും.

അതുപോലെ നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് Q_3 - മധ്യാങ്കം < മധ്യാങ്കം - Q_1 ആയിരിക്കും.

ഒരു സമമിത വിതരണത്തിൽ മാധ്യവും മധ്യാങ്കവും മോഡും ഒരു വിലതന്നെയാകുന്നു. മോഡിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭാഗത്ത് കുറച്ച് ഇനങ്ങൾ ചേർക്കുകയാണെങ്കിൽ ഒരു വക്രത്തിന്റെ സമമിതം മാറാവുന്നതാണ്. മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ ഉണ്ടാവുകയാണെങ്കിൽ അത്തരം വക്രത്തിന് പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട് എന്നുപറയാം. അങ്ങനെ മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ വരുമ്പോൾ മധ്യാങ്കം, മോഡിൽ നിന്ന് വലതു ഭാഗത്തേക്ക് അൽപ്പം തള്ളപ്പെടുന്നു. ഇതുപോലെ ഇടത് ഭാഗത്ത് കൂടുതൽ ഇനങ്ങൾ ചേരുമ്പോഴും. മേൽപ്പറഞ്ഞരീതിയിലുള്ള മാറ്റങ്ങൾ ദൃശ്യമാകും. അതായത്, സ്ക്യൂനത എന്നത് മാധ്യത്തെയും മധ്യാങ്കത്തെയും മോഡിൽ നിന്ന് ചിലപ്പോൾ വലതുഭാഗത്തേക്കും,ചിലപ്പോൾ ഇടതുഭാഗത്തേക്കും തള്ളി മാറ്റപ്പെടുന്ന അവസ്ഥയാകുന്നു.

പ്രവർത്തനം 1

താഴെതന്നിരിക്കുന്ന മൂന്ന് വിതരണങ്ങളുടെ മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ്, ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക. തുടർന്ന് വിലകൾ താരതമ്യം ചെയ്യുക.

1.

സ്കോറുകൾ	:	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം	:	5	12	16	12	5

2.

സ്കോറുകൾ	:	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം	:	5	20	12	8	5

3.

സ്കോറുകൾ	:	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം	:	5	8	12	20	5

മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണങ്ങളുടെ ആവൃത്തി വക്രങ്ങൾക്കൂടി വരച്ച് അവയെ താരതമ്യം ചെയ്യുക.

പ്രവർത്തനം 2

താഴെപറയുന്നവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ഡാറ്റ ശേഖരിക്കുക

a) ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ വിവിധ വിഷയങ്ങളിലെ സ്കോറുകൾ

b) ക്ലാസിലെ വിദ്യാർഥികളുടെ ഉയരങ്ങൾ

c) രക്ഷിതാക്കളുടെ വരുമാനങ്ങളുടെ ഡാറ്റ.

d) വൈദ്യുതി ഉപയോഗം

മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് കണക്കാക്കുക വിതരണങ്ങളുടെ സ്ക്യൂനതയെക്കുറിച്ച് പ്രസ്താവിക്കുക

7.2. സ്ക്യൂനതയുടെ അളവുകൾ (Measures of Skewness)

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ആവൃത്തി വക്രം സമമിതത്തിൽ നിന്ന് എത്രമാത്രം അകന്നിരിക്കുന്നുവെന്നും ആ അകൽച്ച ഏത് ദിശയിലാണെന്നും സ്ക്യൂനതയുടെ അളവുകൾ സൂചന നൽകുന്നു. വിതരണത്തിന്റെ രൂപത്തെക്കുറിച്ചും, കേന്ദ്രവിലയിൽ നിന്നും ഇരുഭാഗത്തേയ്ക്കുള്ള വ്യതിയാനങ്ങളുടെ അളവിനെക്കുറിച്ചും അവ വിവരം നൽകുന്നു.

സ്ക്യൂനതയുടെ അളവുകൾ പ്രധാനമായും മൂന്ന് തരത്തിലുണ്ട്.

1. കാൾപിയേഴ്സൻ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം
2. ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം
3. മൊമന്റ്സ് അടിസ്ഥാനമായ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം

കാൾപിയേഴ്സൻ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം (Karl Pearson's coefficient of Skewness)

ഒരു സമമിത ഡാറ്റയ്ക്ക് മാധ്യവും, മോഡും തുല്യമാണ് എന്ന് നമുക്കറിയാം. സ്ക്യൂനത ഉണ്ടെങ്കിൽ മാധ്യം മോഡിൽ നിന്ന് അകലെയായിരിക്കും അഥവാ മാധ്യത്തിന്റേയും മോഡിന്റെയും വിലകൾ വ്യത്യസ്തങ്ങളായിരിക്കും. മാധ്യം-മോഡ് പോസിറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവായിരിക്കും. ഈ രീതിയിൽ സ്വാഭാവികമായി സ്ക്യൂനത അളക്കാവുന്നതാണ്.

വ്യത്യസ്ത പ്രകീർണങ്ങളുള്ള രണ്ട് വിതരണങ്ങൾക്ക് മേൽപ്പറഞ്ഞ അളവ് തുല്യമായിവരാൻ സാധ്യതയുള്ളതിനാൽ വിതരണങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിന് ഈ അളവ് അപര്യാപ്തമാണ്. ആയതിനാൽ അളവുകളുടെ യൂണിറ്റികൾക്കതീതമായ സ്ക്യൂനത. ഗുണാങ്കങ്ങൾ നാം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

കാൾപിയേഴ്സൺ കണ്ടെത്തിയ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കത്തെ S_k എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതിനെ താഴെപറയും പ്രകാരം നിർവചിക്കാം.

$$\text{കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം} = \frac{\text{മാധ്യം - മോഡ്}}{\text{മാനക വ്യതിയാനം}} = \frac{\bar{x} - \text{മോഡ്}}{\sigma}$$

പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനതയ്ക്ക് $S_K>0$ ആയിരിക്കും. (മാധ്യം>മോഡ് ആയതിനാൽ)

നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനതയ്ക്ക് $S_K<0$ ആയിരിക്കും. (മാധ്യം<മോഡ് ആയതിനാൽ)

സമമിതമാണെങ്കിൽ $S_K=0$ ആയിരിക്കും. (മാധ്യം=മോഡ് ആയതിനാൽ).

വിവരണം 7.1

ഒരു വിതരണത്തിന് മാധ്യം =30, മോഡ് =26.8 വ്യതിചലനം (വേരിയൻസ്) = 64 ആകുന്നു. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക. ഉത്തരം വിശകലനം ചെയ്യുക.

പരിഹാരം

$\bar{x}$ =30, മോഡ് =26.8, σ^2 =64, σ = 8 എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു.

കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം, $S_k = \frac{x - \text{മോഡ്}}{\sigma}$

$$= \frac{30-20.8}{8}$$

$$= 0.40$$

$S_k > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന് പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

വിവരണം 7.2

20 ഇനങ്ങളുടെ ഒരു ഗ്രൂപ്പിന് $\sum x^2 = 1452$, $\sum x^2 = 144280$, മോഡ് =63.7 എന്നിങ്ങനെയാണെങ്കിൽ കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക.

