# 7

# द्विपद प्रमेय
## (Binomial Theorem)

### 7.01 प्रस्तावना (Introduction):

व्यंजक $(a+b)^n$ के प्रसार की जानकारी प्राचीन भारतीय गणितज्ञों को थी। तीसरी शताब्दी ई॰ पू॰ पिंगल ने गुणांकों के विन्यास का एक आरेख रूप प्रदान किया था, जिसे मेरूप्रस्त्र कहते थे। सोलहवीं शताब्दी में **वामवेली** ने भी $(a+b)^n, n \le 7$ तक के प्रसार के गुणांक ज्ञात किये थे। 10 घात तक के गुणांकों की जानकारी भी सत्रहवीं शताब्दी के प्रारंभ में **आत्रेद** ने दी थीं।

इसके बाद फ्रांसीसी गणितज्ञ बी, पास्कल ने द्विपद प्रसार के गुणांकों को ज्ञात करने के लिए एक त्रिभुज का निर्माण किया जिसको पास्कल त्रिभुज कहते हैं, जो निम्नलिखित प्रकार का हैः

पास्कल त्रिभुज

| घात | गुणांक |
|---|---|
| n = 1 | 1 1 |
| n = 2 | 1 2 1 |
| n = 3 | 1 3 3 1 |
| n = 4 | 1 4 6 4 1 |
| n = 5 | 1 5 10 10 5 1 |
| n = 6 | 1 6 15 20 15 6 1 |
| n = 7 | 1 7 21 35 35 21 7 1 |

पास्कल त्रिभुज में प्रत्येक पंक्ति के प्रारंभ और अंत में 1 हैं। प्रारंभ और अंत में समान दूरी पर स्थित संख्याएँ बराबर हैं किसी भी पंक्ति की कोई भी संख्या उससे ऊपर वाली पंक्ति की उन दो संख्याओं को जोड़ने से प्राप्त होती है, जो संख्या के बायें और दायें स्थित है।

### 7.02 द्विपद व्यंजक (Binomial expression) :

दो पद वाला कोई भी बीजीय व्यंजक, द्विपद व्यंजक अथवा केवल द्विपद कहलाता है। दोनों पद परस्पर धन अथवा ऋण चिह्न द्वारा जुड़े होते हैं।

**उदाहरणार्थ :**

**(i)** $x+a$, जहाँ $x$ प्रथम पद तथा $a$ द्वितीय पद है।

**(ii)** $x^2-9$ आदि

**द्विपद प्रमेय (Binomial theorem) :**

जिस सूत्र के द्वारा किसी द्विपद व्यंजक के किसी भी घात का विस्तार (expansion) एक श्रेणी के रूप में किया जाता है, उस सूत्र को द्विपद प्रमेय कहते हैं।

**द्विपद गुणांक (Binomial coefficient) :**

द्विपद व्यंजक $(x+a)^n$ के विस्तार में $x$ की विभिन्न घातों के गुणांक द्विपद गुणांक कहलाते हैं।

## 7.03 धन पूर्णांक घातांक के लिए द्विपद प्रमेय (Binomial theorem for positive index)

$$(x+a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 + .... + {}^nC_r\, x^{n-r}a^r + .... + {}^nC_n\, a^n$$

**उपपत्ति :** इस प्रमेय को हम गणितीय आगमन सिद्धांत से सिद्ध करेंगे।

$$(x+a)^1 = x+a = {}^1C_0\, x^1 + {}^1C_1\, x^{1-1}a \qquad (1)$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$= {}^2C_0\, x^2 + {}^2C_1\, x^{2-1}a + {}^2C_2\, x^{2-2}a^2 \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से स्पष्ट है कि प्रमेय $n = 1$ एवं 2 के लिए सत्य है। माना कि प्रमेय किसी धन पूर्णांक $n = m$ के लिए सत्य है।

तब, $$(x+a)^m = {}^mC_0\, x^m + {}^mC_1\, x^{m-1}a + {}^mC_2\, x^{m-2}a^2 + .... + {}^mC_r\, x^{m-r}a^r + .... + {}^mC_m a^m \qquad (3)$$

दोनों पक्षों को $(x+a)$ से गुणा करने पर,

$$(x+a)(x+a)^m = (x+a)\left[{}^mC_0\, x^m + {}^mC_1\, x^{m-1}a + {}^mC_2\, x^{m-2}a^2 + ..... + {}^mC_r\, x^{m-r}a^r + ..... + {}^mC_m\, a^m\right]$$

$$(x+a)^{m+1} = x\left[{}^mC_0\, x^m + {}^mC_1\, x^{m-1}a + {}^mC_2\, x^{m-2}a^2 + .... + {}^mC_r\, x^{m-r}a^r + .... + {}^mC_m\, a^m\right] +$$

$$a\left[{}^mC_0\, x^m + {}^mC_1\, x^{m-1}a + {}^mC_2\, x^{m-2}a^2 + .... + {}^mC_r\, x^{m-r}a^r + .... + {}^mC_m\, a^m\right]$$

$$= {}^mC_0\, x^{m+1} + \left({}^mC_1 + {}^mC_0\right)x^m a + \left({}^mC_2 + {}^mC_1\right)x^{m-1}a^2$$

$$+\left({}^mC_3 + {}^mC_2\right)x^{m-2}a^3 + .... + \left({}^mC_r + {}^mC_{r-1}\right)x^{m-r+1}a^r + .... + {}^mC_m\, a^{m+1}$$

$\because$ $\quad {}^mC_1 + {}^mC_0 = {}^{m+1}C_1,$

$\quad {}^mC_2 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_2,$

..... ..... .....

$\quad {}^mC_r + {}^mC_{r-1} = {}^{m+1}C_r$

एवं $\quad {}^mC_m = {}^{m+1}C_{m+1} = {}^mC_0 = {}^{m+1}C_0 = 1$

अतः $$(x+a)^{m+1} = {}^{m+1}C_0\, x^{m+1} + {}^{m+1}C_1\, x^m a + {}^{m+1}C_2\, x^{m-1}a^2 + .... +$$

$$ {}^{m+1}C_r\, x^{m-r+1}a^r + .... + {}^{m+1}C_{m+1}\, a^{m+1} \qquad (4)$$

(4) से स्पष्ट है कि प्रमेय $n = m+1$ के लिए भी सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत से यह प्रमेय प्रत्येक धन पूर्णांक के लिए सत्य है। अर्थात् $n$ कोई धनात्मक पूर्णांक हो, तब

$$(x+a)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 + ... + {}^nC_r\, x^{n-r}a^r + ... + {}^nC_n\, a^n$$

## 7.04 द्विपद प्रमेय के अन्य महत्त्वपूर्ण रूपः (Various important forms of binomial theorem)

$$(x+a)^n = x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 + ... + {}^nC_r\, x^{n-r}a^r + ... + a^n \qquad (1)$$

(1) में $a$ के स्थान $(-a)$ प्रतिस्थापित करने पर

$$(x-a)^n = x^n - {}^nC_1\, x^{n-1}a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 - ... + (-1)^r\, {}^nC_r\, x^{n-r}a^r + ... + (-1)^n\, a^n \qquad (2)$$

(1) में $a$ तथा $x$ को परस्पर बदलने पर,

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + ... + {}^nC_r\, a^{n-r}x^r + ... + x^n \qquad (3)$$

(3) में $x$ के स्थान पर $(-x)$ रखने पर,

$$(a-x)^n = a^n - {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \ldots + (-1)^r a^{n-r}x^r + \ldots + (-1)^n x^n \quad (4)$$

(1) में $x = 1$ तथा $a = x$ रखने पर,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^r + \ldots + x^n \quad (5)$$

(1) में $x = 1$ तथा $a = -x$ रखने पर,

$$(1-x)^n = 1 - {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 - \ldots + (-1)^r\, {}^nC_r\, x^r + \ldots + (-1)^n x^n \quad (6)$$

## दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण 1:** द्विपद प्रमेय से $(\mathbf{2x + 3y})^{\mathbf{5}}$ का प्रसार कीजिए।

**हल :** यहाँ प्रथम पद = $2x$, द्वितीय पद = $3y$, तथा $n = 5$ है। अतः

$$(2x+3y)^5 = (2x)^5 + {}^5C_1(2x)^4(3y) + {}^5C_2(2x)^3(3y)^2 + {}^5C_3(2x)^2(3y)^3 + {}^5C_4(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$

$$= (2x)^5 + 5(2x)^4(3y) + 10(2x)^3(3y)^2 + 10(2x)^2(3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5.$$

**उदाहरण 2:** $\left(\mathbf{2x + \frac{1}{x}}\right)^{\mathbf{4}}$ का प्रसार कीजिए।

**हलः** $$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^4 = (2x)^4 + {}^4C_1(2x)^3\left(\frac{1}{x}\right) + {}^4C_2(2x)^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^4C_3(2x)\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$= (2x)^4 + 4(2x)^3\left(\frac{1}{x}\right) + 6(2x)^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4(2x)\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$= 16x^4 + 32x^2 + 24 + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^4}.$$

**उदाहरण 3:** $(\mathbf{1+\sqrt{5}})^{\mathbf{5}} + (\mathbf{1-\sqrt{5}})^{\mathbf{5}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हलः** $$(1+\sqrt{5})^5 = 1 + {}^5C_1(\sqrt{5}) + {}^5C_2(\sqrt{5})^2 + {}^5C_3(\sqrt{5})^3 + {}^5C_4(\sqrt{5})^4 + (\sqrt{5})^5$$

$$= 1 + 5\sqrt{5} + 50 + 50\sqrt{5} + 125 + 25\sqrt{5} \quad (1)$$

तथा $$(1-\sqrt{5})^5 = 1 - {}^5C_1(\sqrt{5}) + {}^5C_2(\sqrt{5})^2 - {}^5C_3(\sqrt{5})^3 + {}^5C_4(\sqrt{5})^4 - (\sqrt{5})^5$$

$$= 1 - 5\sqrt{5} + 50 - 50\sqrt{5} + 125 - 25\sqrt{5} \quad (2)$$

(1) तथा (2) का योग करने पर,

$$(1+\sqrt{5})^5 + (1-\sqrt{5})^5 = 2[1 + 50 + 125]$$

$$= 2[176] = 352$$

**उदाहरण 4:** द्विपद प्रमेय से $(10\cdot1)^5$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हलः** $(10\cdot1)^5 = (10+\cdot1)^5$

$$= (10)^5 + {}^5C_1(10)^4(\cdot1) + {}^5C_2(10)^3(\cdot1)^2 + {}^5C_3(10)^2(\cdot1)^3 + {}^5C_4(10)(\cdot1)^4 + (\cdot1)^5$$

$$= 100000 + 5000 + 100 + 1 + \cdot005 + \cdot00001 = 105101\cdot00501$$

**उदाहरण 5:** $(x+a)^n$ के विस्तार में यदि **A** विषम पदों का योग तथा **B** सम पदों का योग हो, तो सिद्ध कीजिए:

**(i)** $\left(x^2-a^2\right)^n = A^2 - B^2,$ **(ii)** $(x+a)^{2n} - (x-a)^{2n} = 4AB$

**हल: (i)** $(x+a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + {}^nC_3 x^{n-3} a^3 + {}^nC_4 x^{n-4} a^4 + \ldots + a^n$

$= \left[x^n + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + {}^nC_4 x^{n-4} a^4 + \ldots\right] + \left[{}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_3 x^{n-3} a^3 + \ldots\right]$

= [सभी विषम पदों का योग] + [सभी सम पदों का योग]

$= A + B$ (1)

इसी प्रकार, $(x-a)^n = A - B$ (2)

(1) और (2) को गुणा करने पर,

$$(x+a)^n (x-a)^n = (A+B)(A-B)$$

या $\left[(x+a)(x-a)\right]^n = A^2 - B^2$ या $\left(x^2-a^2\right)^n = A^2 - B^2$

**(ii)** पुनः $(x+a)^{2n} - (x-a)^{2n} = \left[(x+a)^n\right]^2 - \left[(x-a)^n\right]^2$

$$= \left[(x+a)^n + (x-a)^n\right]\left[(x+a)^n - (x-a)^n\right]$$

$$= \left[(A+B)+(A-B)\right]\left[(A+B)-(A-B)\right] = [2A][2B] = 4AB$$

### प्रश्नमाला 7.1

निम्न (प्रश्न 1 से 5 तक) में प्रत्येक व्यंजक का प्रसार कीजिये।

1. $(2-x)^3$ 2. $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)^5$ 3. $\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{x}\right)^6$ 4. $(3x+2y)^4$ 5. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{9}{x}}\right)^6$

द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके निम्नलिखित (प्रश्न 6–9) का मान ज्ञात कीजिये।

6. $(96)^3$ 7. $(101)^4$ 8. $(99)^5$ 9. $(1\cdot1)^6$

10. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताइए कौन सी संख्या बड़ी है $(1\cdot1)^{10000}$ या 1000.

11. $(a+b)^4-(a-b)^4$ का विस्तार कीजिए। इसका प्रयोग करके $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4$ का मान ज्ञात कीजिये।

## 7.05 द्विपद प्रसार में व्यापक पद (General term in binomial expansion)

प्रसार में $(r+1)$ वें पद को व्यापक पद कहते हैं। इसे $T_{r+1}$ से व्यक्त किया जाता है।

अर्थात् $T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r} a^r$

इसमें $r = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ रखकर प्रसार के प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ पद, ..... ज्ञात किए जा सकते हैं, जिन्हें क्रमशः $T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$ से व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार, $T_1 = {}^nC_0\, x^n$

$T_2 = {}^nC_1\, x^{n-1} a$

$T_3 = {}^nC_2\, x^{n-2} a^2$

$T_4 = {}^nC_3\, x^{n-3} a^3$

........................