പരിഹാരം

മോഡ് = 63.7 , $\sum x^2 = 1452$, $\sum x^2 = 144280$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1452}{20} = 72.6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{144280}{20} - \left(\frac{1452}{20}\right)^2}$$

$$= 44.08$$

കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം S_k $= \frac{\bar{x} - \text{മോഡ്}}{\sigma}$

$$= \frac{72.6 - 63.7}{44.08}$$

$$= 0.2019$$

$S_k > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന് പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

വിവരണം 7.3

ഒരാഴ്ചയിൽ സിറ്റി ഹോസ്പിറ്റലിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയ അപകടങ്ങളുടെ എണ്ണം താഴെ പറയും പ്രകാരമാണ്.

40, 62, 40, 25, 40, 34, 60

കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{301}{7} = 43$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{14025}{7} - \left(\frac{301}{7}\right)^2} = 12.43$$

മോഡ് = 40 (ഏറ്റവും കൂടുതൽ ആവർത്തിച്ച ഇനം)

കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം S_k $= \frac{\bar{x} - \text{മോഡ്}}{\sigma}$

$$= \frac{43 - 40}{12.43}$$

$$= 0.24$$

$S_k > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന് പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

വിവരണം 7.4

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയ്ക്ക് കാൾ പിയേഴ്സൺ രീതിയിൽ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക. സ്ക്യൂനത സ്വഭാവത്തെക്കുറിച്ച് അഭിപ്രായപ്പെടുക.

വില	6	12	18	24	30	36	42
ആവൃത്തി	4	7	9	18	15	10	3

പരിഹാരം

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{1638}{66} = 24.82$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{46188}{66} - \left(\frac{1638}{66}\right)^2}$$

$$= 9.16$$

മോഡ് = ഉയർന്ന ആവൃത്തിയുള്ള വില

= 24

കാൾ പിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം,

$$S_k = \frac{\bar{x} - \text{മോഡ്}}{\sigma}$$

$$= \frac{24.82 - 24}{9.16}$$

$$= 0.089$$

$S_k > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന് പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

വിവരണം 7.5

ഒരു ഗ്രാമത്തിൽ വസിക്കുന്ന 100 ആളുകളുടെ മാസവരുമാനത്തിന്റെ വിതരണം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

ഈ വിതരണത്തിന്റെ a) മോഡ് b) മാനകവ്യതിയാനം c)സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം

വരുമാനം (ആയിരങ്ങളിൽ)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ആളുകളുടെ എണ്ണം	12	18	27	20	17	6

എന്നിവ കാണുക.

പരിഹാരം

ഉയർന്ന ആവൃത്തി 27 ആയതിനാൽ മോഡൽ ക്ലാസ് 20 – 30 ആകുന്നു.

മോഡ് $= l + \left(\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 + f_2 - f_0}\right)c$

ഇവിടെ $l = 20, c = 10, f_0 = 18, f_1 = 27, f_2 = 20$

$$\text{മോഡ്} = 20 + \left(\frac{90}{62}\right)$$

$$= 25.625$$

$$\text{മാധ്യം} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{2800}{100} = 28$$

$$\text{മാനക വ്യതിയാനം} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{98300}{100} - 28^2}$$

$$= \sqrt{199} = 14.11$$

കാൾ പിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം $S_k = \dfrac{\bar{x} - \text{മോഡ്}}{\sigma}$

$$= \frac{28 - 25.625}{14.11}$$

$$= 0.16832$$

$S_k > 0$ ആയതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന വിതരണത്തിന് പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

നിങ്ങളുടെ പുരോഗതി അറിയുക

1. 200 ജീവനക്കാർക്ക് ലഭിച്ച ശമ്പളത്തിന്റെ വിതരണ പ്രകാരം ശരാശരി ശമ്പളം 3590 രൂപ, മോഡ് 3660 രൂപ, വ്യതിചലനം 625 രൂപ എന്നിങ്ങനെയാണ്. കാൾ പിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിച്ച് വിശകലനം നടത്തുക.

2. 20 പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ തുക 300 ആകുന്നു. അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുക 5000 ഉം, മോഡ് 15 ഉം ആകുന്നു. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കവും വ്യതിയാന ഗുണാങ്കവും കാണുക.

ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം (Bowley's Coefficient of Skewness)

സമമിത ഡാറ്റയ്ക്ക് (മധ്യാങ്കം $- Q_1) = (Q_3 -$ മധ്യാങ്കം) ആയിരിക്കുമെന്ന് നമുക്കറിയാം. എങ്കിൽ സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് ഇവ രണ്ടും തുല്യമായിരിക്കില്ലല്ലോ. ആയതിനാൽ (Q_3 - മധ്യാങ്കം) ഉം (മധ്യാങ്കം - Q_1) ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തെ സ്ക്യൂനത അളക്കുന്നതിനായി ഉപയോഗിക്കാം.

ചതുരംശങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി സർ ആർതർ ബൗളി മറ്റൊരു സ്ക്യൂനത അളവ് നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. ആ അളവ് ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. അതിനെ സാധാരണയായി S_B എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം , $S_B = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$

S_B യുടെ വില -1 നും +1നും ഇടയിലായിരിക്കും.

$S_B > 0$ ആണെങ്കിൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവായിരിക്കും.

$S_B < 0$ ആണെങ്കിൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവായിരിക്കും.

$S_B = 0$ ആണെങ്കിൽ വിതരണം സമമിതമായിരിക്കും.

കുറിപ്പ്:

1. തുറന്ന അഗ്രമുള്ള ക്ലാസുകളിൽ ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കമായിരിക്കും അനുയോജ്യം.
2. S_B യുടെയും S_k യുടെയും വിലകൾ തമ്മിൽ താരതമ്യം ചെയ്യുന്നത് നിരർത്ഥകമാണ്.

വിവരണം 7.6

ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ഉയർന്ന ചതുരംശം, താഴ്ന്ന ചതുരംശം എന്നിവ യഥാക്രമം 56, 44 ആകുന്നു. അതേ ഡാറ്റയുടെ മധ്യാങ്കം 55 ആണെങ്കിൽ സ്ക്യൂനതയുടെ സ്വഭാവം തിരിച്ചറിയുക.

പരിഹാരം

$Q_1 = 44$, $Q_3 = 56$, മധ്യാങ്കം = 55 എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു

ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം, $S_B = \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{56 + 44 - 2 \times 55}{56 - 44}$$

$$= -0.83$$

$S_B < 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആയിരിക്കും.

വിവരണം 7.7

ഒരു ഡാറ്റയിലെ 25% പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 70 ന് മുകളിലും 50% പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 38 ൽ താഴെയും, 75% പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 30 ന് മുകളിലുമാണ്. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണ്ടുപിടിച്ച് ഉത്തരം വ്യാഖ്യാനിക്കുകയും ചെയ്യുക.

പരിഹാരം

25% പ്രാപ്താങ്കങ്ങളും 70 ന് മുകളിലായതിനാൽ , Q_3 =70 ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതുപോലെ 50% പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 38 ൽ താഴെയാണ് എന്നതുകൊണ്ട് മധ്യാങ്കം =38 എന്നും, 75% പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ 30 ന് മുകളിലായതിനാൽ Q_1 =30 എന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം, $$S_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{70+30-2\times 38}{70-30}$$

$$= 0.6$$

$S_B > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആണ്.