**धन पूर्णांक घातांक के लिए द्विपद प्रसार से संबंधित महत्त्वपूर्ण जानकारियाँ:**

(i) $(x+a)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या, घात से एक अधिक अर्थात् $(n+1)$ होती है।

(ii) प्रसार में $x$ की घात क्रमशः घटती जाती है और $a$ की घात क्रमशः बढ़ती जाती है। प्रत्येक पद मे $x$ और $a$ की घाताकों का योग द्विपद के घातांक $(n)$ के बराबर होता है।

(iii) प्रसार के प्रारंभ और अंत से समान दूरी वाले पदों के गुणांक बराबर होते हैं।

अर्थात् ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1, {}^nC_1 = {}^nC_{n-1}, {}^nC_2 = {}^nC_{n-2}, \ldots\ldots$

${}^nC_r = {}^nC_{n-r}, (1 \le r \le n)$

## 7.06 $(x+a)^n$ के प्रसार में मध्य पद (Middle term in the expansion of $(x+a)^n$)

**1.** यदि घात $n$ सम हैं, तो प्रसार में पदों की संख्या विषम होगी, इसलिए मध्य पद एक ही होगा।

$$\text{मध्य पद} = \left(\frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{n+2}{2}\right) = \left[\frac{(n+1)+1}{2}\right]$$

$$= \frac{\text{प्रसार में पदों की संख्या} + 1}{2} \text{ वां पद}$$

**2.** यदि घात $n$ विषम है, तो प्रसार में पदों की संख्या सम होगी, इसलिए मध्य पद दो होंगे।

$$\text{मध्य पद} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ वां पद तथा } \left(\frac{n+1}{2}+1\right) = \left(\frac{n+3}{2}\right) \text{ वां पद}$$

## 7.07 द्विपद प्रसार में विशिष्ट घात $x^m$ का गुणांक
## (Coefficient of special power $x^m$ in binomial expansion)

माना कि $\left(ax^p \pm \frac{b}{x^q}\right)^n$ के प्रसार में यदि $T_{r+1}$ वें पद में $x^m$ आता है,

तब $T_{r+1} = {}^nC_r \left(ax^p\right)^{n-r} \left(\pm \frac{b}{x^q}\right)^r = {}^nC_r\, a^{n-r} (\pm b)^r x^{np-r(p+q)}$

$\therefore$ $np - r(p+q) = m$ से $r$ का मान ज्ञात करके विशिष्ट पद ज्ञात करते हैं। $r$ सदैव धन पूर्णांक होता है।

इस प्रकार $x^m$ का गुणांक ${}^nC_r\, a^{n-r} (\pm b)^r$ होगा।

यदि विस्तार में $x$ रहित पद ज्ञात करना हो, तब

$$np - r(p+q) = 0 \qquad \therefore \qquad r = \frac{np}{p+q}.$$

## 7.08 $(a+b+c)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या

## Number of terms in the expansion of $(a+b+c)^n$

$\because$ $(a+b+c)^n = \left[(a+b)+c\right]^n$

$$= (a+b)^n + {}^nC_1 (a+b)^{n-1} c + {}^nC_2 (a+b)^{n-2} c^2 + \ldots.. + c^n$$

$\therefore$ $(a+b+c)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या

$= (n+1)$ पद $+ n$ पद $+ (n-1)$ पद $+ \ldots\ldots + 1$ पद

$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ पद [स. श्रे. के योग सूत्र से]

## दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण 6:** $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^8$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

**हल:** $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^8$ के प्रसार में पदों की संख्या $= 8+1 = 9$ (विषम)

अतः मध्य पद $=\left(\frac{n+2}{2}\right)=\left(\frac{8+2}{2}\right)=5$ वां पद

$$={}^8C_4\left(\frac{a}{2}\right)^4\left(-\frac{b}{3}\right)^4=\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a}{2}\right)^4\left(\frac{b}{3}\right)^4=\frac{70a^4b^4}{16\cdot 81}=\frac{35a^4b^4}{648}$$

**उदाहरण 7:** सिद्ध कीजिए कि $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में मध्य पद $\frac{1.3.5......(2n-1)}{n!}2^n x^n$ है।

**हल:** चूँकि $2n$ सम संख्या है, अतः मध्य पद $\left(\frac{2n+2}{2}\right)$

अर्थात् $(n+1)$ वां पद है।

$(n+1)$ वां पद $=T_{n+1}={}^{2n}C_n\,x^n$

$$=\frac{(2n)!}{n!\,n!}x^n=\frac{\left[(2n)(2n-1)(2n-2).....6.5.4.3.2.1\right]x^n}{n!\,n!}$$

$$=\frac{\left[(2n)(2n-2).....6.4.2\right]\left[(2n-1)(2n-3).....5.3.1\right]}{n!\,n!}x^n$$

$$=\frac{(2)^n\left[n(n-1)(n-2).....\ 3.2.1\right]\left[(2n-1)(2n-3).....\ 5.3.1\right]}{n!\,n!}x^n$$

$$=\frac{(2)^n n!\left[(2n-1)(2n-3)....\ 5.3.1\right]}{n!\,n!}x^n$$

$$=\frac{(2)^n\left[1.3.5.\ .....(2n-3)(2n-1)\right]}{n!}x^n=\frac{1.3.5.\ ......(2n-1)}{n!}2^n x^n$$

**उदाहरण 8:** $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के विस्तार में $x^{-17}$ का गुणांक ज्ञात कीजिए।

**हल:** माना कि $x^{-17}, T_{r+1}$ पद में आता है। तब

$$T_{r+1}={}^{15}C_r\left(x^4\right)^{15-r}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^r={}^{15}C_r\,(x)^{60-4r}\,\frac{(-1)^r}{(x)^{3r}}={}^{15}C_r\,(-1)^r\,(x)^{60-7r}\qquad(1)$$

इसमें $x$ की घात $-17$ होनी चाहिए।

अतः $60-7r=-17$

$7r=77\Rightarrow r=11$

$r$ का यह मान (1) में रखने पर, $x^{-17}$ का गुणांक $={}^{15}C_{11}(-1)^{11}=-{}^{15}C_4=-\frac{15.14.13.12}{1.2.3.4}=-1365$