വിവരണം 7.8

ഒരു കൂട്ടം ഇനങ്ങളുടെ ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം 0.8 ഉം, ചതുരംശങ്ങളുടെ തുക 80 ഉം, മധ്യാങ്കം 30 ഉം ആകുന്നു. ഉയർന്ന ചതുരംശത്തിന്റേയും താഴ്ന്ന ചതുരംശത്തിന്റേയും വിലകൾ കാണുക.

പരിഹാരം

S_B=0.8, $Q_1 + Q_3$=80, മധ്യാങ്കം =30 തന്നിരിക്കുന്നു.

ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം , $$\frac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$$

$$\because Q_3 = 80 - Q_1$$

$$0.8 = \frac{80-2\times 30}{(80-Q_1)-Q_1}$$

$$0.8 = \frac{20}{80-2Q_1}$$

അതായത് , Q_1=27.5, Q_3=52.5

വിവരണം 7.9

15 വിദ്യാർഥികൾക്ക് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് പരീക്ഷയിൽ ലഭിച്ച മാർക്കുകൾ താഴെതന്നിരിക്കുന്നു. 15, 20, 20, 21, 22, 22, 24, 28, 28, 29, 30, 32, 25, 33, 35. സ്ക്യൂനതയുടെ ചതുരംശ ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

പരിഹാരം

തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതുന്നു.

15, 20, 20, 21, 22, 22, 24, 25, 28, 28, 29, 30, 32, 33, 35

$$Q_1 = \left[\frac{n+1}{4}\right] \text{ -ാം ത്തെ ഇനം} = 4 \text{ -ാം ഇനം} = 21$$

$$\text{മധ്യാങ്കം} = \left[\frac{n+1}{2}\right] \text{-ാം ത്തെ ഇനം} = 18 \text{ -ാം ഇനം} = 25$$

$$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right) \text{ -ാം ത്തെ ഇനം} = 12 \text{ -ാം ഇനം} = 30$$

$$\text{ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം}, \ S_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{30+21-2\times 25}{30-21}$$

$$= 0.11$$

$S_B > 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആകുന്നു.

വിവരണം 7.10

ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ 124 തൊഴിലാളികളുടെ ദിവസവേതനം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

വേതനം (രൂപയിൽ)	200	250	300	350	400	450	500	550
തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം	10	15	18	30	26	15	8	2

1. ചതുരംശങ്ങൾ, 2. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം എന്നിവ കാണുക.

പരിഹാരം

x	സഞ്ചിതാവൃത്തി
200	10
250	25
300	43
350	73
400	99
450	114
500	122
550	124

$$Q_1 = \left[\frac{n+1}{4}\right] \text{-ാമത്തെ ഇനം} = 31.25\text{-ാം ഇനം} = 300$$

$$\text{മധ്യാങ്കം} = \left[\frac{n+1}{2}\right] \text{-ാമത്തെ ഇനം} = 62.5\text{-ാം ഇനം} = 350$$

$$Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right) \text{-ാമത്തെ ഇനം} = 93.75\text{-ാം ഇനം} = 400$$

$$\text{ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം}, S_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2 \times \text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{400+300-2\times350}{400-300}$$

$$= 0$$

$S_B=0$ ആയതിനാൽ വിതരണം സമമിതമാകുന്നു.

വിവരണം 7.11

20 കുടുംബങ്ങളുള്ള ഒരു കോളനിയിലെ ആളുകളുടെ പ്രായത്തിന്റെ വിതരണം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

പ്രായം (വർഷത്തിൽ)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	4	10	15	20	11

ചതുരംശ ഗുണാങ്കം ഉപയോഗിച്ച് മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ സ്ക്യൂനതയുടെ സ്വഭാവം തീരുമാനിക്കുക.

പരിഹാരം

പ്രായം	അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	സഞ്ചിതാവൃത്തി
0 -20	4	4
20-40	10	14
40-60	15	29
60-80	20	49
80-100	11	60

അധ്യായം 5 ലെ പോലെ ചതുരംശങ്ങൾ കാണുക.

$$Q_1 = 40 + \left(\frac{15-14}{15}\right)20 = 41.33$$

$$\text{മധ്യാങ്കം} = 60 + \left(\frac{30-29}{20}\right)20 = 61$$

$$Q_3 = 60 + \left(\frac{30-29}{20}\right)20 = 76$$

$$\text{ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം}, S_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\text{മീഡിയൻ}}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{76+41.33-2\times61}{76-41.33}$$

$$= 0.1347$$

$S_B < 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആകുന്നു.

വിവരണം 7.12

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് ഗ്രൂപ്പുകളുടെ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം ചതുരംശം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക. തുടർന്ന് ഏത് വിതരണമാണ് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത എന്ന് വിശദമാക്കുക.

സ്കോറുകൾ	ഗ്രൂപ്പ് A	ഗ്രൂപ്പ് B
55-58	12	20
58-61	17	22
61-64	23	25
64-67	18	13
67-70	11	7

പരിഹാരം

ഗ്രൂപ്പ് A യിൽ,

$$Q_1 = 58+\left(\frac{20.25-12}{17}\right)3 = 59.46$$

$$\text{മധ്യാങ്കം} = 61+\left(\frac{40.5-29}{23}\right)3 = 62.5$$

$$Q_3 = 64+\left(\frac{60.75-52}{18}\right)3 = 65.46$$

ഗ്രൂപ്പ് A യുടെ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം

$$S_B = \frac{Q_3+Q_1-2\times\text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3-Q_1}$$

$$= \frac{65.46 + 59.46 - 2 \times 62.5}{65.46 - 59.46}$$

$$= -0.013$$

ഗ്രൂപ്പ് B യിൽ,

ഗ്രൂപ്പ് A യിലെ പോലെ കാണുകയാണെങ്കിൽ $Q_1 = 58.24$, മധ്യാങ്കം $=61.18$, $Q_3 = 63.79$ എന്നിങ്ങനെ ലഭിക്കുന്നു.

ഗ്രൂപ്പ് B യുടെ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം ,

$$S_B = \frac{Q_3+Q_1-2\times\text{മധ്യാങ്കം}}{Q_3-Q_1}$$

$$= \frac{63.79+58.24-2\times61.18}{63.79-58.24}$$

$$= -0.0595$$

S_B യുടെ അളവ് ഗ്രൂപ്പ് A യെക്കാളും കൂടുതൽ ഗ്രൂപ്പ് B യ്ക്കാകുന്നു.

അതിനാൽ ഗ്രൂപ്പ് B യുടെ സ്ക്യൂനത ഗ്രൂപ്പ് A യെക്കാൾ കൂടുതലാണ്.

7.3. മൊമന്റുകൾ (Moments)

ഒരു ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ വിവിധ സവിശേഷതകളായ കേന്ദ്ര പ്രവണത,വ്യതിയാനങ്ങൾ സ്ക്യൂനത, കർട്ടോസിസ് എന്നിവ വിശദീകരിക്കുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് സറിരാങ്കങ്ങളാണ് മൊമന്റുകൾ.

മാധ്യം ഉപയോഗിച്ച് മൊമന്റുകൾ കണക്കുകൂട്ടുന്നു. ഒരു വിതരണത്തിലെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളുടെ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ ഓരോ കൃതികളുടെയും മാധ്യങ്ങളെ മൊമന്റുകൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു. വ്യതിയാനങ്ങൾ മാധ്യത്തിൽ നിന്നാണ് എടുത്തതെങ്കിൽ മൊമന്റു l sf tI {µ÷ samaâ þ Ä (Central Moment) എന്നു പറയുന്നു. കേന്ദ്രീയ മൊമന്റുകളെ μ (മ്യു) എന്ന ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ആദ്യനാല് കേന്ദ്രീയ മൊമന്റുകൾ താഴെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

$x_1, x_2, \ldots x_n$ എന്നിവ 'n' പ്രാപ്താങ്കങ്ങളായാൽ,

ഒന്നാം കേന്ദ്രീയ മൊമന്റ്, $\mu_1 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})}{n} = 0$

(പ്രാപ്താങ്ങൾക്ക് അവയുടെ മാധ്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിയാനങ്ങളുടെ തുക എല്ലായ്പ്പോഴും പൂജ്യമായിരിക്കും.)

രണ്ടാം കേന്ദ്രീയ മൊമന്റ്, $\mu_2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n} =$ വ്യതിചലനം

മൂന്നാം കേന്ദ്രീയ മൊമന്റ്, $\mu_3 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^3}{n}$

നാലാം കേന്ദ്രീയ മൊമന്റ്, $\mu_4 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^4}{n}$

മൊമന്റ് അടിസ്ഥാനമായ സ്ക്യൂനതാഗുണാങ്കം (Coefficient of Skewness based on Moments)

മൊമന്റ് അടിസ്ഥാനമായുള്ള സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം, β_1 (ബീറ്റാ ഒന്ന്)ന്റെ നിർവചനം താഴെ പറയും പ്രകാരമാണ്.

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$\beta_1 = 0$ ആയാൽ വക്രം സമമിതമായിരിക്കും. β_1 ന്റെ വില വലുതാകുന്ന വിതരണത്തിന് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉണ്ടായിരിക്കും. μ_3^2 ഉം μ_2^3 ഉം എല്ലായ്പ്പോഴും പോസ്റ്റീവ് വിലകളായതിനാൽ β_1 കാണുന്നതിലൂടെ സ്ക്യൂനത ഏത് ദിശയിലാണെന്ന് അറിയാൻ കഴിയില്ല. ആയതിനാൽ കാൾപിയേഴ്സൺ γ_1, (ഗാമാ ഒന്ന്) എന്ന അളവ് നിർവചിച്ചു.

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \sqrt{\beta_1}$$

$\mu_3 < 0$ ആയാൽ $\gamma_1 < 0$ ആവുകയും വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആകുകയും ചെയ്യുന്നു.

$\mu_3 > 0$ ആയാൽ $\gamma_1 > 0$ ആവുകയും വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആകുകയും ചെയ്യുന്നു.

$\mu_3 = 0$ ആയാൽ $\gamma_1 = 0$ ആകുന്നു. വിതരണം അപ്പോൾ സമമിതമായിരിക്കും. അതായത് μ_3 സ്ക്യൂനതയുടെ സ്വഭാവം തീരുമാനിക്കുന്നതായി കാണാം.

വിവരണം 7.13

ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാല് സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ 0, 14.75, 39.75, 142.31 എന്നിങ്ങനെയാണ്. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക. സ്ക്യൂനസ്സിന്റെ പ്രകൃതം പ്രസ്താവിക്കുക.

പരിഹാരം

$\mu_2 = 14.75$, $\mu_3 = 39.75$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു.

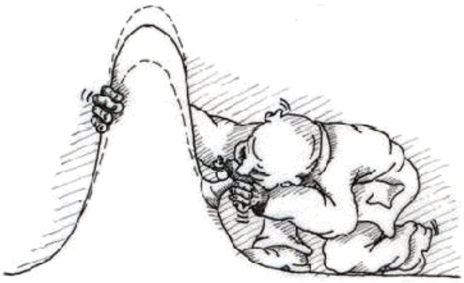
സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം $$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$= \frac{39.75^2}{14.75^3}$$

$$= 0.4924$$

$\mu_3 > 0$, ആകയാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആകുന്നു.

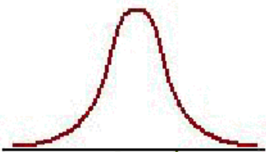
7.4 കർട്ടോസിസ് (Kurtosis)

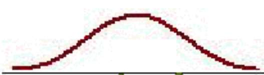


രണ്ടോ അതിലധികമോ വിതരണങ്ങൾക്ക് ഒരേ ശരാശരി, വ്യതിയാനം, സ്ക്യൂനത ഉണ്ടായിരിക്കാം എങ്കിലും അവയുടെ പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾ മോഡിന് ചുറ്റും കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നത് വ്യത്യസ്ത അളവിലായിരിക്കുന്നത് കാണാം. ആയതിനാൽ അവ വ്യത്യസ്ത ഉയരളവുകൾ (കൂർമത) കാണിക്കുന്നു. ഒരു ആവൃത്തി വക്രത്തിന്റെ ഉയർച്ചയുടെയോ പരപ്പിന്റെയോ അളവിനെ കർട്ടോസിസ് എന്ന് പറയുന്നു.

വിവിധതരം കർട്ടോസിസുകൾ (Types of Kurtosis)

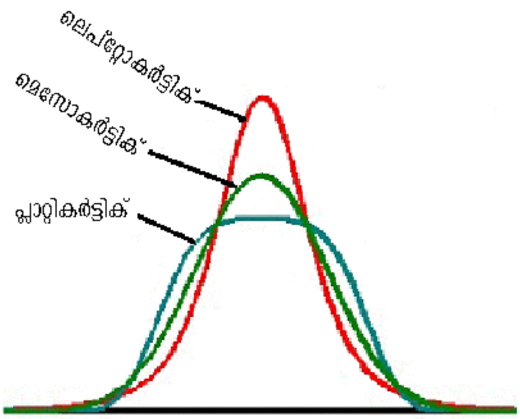
താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വക്രങ്ങൾ നോക്കുക.


ചിത്രം (1)


ചിത്രം (2)

ചിത്രം (3)

എല്ലാ വക്രങ്ങളും സമമിതമാണെങ്കിലും ഉയരളവ് (കൂർമത) വ്യത്യസ്തമായിരിക്കുന്നതായി കാണാം. ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ വക്രം മറ്റുള്ളവയേക്കാൾ കൂടുതൽ കൂർമതയുള്ളതാകുന്നു. ഇതിനെ ലെപ്റ്റോകർട്ടിക് (lepto kurtic) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ചിത്രം 2ൽ, വക്രം മറ്റുള്ളവയേക്കാൾ കുറവ് കൂർമത അഥവാ കൂടുതൽ പരപ്പ് ഉള്ളതാകുന്നു, അതിനെ പ്ലാറ്റികർട്ടിക് (platy kurtic) എന്നു വിളിക്കുന്നു. ചിത്രം 3ൽ, വക്രം കൂടുതൽ കൂർമ്മതയോ, കൂടുതൽ പരപ്പോ ഉള്ളതായി കാണുന്നില്ല. ഇങ്ങനെ മിതത്വ കൂർമതയുള്ള വക്രങ്ങളെ മെസോകർട്ടിക് (meso kurtic) എന്നു വിളിക്കുന്നു. മെസോകർട്ടിക് വക്രങ്ങൾ നോർമൽ വക്രം എന്നും അറിയപ്പെടാറുണ്ട്.