**उदाहरण 9:** $\left(2x^2+\frac{1}{2x}\right)^9$ के प्रसार में $x$ रहित पद का मान ज्ञात कीजिए।

**हलः** माना कि $(r+1)$ वां पद $x$ रहित है।

$$T_{r+1} = {}^9C_r\left(2x^2\right)^{9-r}\left(\frac{1}{2x}\right)^r = {}^9C_r\left(2\right)^{9-r}\left(x\right)^{18-2r}\frac{1}{(2)^r(x)^r} = {}^9C_r\left(2\right)^{9-2r}\left(x\right)^{18-3r}$$

$x$ रहित पद के लिए, $x$ की घात शून्य होती है।

अतः $18-3r=0$ या $r=6$

$\therefore$ $x$ रहित पद $= T_7 = {}^9C_6(2)^{9-12} = \frac{9.8.7}{1.2.3}.\frac{1}{2^3} = \frac{21}{2}$

**उदाहरण 10:** $(1+x)^{20}$ के प्रसार में $n$ वें पद का गुणांक तथा $(n+1)$ वें पद का गुणांक $1:2$ अनुपात में हो, तो $n$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हलः** $T_n = {}^{20}C_{n-1}\,x^{n-1}$ (1)

$T_{n+1} = {}^{20}C_n\,x^n$ (2)

प्रश्नानुसार, $\frac{T_n}{T_{n+1}} = \frac{{}^{20}C_{n-1}}{{}^{20}C_n} = \frac{1}{2}$

या $$\frac{\frac{20!}{(n-1)!\,(20-n+1)!}}{\frac{20!}{(n)!\,(20-n)!}} = \frac{1}{2}$$

या $$\frac{(n)!\,(20-n)!}{(n-1)!\,(21-n)!} = \frac{1}{2}$$

या $$\frac{n(n-1)!\,(20-n)!}{(n-1)!\,(21-n)(20-n)!} = \frac{1}{2}$$

या $$\frac{n}{21-n} = \frac{1}{2}$$

सरल करने पर, $n=7$

## प्रश्नमाला 7.2

1. निम्नलिखित द्विपद प्रसारों में अंकित पद ज्ञात कीजिए:

   **(i)** $\left(a+2x^3\right)^{17}$ का 5 वां पद **(ii)** $\left(\frac{x}{y}-\frac{3y}{x^2}\right)^{12}$ का 9 वां पद **(iii)** $\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x^2}{2}\right)^9$ का 6 वां पद

2. गुणांक ज्ञात कीजिए:

   **(i)** $\left(ax-\frac{1}{bx^2}\right)^8$ के प्रसार में $x^{-7}$ का **(ii)** $\left(x^4+\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में $x^4$ का **(iii)** $\left(a-bx^2\right)^{10}$ के प्रसार में $x^6$ का

3. निम्नलिखित के प्रसार में $x$ रहित पद ज्ञात कीजिए:

   **(i)** $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{12}$ **(ii)** $\left(\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}\right)^{10}$, $x>0$ **(iii)** $\left(\sqrt{\frac{x}{3}}+\frac{3}{2x^2}\right)^{10}$ **(iv)** $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{10}$

4. निम्नलिखित के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए:

   **(i)** $\left(\frac{x}{2}+2y\right)^6$ **(ii)** $\left(3a-\frac{a^3}{6}\right)^9$ **(iii)** $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ **(iv)** $\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$

5. सिद्ध कीजिए कि यदि $n$ सम हो, तब $(1+x)^n$ के प्रसार में मध्यपद का गुणांक $\frac{1.3.5.....(n-1)}{2.4.6......n}2^n$ होगा। यदि $n$ विषम हो, तो दोनों मध्यपदों का गुणांक $\frac{1.3.5.....n}{2.4.6......(n+1)}2^n$ होगा।

6. यदि $\left(ax+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ के प्रसार में $x^7$ का गुणांक तथा $x^{-7}$ का गुणांक बराबर है तब सिद्ध कीजिएः $ab-1=0$.

7. $(1+y)^n$ के विस्तार में यदि 5 वें, 6 वें तथा 7 वें पदों के गुणांक स. श्रे. में हो, तो $n$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. $(x+a)^n$ के द्विपद प्रसार के दूसरे, तीसरे और चौथे पद क्रमशः 240, 720 और 1080 है। $x$, $a$ तथा $n$ ज्ञात कीजिए।

9. यदि $(1+a)^n$ के प्रसार में तीन क्रमागत पदों के गुणांक 1 : 7 : 42 के अनुपात में है तो $n$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. $m$ का धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $(1+x)^m$ के प्रसार में $x^2$ का गुणांक 6 हो।

## 7.09 द्विपद गुणांकों के गुणधर्म (Properties of binomial coefficients)

$(1+x)^n$ के प्रसार में $x$ की विभिन्न घातों के गुणांक ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ..., {}^nC_n$ द्विपद गुणांक कहलाते हैं। इनको प्रायः $C_0, C_1, C_2, ...C_n$ द्वारा भी व्यक्त करते हैं।

अर्थात् $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + ... + C_nx^n$ [खण्ड 7.04 से]

**(i)** यदि प्रसार में $x=1$ रखें, तब

$$(1+1)^n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n \quad \Rightarrow \quad 2^n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n \qquad (1)$$

**(ii)** यदि प्रसार में $x=-1$ रखें, तब

$$(1-1)^n = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + ... + (-1)^n C_n \quad \Rightarrow \quad 0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + ... + (-1)^n C_n \qquad (2)$$

(1) तथा (2) का योग करने पर,

$$2(C_0 + C_2 + C_4 + ...) = 2^n \quad \Rightarrow \quad C_0 + C_2 + C_4 + ... = 2^{n-1} \qquad (3)$$

पुनः (1) में से (2) को घटाने पर,

$$2(C_1 + C_3 + C_5 + ...) = 2^n \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_3 + C_5 + ... = 2^{n-1} \qquad (4)$$

अतः (3) तथा (4) से

$$C_0 + C_2 + C_4 + ... = C_1 + C_3 + C_5 + ... = 2^{n-1} \qquad (5)$$

### दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण 11:** ${}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + {}^{20}C_3 + ... + {}^{20}C_{20}$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हलः** चूँकि ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n = 2^n$ (1)

(1) में $n = 20$ रखने पर,

$${}^{20}C_0 + {}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + ... + {}^{20}C_{20} = 2^{20}$$

$$1 + {}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + ... + {}^{20}C_{20} = 2^{20} \qquad [\because {}^{20}C_0 = 1]$$

$${}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + {}^{20}C_3 + ... + {}^{20}C_{20} = 2^{20} - 1$$