'കുമിയുക' അഥവാ, 'വീർക്കുക' എന്നർഥം വരുന്ന ഗ്രീക്ക് പദത്തിൽ നിന്നും ഉരുത്തിരിഞ്ഞുവന്ന പദമാണ് കർട്ടോസിസ്. വിഖ്യാതനായ ബ്രിട്ടീഷ് സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിഷ്യൻ വില്യം. എസ്. ഗോസറ്റ് തന്റെ ഗവേഷണപത്രമായ 'എറേഴ്സ് ഓഫ് റൂട്ടിൻ അനാലിസിസിൽ കർട്ടോസിസിനെക്കുറിച്ച് തമാശ രൂപേണ രേഖപ്പെടുത്തിയതിങ്ങനെയാണ്:- ചെറുവാലുകളുള്ള പ്ലാറ്റിപ്പസ് ജീവി പതുങ്ങി കിടക്കുന്നതുപോലെയുള്ള രൂപമാണ് പ്ലാറ്റി കർട്ടികിന്റേത്. ലെപ്റ്റോകർട്ടിക്കാകട്ടെ, നീളമേറിയ വാലുകളുള്ള രണ്ട് കംഗാരുക്കൾ മുഖാമുഖം നിൽക്കുന്നത് പോലെയുമാണ്. ഗോസറ്റ് വരച്ച രൂപം പുനരാവിഷ്കരിച്ചതാണ് മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്നത്.

7.5 കർട്ടോസിസിന്റെ അളവുകൾ (Measures of Kurtosis)

കർട്ടോസിസ് അളക്കുന്നതിനായി β_2 എന്ന ഗുണാങ്കം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

കർട്ടോസിസ് കാണുന്നതിനായി കാൾപിയേഴ്സൺ മറ്റൊരു ഗുണാങ്കം γ_2 (ഗാമാ രണ്ട്) നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$

$\beta_2 = 3$ (അതായത് $\gamma_2 = 0$) ആയാൽ വക്രം മെസോകർട്ടിക് ആകുന്നു.

$\beta_2 > 3$ (അതായത് $\gamma_2 > 0$) ആയാൽ വക്രം ലെപ്റ്റോകർട്ടിക് ആകുന്നു.

$\beta_2 < 3$ (അതായത് $\gamma_2 < 0$) ആയാൽ വക്രം പ്ലാറ്റികർട്ടിക് ആകുന്നു.

വിവരണം 7.14

ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാല് കേന്ദ്രീയ മൊമന്റുകൾ 0, 2.5, 0.7, 18.75 എന്നിങ്ങനെയാണ്. വിതരണത്തിന്റെ കർട്ടോസിസ് പരിശോധിക്കുക.

പരിഹാരം

$\mu_1=0$, $\mu_2=2.5$, $\mu_3=0.7$, $\mu_4=18.75$ എന്നിവ തന്നിരിക്കുന്നു

കർട്ടോസിസ് ഗുണാങ്കം , $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{18.75}{2.5^2} = 3$

$\beta_2 = 3$ ആയതിനാൽ വിതരണം മെസോകർട്ടിക് ആകുന്നു.

വിവരണം 7.15

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കവും കർട്ടോസിസ് ഗുണാങ്കവും കണക്കാക്കുകയും അഭിപ്രായം രേഖപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുക.

2,3,7,8,10

പരിഹാരം

x	$x - 6$	$(x - 6)^2$	$(x - 6)^3$	$(x - 6)^4$
2	-4	16	-64	256
3	-3	9	-27	81
7	1	1	1	1
8	2	4	8	16
10	4	16	64	256
30	0	46	-18	610

$$\bar{x} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\mu_1 = \frac{\sum(x-\bar{x})}{n} = 0 \text{ (എല്ലായിപ്പോഴും)}$$

$$\mu_2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} = \frac{46}{5} = 9.2$$

$$\mu_3 = \frac{\sum(x-\bar{x})^3}{n} = \frac{-18}{5} = -3.6$$

സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം , $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(-3.6)^2}{(9.2)^3} = 0.0166$

$\mu_3 < 0$ ആയതിനാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആകുന്നു.

കർട്ടോസിസ് ഗുണാങ്കം , $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{122}{9.2^2}$

$= 1.44$

$\beta_2 < 3$, ആയതിനാൽ വിതരണം പ്ലാറ്റികർട്ടിക് ആകുന്നു.

നമുക്ക് സംഗ്രഹിക്കാം

ഈ പാഠത്തിൽ സ്ക്യൂനത, കർട്ടോസിസ് എന്നീ ആശയങ്ങൾ അവതരിപ്പിച്ചു. സ്ക്യൂനത എന്നത് സമമിതത്തിന്റെ അസാന്നിധ്യവും കർട്ടോസിസ് എന്നത് കൂർമതയുടെ അളവും ആകുന്നു. ആകെ രണ്ട് തരം സ്ക്യൂനതകൾ ഉണ്ട് പോസ്റ്റീവ് സ്ക്യൂനതയും, നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനതയും. ഒരു ആവൃത്തി വക്രത്തിന് മോഡിന്റെ വലതുഭാഗത്തുള്ള വാലിന്റെ ഭാഗത്തിനു നീളം കൂടുതലാണെങ്കിൽ ആ വക്രത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആയിരിക്കും. നേരെമറിച്ച് മോഡിന്റെ ഇടത് ഭാഗത്തുള്ള വാലിന്റെ നീളം കൂടുതലാണെങ്കിൽ അതിന്റെ സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആയിരിക്കും. ഒരു വക്രം താരതമ്യേന ഇടുങ്ങിയതും മുകളിലോട്ട് കൂർമതയുമുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ ലെപ്റ്റോകർട്ടിക് എന്നു വിളിക്കാം. കൂടുതൽ പരന്ന മുകൾഭാഗമുള്ള വക്രത്തെ പ്ലാറ്റികർട്ടിക് എന്നു വിളിക്കുന്നു. കൂടുതൽ കൂർമതയോ, കൂടുതൽ പരന്ന മുകൾഭാഗമോ ഇല്ലാത്ത വക്രത്തെ മെസോകർട്ടിക് എന്നു വിളിക്കുന്നു.