**उदाहरण 12:** यदि $C_0, C_1, C_2, ....., C_n$ द्विपद गुणांक है, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिएः

$$C_0 + 2.C_1 + 3.C_2 + ..... + (n+1)\cdot C_n$$

**हलः** दिया गया व्यंजक

$$= C_0 + 2.C_1 + 3.C_2 + ..... + (n+1)C_n$$

$$= (C_0 + C_1 + C_2 + ..... + C_n) + (C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 + .....n.C_n)$$

$$= 2^n + \left[{}^nC_1 + 2.{}^nC_2 + 3.{}^nC_3 + n.{}^nC_n\right] = 2^n + \left[n + 2.\frac{n(n-1)}{1.2} + ..... + n.1\right]$$

$$= 2^n + \left[n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2} + ..... + n\right] = 2^n + n\left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + ..... + 1\right]$$

$$= 2^n + n\left[1 + {}^{(n-1)}C_1 + {}^{(n-1)}C_2 + ..... + {}^{(n-1)}C_{n-1}\right] = 2^n + n.2^{n-1} = 2^{n-1}(n+2).$$

**उदाहरण 13:** सिद्ध कीजिए: $C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 + ..... + n.C_n = n.2^{n-1}$

**हलः** वाम पक्ष $C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 + ..... + n.C_n$

$$= {}^nC_1 + 2.{}^nC_2 + 3.{}^nC_3 + ..... + n.{}^nC_n$$

$$= n + 2.\frac{n(n-1)}{2!} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + .... + n.1$$

$$= n\left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + ..... + 1\right]$$

$$= n\left[{}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 + ..... + {}^{n-1}C_{n-1}\right] = n.2^{n-1} = \text{दक्षिण पक्ष}$$

**उदाहरण 14:** यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में गुणांक $C_0, C_1, C_2, ....., C_n$ हो, तो सिद्ध कीजिए:

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + ..... + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

**हलः** वाम पक्ष

$$= C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + ..... + \frac{C_n}{n+1}$$

$$= {}^nC_0 + \frac{{}^nC_1}{2} + \frac{{}^nC_2}{3} + ..... + \frac{{}^nC_n}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{3\ .\ 2!} + ..... + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[(n+1) + \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} + ..... + 1\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[{}^{(n+1)}C_1 + {}^{(n+1)}C_2 + {}^{(n+1)}C_3 + {}^{(n+1)}C_4 + ..... + {}^{n+1}C_{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[{}^{(n+1)}C_0 + {}^{(n+1)}C_1 + {}^{(n+1)}C_2 + {}^{(n+1)}C_3 + ..... + {}^{n+1}C_{n+1} - {}^{(n+1)}C_0\right]$$

[${}^{(n+1)}C_0$ को जोड़ने तथा घटाने पर]

$$= \frac{1}{n+1}\left[(2)^{n+1} - {}^{(n+1)}C_0\right] = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \text{दक्षिण पक्ष}$$

**उदाहरण 15:** यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में गुणांक क्रमशः $C_0, C_1, C_2, ...., C_n$ हो, तब सिद्ध कीजिए:

$$C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ..... + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

**हलः** $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ..... + C_n x^n$ (1)

तथा $(x+1)^n = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ..... + C_n$ (2)

(1) तथा (2) को गुणा करने पर,

$$(1+x)^{2n} = \left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ..... + C_n x^n\right)\left(C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ..... + C_n\right)$$

दोनों पक्षों में $x^n$ के गुणाकों की तुलना करने पर,

$$^{2n}C_n = C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ..... + C_n^2 \qquad \therefore \qquad C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ..... + C_n^2 = \frac{2n!}{n!\, n!} = \frac{2n!}{(n!)^2}$$

## प्रश्नमाला 7.3

**1.** यदि $(1+x)^n$ के प्रसार के गुणांक क्रमशः $C_0, C_1, C_2, ....., C_n$ हो, तो मान ज्ञात कीजिए:

**(i)** $^8C_1 + {}^8C_2 + {}^8C_3 + ..... + {}^8C_8$ **(ii)** $^8C_1 + {}^8C_3 + {}^8C_5 + {}^8C_7$

यदि $(1+x)^n$ के प्रसार के गुणांक क्रमशः $C_0, C_1, C_2, ....., C_n$ हो, तब सिद्ध कीजिए:

**2.** $C_0 + 3.C_1 + 5.C_2 + ..... + (2n+1).C_n = (n+1)2^n$

**3.** $C_0 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_4 + ...... + C_{n-2} C_n = \dfrac{(2n)!}{(n-2)!\,(n+2)!}$

**4.** $C_0 + 2C_1 + 4C_2 + 6C_3 + ..... + 2n\,C_n = 1 + n\,2^n$

**5.** $\left(1+\dfrac{C_1}{C_0}\right)\left(1+\dfrac{C_2}{C_1}\right)\left(1+\dfrac{C_3}{C_2}\right)......\left(1+\dfrac{C_n}{C_{n-1}}\right) = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$

**6.** यदि $\left(1 + x - 2x^2\right)^6$ का पूर्ण प्रसार $1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ..... + a_{12} x^{12}$ द्वारा निरूपित हो, तब सिद्ध कीजिए:

$a_2 + a_4 + a_6 + ..... + a_{12} = 31$

## 7.10 परिमेय घातांक के लिए द्विपद प्रमेय
## (Binomial theorem for rational index)

किसी द्विपद में जब घात भिन्नात्मक अथवा ऋणात्मक हो, तब इसका प्रसार तभी संभव है, जबकि द्विपद का प्रथम पद 1 तथा द्वितीय पद संख्यात्मक रूप में एक से छोटा हो। अर्थात् हम द्विपद को सर्वदा $(1+x)^n$ के रूप में रखकर प्रसार करते हैं, जहाँ $x$ का संख्यात्मक मान 1 से कम है अर्थात् $-1 < x < 1$ इस स्थिति में द्विपद का प्रसार का सूत्र निम्नलिखित है:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + .... + \frac{n(n-1).....(n-r+1)}{r!}x^r + .....$$

यह प्रसार एक अनंत श्रेणी का रूप लेती है अर्थात् प्रसार में पदों की संख्या अनंत होती है। इसको द्विपद श्रेणी कहते है।

$(x+a)^n$ के प्रसार में यदि $x$ का मान $a$ से कम है। तब $(x+a)^n = a^n\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^n$ तथा यदि $a$ का मान $x$ से कम है,

तो $(x+a)^n = x^n\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$ के रूप में बदलकर प्रसार करते हैं।

**प्रसार का व्यापक पदः**

$$T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}x^r$$

**टिप्पणीः** जब $n$ एक भिन्न अथवा ऋण राशि हो, तब ${}^nC_r$ निरर्थक है। अतः अलग–अलग पदों के गुणांक ${}^nC_1, {}^nC_2, .....$ नहीं लिखकर उपर्युक्त प्रकार से लिखना चाहिए।