പലതരം സ്ക്യൂനതകളും കർട്ടോസിസുകളും ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യപ്പെട്ടു. ഒരു ആവൃത്തി വക്രം സമമിതമല്ലാതാകുമ്പോൾ അതിലെ ചരത്തിന്റെ വിതരണം എത്രമാത്രം അകന്നിരിക്കുന്നുവെന്നും അകൽച്ച ഏത് ദിശയിലാണെന്നും സ്ക്യൂനതയുടെ അളവുകൾ സൂചന നൽകുന്നു. ആവൃത്തി വക്രത്തിന്റെ കൂർമത സൂചിപ്പിക്കുന്നതിന് കർട്ടോസിസ് അളവുകൾ സഹായകമാണ്. ഒരു സമമിത വക്രത്തിന്റെ കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കവും ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കവും മൊമന്റ് സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കവും പൂജ്യമായിരിക്കും.

പഠനനേട്ടങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പഠിക്കുന്നതിലൂടെ പഠിതാവ്:

- സമമിത വിതരണവും, അസമമിത വിതരണവും വേർതിരിച്ചറിയുന്നു.
- വിതരണങ്ങളുടെ സ്ക്യൂനത തിരിച്ചറിയുന്നു.
- സ്ക്യൂനതയുടെ സ്വഭാവം നിർണയിക്കുകയും വ്യാഖ്യാനിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.
- വിതരണങ്ങളുടെ കർട്ടോസിസ് വിശദീകരിക്കുന്നു.
- വിവിധതരം കർട്ടോസിസുകളുടെ നിർണയവും വ്യാഖ്യാനവും നടത്തുന്നു.

വിലയിരുത്തൽ ഇനങ്ങൾ

1. ഒരു പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് താഴെപറയുന്നതിൽ ഏതാണ് എല്ലായ്പ്പോഴും ശരിയായത്?

   a. $Q_1 + Q_3 > 2Q_2$ b. $Q_1 + Q_2 > 2Q_3$

   c. $Q_1 - Q_3 > Q_2$ d. $Q_3 - Q_1 > Q_2$

2. നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് താഴെപറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് ശരി?

   a. മാധ്യം =മധ്യാങ്കം =മോഡ് b. മധ്യാങ്കം < മാധ്യം < മോഡ്

   c. മാധ്യം < മധ്യാങ്കം < മോഡ് d. മോഡ് < മാധ്യം < മധ്യാങ്കം

3. നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള വിതരണത്തിൽ കൂടുതൽ പ്രാപ്താങ്കങ്ങളും വിതരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നത്.

   a. ഇടത് വാൽഭാഗം b. വലത് വാൽഭാഗം

   c. നടുവിൽ d. എവിടെ വേണമെങ്കിലും

4. ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കത്തിന്റെ പരിധികൾ താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏത്?

   a. ±1 b. ±2 c. ±3 d. 0 മുതൽ 1വരെ

5. μ_2=7, μ_4=98 ആയാൽ വക്രം .... ആകുന്നു

   a. മെസോകർട്ടിക് b. പ്ലാറ്റികർട്ടിക്

   c. പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത d. ലെപ്റ്റോകർട്ടിക്

6. ഒരു സമമിത വിതരണത്തിന് .... ആയിരിക്കും.

   a. $\beta_1=0$ b. $\beta_1<0$ c. $\beta_1>0$ d. $\beta_1 \neq 0$

7. ഒരു ഡാറ്റയുടെ മൂന്നാമത്തെ സെൻട്രൽ മൊമന്റ് -1.6 ആണെങ്കിൽ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം .... ആയിരിക്കും.

   a. പൂജ്യം b. പൂജ്യത്തിനു താഴെ

   c. പൂജ്യത്തിന് മുകളിൽ d. തീരുമാനിക്കാൻ കഴിയില്ല.

8. ഒരു സാമ്പത്തിക പഠനത്തിന്റെ ഭാഗമായി, 30,000 വരെ സമ്പാദ്യമുള്ള ആളുക ളുടെ സാമ്പിൾ പരിഗണിക്കുമ്പോൾ താഴെ പറയുന്ന വിവരങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

   30 % ആളുകൾ 5000 രൂപയിൽ താഴെ സമ്പാദിക്കുന്നു.

   95% ആളുകൾ 15000 രൂപയിൽ താഴെ സമ്പാദിക്കുന്നു.

   98% ആളുകൾ 24000 രൂപയിൽ താഴെ സമ്പാദിക്കുന്നു.

   എങ്കിൽ ഡാറ്റയുടെ ആവൃത്തിവക്രം ..... ആയിരിക്കും.

   a. സമമിതം b. പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത

   c. നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത d. ഒന്നും കണ്ടെത്താനാവില്ല.

9. താഴെപറയുന്നവയിൽ ശരിയല്ലാത്ത പ്രസ്താവനയേത്?

   a. ഒരു സമമിത വിതരണത്തിന് മാധ്യം = മധ്യാങ്കം = മോഡ്

   b. മധ്യാങ്കം 24 ഉം മാധ്യം 26 ഉം ആണെങ്കിൽ സ്ക്യൂനത പോസിറ്റീവ് ആയി രിക്കും

c. പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള ഡാറ്റയ്ക്ക് β_1=0 ആയിരിക്കും.

d. β_2 =3 ആണെങ്കിൽ വിതരണം മെസോ കർട്ടിക് ആകുന്നു.

10. വൃദ്ധ ജനങ്ങളുടെ വയസ്സുകളുടെ വിതരണം ഒരു ––––– സ്ക്യൂനത ഉള്ള വിതരണത്തിന് ഉദാഹരണമാണ്.

11. β_2 >3 ആണെങ്കിൽ വക്രം .... ആകുന്നു.

12. $(Q_3 – Q_2) < (Q_2 – Q_1)$ ആണെങ്കിൽ സ്ക്യൂനത .... ആകുന്നു.

13. കാൾ പിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം 0.40, മാനകവ്യതിയാനം 8, മാധ്യം 30 എന്നിങ്ങനെയാണെങ്കിൽ വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

ഉത്തരം: മോഡ് = 26.8

14. 10 പ്രാപ്താങ്കങ്ങൾക്ക് $\sum x=452$, $\sum x^2=24270$, മോഡ് =43.7 പിയേർഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക.

ഉത്തരം : മാധ്യം =45.2 , SD=19.6 , S_K=0.08

15. രണ്ട് ഗ്രാമങ്ങളിലെ വരുമാനത്തിന്റെ വിതരണം താഴെ പറയുന്ന അളവുകൾ വ്യക്തമാക്കുന്നു.

	മാധ്യം	മോഡ്	മാനക വ്യതിയാനം
ഗ്രാമം I	500	475	10
ഗ്രാമം II	600	590	5

രണ്ടു വിതരണങ്ങളുടെയും സ്ക്യൂനതയുടെ സ്വഭാവം എന്തായിരിക്കും? ഏത് വിതരണമാണ് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉള്ളത്?

ഉത്തരം: പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത, ഒന്നാമത്തെ ഗ്രാമത്തിലെ വിതരണമാണ് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉള്ളത്.

16. ഒരു ക്ലാസിലെ 7 വിദ്യാർഥികൾക്ക് ഇക്കണോമിക്സ്, ഇംഗ്ലീഷ്, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് എന്നീ 3 വിഷയങ്ങളിൽ പരീക്ഷ നടത്തി. അവർ നേടിയ മാർക്കുകൾ താഴെ പട്ടികയിൽ തന്നിരിക്കുന്നു.