## 7.11 कुछ महत्त्वपूर्ण प्रसार (Some important expansions):

$$(1-x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)}{r!}x^r + \cdots \quad (1)$$

$$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + ... + (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)......(n+r-1)}{r!}x^r + \cdots \quad (2)$$

$$(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + ..... + \frac{n(n+1)(n+2)......(n+r-1)}{r!}x^r + \cdots \quad (3)$$

(2) तथा (3) में $n = 1, 2, 3$ रखने पर,

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ..... + x^r + \cdots$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ..... + (-1)^r x^r + \cdots$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + ..... + (-1)^r (r+1)x^r + \cdots$$

$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ..... + (r+1)x^r + .....$$

$$(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + ..... + (-1)^r \frac{(r+1)(r+2)}{2!}x^r + \cdots$$

$$(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + ..... + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}x^r + \cdots$$

## दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण 16:** $(1+x)^{3/2}$ का चार पदों तक प्रसार कीजिए।

**हलः** $$(1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}(x) + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{6}x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \ldots$$

**उदाहरण 17:** $(2+3x)^{-4}$ का चार पदों तक प्रसार कीजिए।

**हलः** $$(2+3x)^{-4} = 2^{-4}\left[1 + \frac{3x}{2}\right]^{-4}$$

$$= 2^{-4}\left[1 + (-4)\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{(-4)(-4-1)}{2!}\left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{3!}\left(\frac{3x}{2}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2^4}\left[1 - 4\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{4.5}{2!}\left(\frac{3x}{2}\right)^2 - \frac{4.5.6}{3!}\left(\frac{3x}{2}\right)^3 + .....\right] = \frac{1}{2^4}\left[1 - 6x + \frac{45}{2}x^2 - \frac{135}{2}x^3 + \cdots\right]$$

**उदाहरण 18:** $(1-2x)^{-1/2}$ के प्रसार में व्यापक पद ज्ञात कीजिए।

**हल:** $(1-x)^{-n}$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = \frac{n(n+1)(n+2).....(n+r-1)}{r!}x^r$$

दिए गए द्विपद में $n = 1/2$ तथा $x$ के स्थान पर $2x$ है। अतः $(1-2x)^{-1/2}$ के विस्तार में व्यापक पदः

$$T_{r+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right).....\left(\frac{1}{2}+r-1\right)}{r!}(2x)^r$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}......\frac{(2r-1)}{2}}{r!}(2)^r x^r = \frac{1.3.5......(2r-1)}{(2)^r\ r!}(2)^r x^r = \frac{1.3.5......(2r-1)}{r!}x^r$$

**उदाहरण 19:** $(1+x)^{5/2}$ के विस्तार में $x^r$ का गुणांक ज्ञात कीजिए।

**हल:** $(1+x)^{5/2}$ के विस्तार में व्यापक पदः

$$(r+1) \text{ वां पद} = \frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right).....\left(\frac{5}{2}-r+1\right)}{r!}x^r$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)......\left(\frac{7-2r}{2}\right)}{r!}x^r$$

$$= \frac{(5)(3)(1)(-1)(-3).....(7-2r)}{(2)^r\ r!}x^r$$

$$= (-1)^{r-3}\ \frac{5.3.3.5.7......(2r-7)}{(2)^r\ r!}x^r$$

$\therefore$ $x^r$ का गुणांक $= (-1)^{r-3}\ \dfrac{5.3.3.5.7......(2r-7)}{(2)^r\ r!}$

**उदाहरण 20:** $\dfrac{(1+3x)^2}{(1-2x)}$ के विस्तार में $x^3$ का गुणांक ज्ञात कीजिए।

**हल:** $$\frac{(1+3x)^2}{(1-2x)} = (1+3x)^2(1-2x)^{-1} = (1+6x+9x^2)(1+2x+4x^2+8x^3+.....)$$

$$= 1+(6+2)x+(9+12+4)x^2+(18+24+8)x^3+.....$$

$\therefore$ $x^3$ का गुणांक $= (18+24+8) = 50$

**उदाहरण 21:** यदि $|x|<1$ हो, तो $(1+2x+3x^2+....)^{1/2}$ के प्रसार में $x^4$ का गुणांक ज्ञात कीजिए।

**हल:** दिया गया व्यंजक $(1+2x+3x^2+....)^{1/2} = \left[(1-x)^{-2}\right]^{1/2} = (1-x)^{-1}$

$\therefore$ $(1-x)^{-1}$ का $(r+1)$ वां पद $= \dfrac{(-1)(-2)(-3)......(-1-r+1)}{r!}x^r = (-1)^r\ \dfrac{1.2.3......r}{r!}.x^r$

अतः $x^4$ का गुणांक $= (-1)^4\ \dfrac{1.2.3.4}{4!} = 1$

**उदाहरण 22:** यदि $y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + .....$ हो, तो सिद्व कीजिए:

$$x = \frac{y}{3} - \frac{1.4}{3^2\ 2!}.y^2 + \frac{1.4.7}{3^3\ 3!}.y^3 - .....$$

**हल:** दिए गए व्यंजक के दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर

$$1 + y = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + .....\qquad \text{या} \qquad (1+y) = (1-x)^{-3}$$

अतः $(1-x) = (1+y)^{-1/3}$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)y + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2!}y^2 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!}y^3 + ...$$

$$= 1 - \frac{y}{3} + \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 - \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 + .....$$

या $$-x = -\left[\frac{y}{3} - \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 - .....\right]$$

या $$x = \frac{y}{3} - \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 - .....$$

**उदाहरण 23:** सिद्व कीजिए:

$$\left(1 - x + x^2 - x^3 + ...\infty\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + ...\infty\right) = \left(1 + x^2 + x^4 + ...\infty\right)$$

**हल:** चूँकि $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ....\infty$

तथा $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ....\infty$

अतः वाम पक्ष $= \left(1 - x + x^2 - x^3 + ...\infty\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + ....\infty\right)$

$$= (1+x)^{-1}(1-x)^{-1} = \left(1-x^2\right)^{-1}$$

$$= 1 + x^2 + x^4 + ....\infty = \text{दक्षिण पक्ष}$$

## प्रश्नमाला 7.4

1. निम्नलिखित द्विपदों का चार पदों तक प्रसार कीजिए:

   **(i)** $\left(1+x^2\right)^{-2}$ **(ii)** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{1/2}$ **(iii)** $\left(3-2x^2\right)^{-2/3}$ **(iv)** $\frac{1}{\sqrt{5+4x}}$

2. निम्नलिखित प्रसारों में वांछित पद ज्ञात कीजिए:

   **(i)** $(1-3x)^{-1/3}$ का चौथा पद **(ii)** $(1+x)^{5/2}$ का सातवां पद

   **(iii)** $(1+2x)^{-1/2}$ का आठवां पद

3. निम्नलिखित प्रसारों का व्यापक पद ज्ञात कीजिए:

   **(i)** $\left(a^3-x^3\right)^{2/3}$ **(ii)** $(1-2x)^{-3/2}$ **(iii)** $(1-x)^{-p/q}$

4. यदि $x < 3$ हो, तो $(3-x)^{-8}$ के प्रसार में $x^5$ का गुणांक ज्ञात कीजिए।

5. $\left(a+2bx^2\right)^{-3}$ के प्रसार में $x^6$ का गुणांक ज्ञात कीजिए।

6. $\frac{1+3x^2}{\left(1-x^2\right)^3}$ के प्रसार में $x^{10}$ का गुणांक ज्ञात कीजिए।

7. $\left(1-2x+3x^2-4x^3+.....\right)^n$ के विस्तार में $x^r$ का गुणांक ज्ञात कीजिए तथा यदि $x=\frac{1}{2}$ और $n=1$ हो, तो व्यंजक का मान लिखिए।

8. सिद्ध कीजिए: $\left(1+x+x^2+x^3+.....\right)^2 = 1+2x+3x^2+.....$

9. सिद्ध कीजिए: $\left(1+x+x^2+x^3+...\right)\left(1+3x+6x^2+...\right) = \left(1+2x+3x^2+...\right)^2$

10. यदि $x = 2y+3y^2+4y^3+.....$ है, तो $y$ को $x$ की आरोही घातों की श्रेणी के रूप में व्यक्त कीजिए।

## 7.12 द्विपद प्रमेय के अनुप्रयोग (Applications of binomial theorem)

### दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण 24:** $(1\cdot003)^4$ का मान दशमलव के तीन स्थान तक ज्ञात कीजिए।

**हल:** $(1\cdot003)^4 = (1+\cdot003)^4$

$$=1+4(\cdot003)+\frac{4\times3}{2!}(\cdot003)^2+..... = 1+\cdot012+.....$$

$=1\cdot012$ (अन्य पदों की उपेक्षा करते हुए)

**उदाहरण 25:** यदि $x$ इतना छोटा हो कि इसके वर्ग तथा उच्च घातों की उपेक्षा की जा सके, तो सिद्ध कीजिए:

$$\frac{\sqrt{(1+2x)}+(16+3x)^{1/4}}{(1-x)^2} = 3+\frac{227}{32}x$$

**हल:** दिया गया व्यंजक $= \dfrac{\sqrt{(1+2x)}+(16+3x)^{1/4}}{(1-x)^2}$

$$=\frac{(1+2x)^{1/2}+2\left(1+\frac{3x}{16}\right)^{1/4}}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{\left[1+\frac{1}{2}(2x)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(2x)^2}{2!}+...\right]+2\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{16}\right)+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{3x}{16}\right)^2+...\right]}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{\left[1+\frac{1}{2}(2x)\right]+2\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{16}\right)\right]}{(1-x)^2}$$ [$x^2$ तथा उच्च घातों के पदों की उपेक्षा करते हुए]

$$=\left[(1+x)+2\left(1+\frac{3x}{64}\right)\right](1-x)^{-2}$$

$$=\left(3+\frac{35}{32}x\right)(1+2x+...)$$

$$=3+\frac{35}{32}x+6x$$ (अन्य पदों की उपेक्षा करते हुए)

$$=3+\frac{227}{32}x$$

**उदाहरण 26:** $(126)^{1/3}$ का मान दशमलव के 5 अंको तक ज्ञात कीजिए।

**हल:** $(126)^{1/3} = (126)^{1/3} = (125+1)^{1/3} = (5^3+1)^{1/3}$

$$= 5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{1/3} = 5\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{5^3}\right)^2+.....\right]$$

$$= 5\left[1+\frac{1}{3}.\frac{1}{5^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}.\frac{1}{5^6}+.....\right] = 5\left[1+\frac{1}{3}.\frac{1}{5^3}-\frac{1}{9}.\frac{1}{5^6}+.....\right]$$

$$= 5+\frac{1}{3\times5^2}-\frac{1}{9\times5^5}+..... = 5+\cdot01333+\cdot000035+..... = 5+\cdot013298 = 5\cdot01330$$

**उदाहरण 27:** यदि $p$ और $q$ लगभग बराबर हो, तब सिद्ध कीजिए:

$$\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/n}$$

**हल:** चूँकि $p$ और $q$ लगभग बराबर है। अतः माना कि $p = q + h$, जहाँ $h$ बहुत छोटी राशि है जिसके वर्ग तथा उच्च घातों को नगण्य मानकर छोड़ा जा सकता है।

अतः वाम पक्ष $$= \frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q} = \frac{(n+1)(q+h)+(n-1)q}{(n-1)(q+h)+(n+1)q}$$

$$= \frac{nq+q+nh+h+nq-q}{nq-q+nh-h+nq+q} = \frac{2nq+nh+h}{2nq+nh-h}$$

$$= \frac{2nq+(n+1)h}{2nq+(n-1)h} = \frac{(2nq)\left[1+\frac{(n+1)h}{2nq}\right]}{(2nq)\left[1+\frac{(n-1)h}{2nq}\right]}$$

$$= \left[1+\frac{(n+1)h}{2nq}\right]\left[1+\frac{(n-1)h}{2nq}\right]^{-1}$$

$$= \left[1+\frac{(n+1)h}{2nq}\right]\left[1-\frac{(n-1)h}{2nq}\right]$$

[$h$ की उच्च घातों को नगण्य मानकर उपेक्षा करते हुए]

$$= 1+\frac{(n+1)h}{2nq}-\frac{(n-1)h}{2nq}$$

$$= 1+\frac{h}{2nq}(n+1-n+1) = 1+\frac{h}{2nq}(2) = 1+\frac{h}{nq}$$

दक्षिण पक्ष $$= \left(\frac{p}{q}\right)^{1/n} = \left(\frac{q+h}{q}\right)^{1/n} = \left(1+\frac{h}{q}\right)^{1/n}$$

$$= 1+\frac{h}{nq} = \text{वाम पक्ष}$$ [$h$ की उच्च घातों को नगण्य मानकर उपेक्षा करते हुए]

## प्रश्नमाला 7.5

1. यदि $x$ की तुलना में $y$ बहुत कम हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{(x-y)^n}{(x+y)^n} = 1 - \dfrac{2ny}{x}$, जहाँ $y^2$ एवं उच्चघात उपेक्षणीय है।

2. यदि $x$ इतना छोटा है कि $x$ के वर्ग एवं अन्य उच्च्व घात उपेक्षणीय है, तो निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए:

   **(i)** $\dfrac{(9+2x)^{1/2}(3+4x)}{(1+x)^{1/5}}$ **(ii)** $\dfrac{\sqrt{1-2x}+(1+3x)^{4/3}}{3+x+\sqrt{4-x}}$ **(iii)** $\dfrac{\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{-4}\sqrt{16-3x}}{(8+x)^{2/3}}$