മാർക്കുകൾ	വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം		
	ഇക്കണോമിക്സ്	ഇംഗ്ലീഷ്	സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ്
12	2	2	1
14	5	12	3
16	7	8	5
18	9	6	6
20	7	5	8
22	5	3	12
24	2	1	2
മാധ്യം	18	16.6	18.96
മധ്യാങ്കം	18	16	20
മോഡ്	18	14	22

a. പോസറ്റീവ് സ്ക്യൂനത, നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത, സമമിത വിതരണങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുക.

b. മൂന്ന് വിതരണങ്ങളുടേയും ഏകദേശ ആവൃത്തിവക്രം വരച്ച് മാധ്യം, മധ്യാങ്കം, മോഡ് എന്നിവയുടെ സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കുക.

ഉത്തരം : ഇക്കണോമിക്സ് - സമമിതം, ഇംഗ്ലീഷ് - പോസറ്റീവ്, സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് - നെഗറ്റീവ്

17. ഒരു ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ മാധ്യം =100, സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം =0.2 വ്യതിയാന ഗുണാങ്കം (CV) =35 എങ്കിൽ വിതരണത്തിന്റെ മോഡ് കാണുക.

ഉത്തരം : (σ=35, മോഡ് =93)

18. ഒരു ഫാക്ടറിയിലെ തൊഴിലാളികളുടെ വേതനങ്ങളുടെ വിതരണത്തിന്റെ ഉയർന്ന ചതുരംശത്തിന്റേയും താഴ്ന്ന ചതുരംശത്തിന്റേയും വ്യത്യാസം 15 ഉം, അവയുടെ തുക 35 ഉം, മധ്യാങ്കം 20 ഉം ആകുന്നു. സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക.

ഉത്തരം (S_B=0.33)

19. ഒരു കൂട്ടം വിദ്യാർഥികളുടെ സ്കോറുകളുടെ വിതരണം സമമിതം ആണെന്ന് കരുതുക. Q_1, Q_3 എന്നിവ യഥാക്രമം 20, 40 ആണെങ്കിൽ മധ്യാങ്ക സ്കോർ എത്രയാകും? മധ്യാങ്ക സ്കോർ 35 ആയാൽ വിതരണത്തിന്റെ സ്ക്യൂനത എന്തായിരിക്കും?

ഉത്തരം : മധ്യാങ്കം =30, S_k= -0.5

20. പ്രസിഡൻസി കോളേജിലെ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സ് വിഭാഗത്തിലെ ഏഴ് അസിസ്റ്റൻഡ് പ്രൊഫസർമാരുടെ മാസശമ്പളം (ആയിരത്തിൽ) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

26, 30, 32, 26, 29, 28, 60.

a) മാധ്യം b) മോഡ് c) സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം എന്നിവ കാണുക

ഉത്തരം : മാധ്യം =32.57 മോഡ് =26, σ=11.2 , S_k=0.59.

21. ഒരു പ്രത്യേക ദിവസം ആശുപത്രിയിൽ 10 നവജാതശിശുക്കളുടെ ഭാരം (കി.ഗ്രാമിൽ) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. 2, 3, 3, 3, 4, 2, 2.5, 3.5, 3.7, 3

a) മാധ്യം , മോഡ്, മാനക വ്യതിയാനം എന്നിവ കാണുക.

b) ഈ ഡാറ്റയ്ക്ക് സ്ക്യൂനത ഉണ്ടോ? കാരണം വിശദമാക്കുക.

ഉത്തരം: മാധ്യം =2.97, മോഡ് =3, σ=0.63 , S_k= -0.048

22. ഒരു ഹയർസെക്കണ്ടറി സ്കൂളിലെ 100 വിദ്യാർഥികളുടെ ഉയരം (ഇഞ്ചുകളിൽ) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

ക്ലാസ്സ് അന്തരം	വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം
60 മുതൽ 62 വരെ	5
62 മുതൽ 64 വരെ	18
64 മുതൽ 66 വരെ	42
66 മുതൽ 68 വരെ	20
68 മുതൽ 70 വരെ	8
70 മുതൽ 72 വരെ	7

a) മാധ്യം b) മോഡ് c) സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : മാധ്യം =65.58, മോഡ് =65.04, σ=2.41 , S_k=0.23

23. 50 തൊഴിലാളികളുള്ള കമ്പനിയുടെ മേധാവി ആ കമ്പനിയിലെ തൊഴിലാളികളുടെ അവധിയെടുക്കൽ രീതി പഠിക്കാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. തൊഴിലാളികളുടെ അവധിയെടുക്കൽ ദിനങ്ങളുടെ വിതരണം ചുവടെ പറയും പ്രകാരമാണ്.

അവധിയെടുത്ത ദിനങ്ങളുടെ എണ്ണം	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
0 - 2	15
3 - 5	20
6 - 8	8
9 - 11	5
12 - 14	2

a) മാധ്യം b) മാനകവ്യതിയാനം

c) കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം എന്നിവ കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : മാധ്യം =4.54, മോഡ് =3.59, σ=3.27 , S_k=0.29

24. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

കാലാവധി (മണിക്കൂറിൽ)	80-160	160-240	240-320	320-400	400-480
ട്യൂബുകളുടെ എണ്ണം	24	90	45	12	30

കാലാവധി (മണിക്കൂറിൽ)	480-560	560-640	640-720
ട്യൂബുകളുടെ എണ്ണം	120	39	30

മാധ്യം = 403.1, മോഡ് = 522.1, σ = 174.2 , S_k = -0.68

25. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക

മാർക്കുകൾ	0 ത്തിന് മുകളിൽ	10 ന് മുകളിൽ	20 ന് മുകളിൽ	30 ന് മുകളിൽ	40 ന് മുകളിൽ
വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം	140	130	115	95	80

മാർക്കുകൾ	50 ന് മുകളിൽ	60 ന് മുകളിൽ	70 ന് മുകളിൽ	80 ന് മുകളിൽ
വിദ്യാർഥികളുടെ എണ്ണം	70	30	14	0

ഉത്തരം : മാധ്യം = 43.14, മോഡ് = 55.56, σ = 20.96 , S_k = -0.59

26. ചതുരംശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

മധ്യവില	:	15	20	25	30	35	40
ആവൃത്തി	:	30	28	25	24	10	21

ഉത്തരം : Q_1=18.3, Q_2=24.7, Q_3=31.8,S_B=0.052

27. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഡാറ്റയുടെ ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

കാലാവധി (മാസത്തിൽ)	<87.5	<112.5	<137.5	<162.5	<187.5	<212.5	<237.5	<262.5
ബൾബുകളുടെ എണ്ണം	35	75	123	223	348	428	478	500

ഉത്തരം : Q_1=138, Q_2=167.9, Q_3=195.94, S_B= -0.03

28. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ട് ശ്രേണികൾക്കും കാൾപിയേഴ്സൺ സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കാണുക. തുടർന്ന് ഏതിനാണ് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

വയസ്സ് (വർഷത്തിൽ)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം	
	സ്കൂൾ A	സ്കൂൾ B
6	3	1
8	9	10
9	15	9
10	8	7
11	5	3
ആകെ	40	30

ഉത്തരം

A. മാധ്യം =9, മോഡ് =9, σ=1.26, ,S_k= 0

B. മാധ്യം =9, മോഡ് =8, σ=1.13, S_k= 0.88. B യ്ക്ക് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

29. 3 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 3 മാർക്ക് വീതം

5 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 5 മാർക്ക് വീതം

8 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 7 മാർക്ക് വീതം

6 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 8 മാർക്ക് വീതം

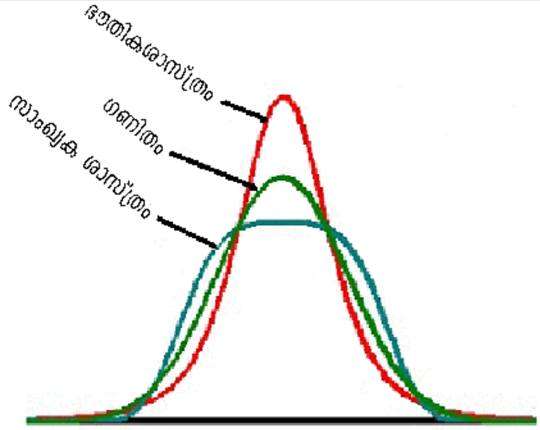
2 വിദ്യാർഥികൾക്ക് 10 മാർക്ക് വീതം ലഭിച്ചു. എങ്കിൽ വിദ്യാർഥികൾക്ക് ലഭ്യമായ മാർക്കുകളുടെ ബൗളി സ്ക്യൂനത ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : Q_1=5, Q_2=7, Q_3=8, S_B= -0.33

30. ഒരു ആവൃത്തി വിതരണത്തിന്റെ 2-ാമത്തേയും 4- നാലാമത്തേയും സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം 2, 16 ആകുന്നു. വിതരണത്തിന്റെ കർട്ടോസിസ് പ്രകൃതം എന്തായിരിക്കും.

ഉത്തരം: β_2 =4 ലെപ്റ്റോകർട്ടിക്.

31. മൂന്നു വിഷയങ്ങളിൽ ലഭ്യമായ മാർക്കുകളുടെ ആവൃത്തി വക്രം തന്നിരിക്കുന്നു. വിവിധ തരം കർട്ടോസിസുകൾ തിരിച്ചറിയുക.



ഉത്തരം : ഭൗതികശാസ്ത്രം - ലെപ്റ്റോകർട്ടിക്

ഗണിതം - മെസോകർട്ടിക്

സാംഖ്യകശാസ്ത്രം - പ്ലാറ്റികർട്ടിക്

32. ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാല് കേന്ദ്ര മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം 0, 9.56, -3.29, 215.72 എന്നിങ്ങനെയാണ്. സ്ക്യൂനതയുടെയും കർട്ടോസിന്റെയും അളവുകൾ കണക്കാക്കുക. വക്രത്തിന്റെ സ്വഭാവം പ്രസ്താവിക്കുക.

ഉത്തരം : β_1=0.012, സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ്, β_2 =2.36, പ്ലാറ്റി കർട്ടിക്

33. ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാല് മൊമന്റുകൾ (മാധ്യം അടിസ്ഥാനമാക്കി) യഥാക്രമം 0, 16, -64, 162 ആകുന്നു. സ്ക്യൂനതയുടെയും കർട്ടോസിസിന്റെയും മൊമന്റ് ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : β_1=1, സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ്, β_2 =0.633 പ്ലാറ്റികർട്ടിക്.

34. രണ്ട് വിതരണങ്ങളുടെ രണ്ടാം സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം 9, 16 എന്നിങ്ങനെ ആകുന്നു. അവയുടെ മൂന്നാം സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം - 8.1, -12 ആകുന്നു. രണ്ട് വിതരണങ്ങളിൽ ഏതിനാണ് ഇടത്തോട് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉള്ളതെന്ന് വിശദമാക്കുക.

ഉത്തരം :ഒന്നാം ഗ്രൂപ്പ് : β_1=0.9, γ_1 = -0.3

രണ്ടാം ഗ്രൂപ്പ്: β_1=0.04, γ_1 = -0.2

ഒന്നാം ഗ്രൂപ്പിന് കൂടുതൽ സ്ക്യൂനത ഉണ്ട്.

35. ഒരു വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ നാല് കേന്ദ്ര മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം 0, 9.2, -3.6, 122 എന്നിങ്ങനെയാണ്. വിതരണത്തിന്റെ കർട്ടോസിസ് ഗുണാങ്കം കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം : β_2 =1.44, പ്ലാറ്റികർട്ടിക്

36. മൂന്ന് വിതരണങ്ങളുടെ β_1 , β_2 എന്നീ വിലകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

	β_1	β_2
ഒന്നാം ഗ്രൂപ്പ്	0	0
രണ്ടാം ഗ്രൂപ്പ്	0	3
മൂന്നാം ഗ്രൂപ്പ്	3	9

ഇവയിൽ മെസോകർട്ടിക് വിതരണം തിരിച്ചറിയുക.

ഉത്തരം : രണ്ടാം ഗ്രൂപ്പ്

37. ഒരു നെഗറ്റീവ് സ്ക്യൂനത ഉള്ള വിതരണത്തിന്റെ β_1 ന്റെയും μ_2 യുടെയും വില കൾ യഥാക്രമം 9,4 ആകുന്നു. γ_1 ന്റെയും μ_3 യുടെയും വിലകൾ കാണുക.

ഉത്തരം : $\gamma_1 = {}^{-}3$, $\mu_3 = {}^{-}24$ (സ്ക്യൂനത നെഗറ്റീവ് ആയതിനാൽ)

38. ഒരു മെസോകർട്ടിക് വിതരണത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ രണ്ട് സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ യഥാക്രമം 0, 2.5 ആകുന്നു. നാലാമത്തെ സെൻട്രൽ മൊമന്റ് കാണുക.

ഉത്തരം: $\mu_4 = 18.75$

39. ആദ്യത്തെ നാല് ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ആദ്യത്തെ നാല് സെൻട്രൽ മൊമന്റുകൾ കണക്കാകുക. കൂടാതെ സ്ക്യൂനസിന്റെയും കർട്ടോസിസിന്റെയും ഗുണാങ്കങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

ഉത്തരം: $\mu_2 = 5$, $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 41$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1.64$

40. 3,6,8,10,18 എന്നീ ഡാറ്റയുടെ കർട്ടോസിസ് ഗുണാങ്കം കാണുക. ഡാറ്റയുടെ സ്വഭാവ ത്തെക്കുറിച്ച് അഭിപ്രായം രേഖപ്പെടുത്തുക.

ഉത്തരം : $\mu_2 = 25.6$, $\mu_3 = 97.2$, $\mu_4 = 1588$, $\beta_2 = 2.42$, പ്ലാറ്റികർട്ടിക്.

ഉത്തരങ്ങൾ

1) a	2) c	3) a	4) a	5) b
6) a	7) b	8) c	9) c	

10) പോസിറ്റീവ് സ്ക്യൂനത 11) ലെപ്റ്റോകർട്ടിക് 12) നെഗറ്റീവ്.