3. मान ज्ञात कीजिए:

   **(i)** $\sqrt{30}$ का दशमलव के 4 अंकों तक **(ii)** $(1\cdot 03)^{1/3}$ का दशमलव के 4 अंको तक

   **(iii)** $\dfrac{1}{(8\cdot 16)^{1/3}}$ का दशमलव के 4 अंकों तक **(iv)** 126 का घनमूल, दशमलव के 5 अंकों तक

4. यदि $x$ लगभग 1 के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए:

   **(i)** $\dfrac{mx^m - nx^n}{m-n} = x^{m+n}$ **(ii)** $\dfrac{ax^b - bx^a}{x^b - x^a} = \dfrac{1}{1-x}$

5. यदि $p$ और $q$ लगभग बराबर है, तो सिद्ध कीजिए:

$$\frac{q+2p}{p+2q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/3}$$

## 7.13 द्विपद प्रमेय से श्रेणी का योगफल:
## (Sum of series by binomial theorem)

किसी दी हुई द्विपद श्रेणी का योगफल ज्ञात करने के लिए उसके पदों की तुलना निम्नलिखित मानक द्विपद श्रेणी के संगत पदों से करते हैं।

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

सर्वप्रथम दी गई श्रेणी को मानक द्विपद प्रसार में व्यवस्थित करने के लिए द्विपद का प्रथम पद 1 तथा द्वितीय पद $x$, जहाँ $|x| < 1$ होना चाहिए तथा दी गई श्रेणी द्विपद $x$ की आरोही घातों में व्यवस्थित होनी चाहिए।

इस प्रकार दी गई श्रेणी के द्वितीय तथा तृतीय पदों की मानक द्विपद प्रसार के संगत पदों से तुलना कर $n$ तथा $x$ में दो समीकरण ज्ञात कर लीजिए। इन समीकरणों को हल कर $n$ तथा $x$ के मान ज्ञात कर, इन मानों को मानक द्विपद में रखकर योगफल प्रापत कर लीजिए।

### दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण 28:** निम्नलिखित श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \ldots$$

**हल:** श्रेणी $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1.3}{4.8} + \dfrac{1.3.5}{4.8.12} + \ldots$

मानक श्रेणी $(1+x)^n = 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर,

$$nx = 1/4 \qquad (1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.3}{4.8} \qquad (2)$$

समीकरण (1) का वर्ग करके (2) में भाग देने पर,

$$\frac{n(n-1)x^2}{2!\ n^2x^2} = \frac{1.3}{4.8}(4)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(n-1)}{2!\ .\ n} = \frac{1.3.4.4}{4.8} \Rightarrow \frac{(n-1)}{n} = \frac{3}{1}$$

$\Rightarrow 3n = n-1 \Rightarrow n = -1/2$

$n$ का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

अतः श्रेणी का योग $= (1+x)^n = \left[1-\tfrac{1}{2}\right]^{-1/2} = \left[\tfrac{1}{2}\right]^{-1/2} = [2]^{1/2} = \sqrt{2}$

**उदाहरण 29:** $1+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2.5}{3.6}\frac{1}{(2)^2}+\frac{2.5.8}{3.6.9}.\frac{1}{(2)^3}+...$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हलः** श्रेणी $1+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2.5}{3.6}\frac{1}{(2)^2}+\frac{2.5.8}{3.6.9}.\frac{1}{(2)^3}+...$

मानक श्रेणी $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर,

$$nx = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}, \qquad (1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{2.5}{3.6}.\frac{1}{(2)^2} \qquad (2)$$

समीकरण (1) का वर्ग करके (2) में भाग देने पर,

$$\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{2.5}{3.6}.\frac{1}{(2)^2}.\frac{3^2.2^2}{2^2.1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{n(n-1)}{2!\ .\ n^2} = \frac{2.5.3.2.3.2}{3.6.2.2.2.2}$$

या $\frac{(n-1)}{n} = \frac{5}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 2n-2 = 5n \quad \Rightarrow \quad n = -2/3$

$n$ का मान समीकरण (1) में रखने पर, $-2/3x = 2/3.1/2 \Rightarrow x = -1/2$

अतः श्रेणी का योग $= (1+x)^n = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2/3} = (2)^{2/3} \qquad (4)^{1/3}$

**उदाहरण 30:** $2+\frac{5}{2!\ .\ 3}+\frac{5.7}{3!\ .\ 3^2}+...$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हलः** श्रेणी $1+1+\frac{5}{2!\ .\ 3}+\frac{5.7}{3!\ .\ 3^2}+\cdots$

मानक श्रेणी $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर,

$$nx = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{5}{2!\times 3} \qquad (2)$$

समीकरण (1) का वर्ग करके (2) में भाग देने पर,

$$\frac{n(n-1)x^2}{2!\,n^2x^2} = \frac{5}{2! \times 3}$$

$\Rightarrow$ $\quad \frac{(n-1)}{n} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5n = 3n - 3 \Rightarrow 2n = -3 \quad \Rightarrow \quad n = -\frac{3}{2}$

$n$ का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{-3}{2}x = 1,\ x = -\frac{2}{3}$$

अतः श्रेणी का योग

$$= (1+x)^n = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-3/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3/2} = (3)^{3/2} = (27)^{1/2}$$

**उदाहरण 31:** यदि $x = \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \ldots$ तो सिद्ध कीजिए: $x^2 + 2x - 2 = 0$

**हल:** $\quad 1 + x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \ldots$

दक्षिण पक्ष $\quad = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \ldots$

मानक श्रेणी $\quad (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots$

दक्षिण पक्ष के पदों की तुलना करने पर,

$$nx = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.3}{3.6} \quad (2)$$

समीकरण (1) का वर्ग करके (2) में भाग देने पर,

$$\frac{n(n-1)x^2}{2!\,.\,n^2x^2} = \frac{1.3}{3.6}.3^2$$

$\Rightarrow$ $\quad \frac{(n-1)}{2!\,.\,n} = \frac{1.3.3.3}{3.6} \Rightarrow \frac{(n-1)}{n} = \frac{3}{1} \Rightarrow 3n = n - 1$

$\Rightarrow$ $\quad 2n = -1 \Rightarrow n = -1/2$

$n$ का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$-\frac{1}{2}.x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

अतः दक्षिण पक्ष $= (1+x)^n = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = (3)^{1/2} = \sqrt{3}$

अतः $(x+1) = \sqrt{3} \Rightarrow (x+1)^2 = 3$

$\Rightarrow$ $\quad x^2 + 2x + 1 = 3$

$\Rightarrow$ $\quad x^2 + 2x - 2 = 0$

**उदाहरण 32:** सिद्ध कीजिए : $x^n = 1 + n\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{n(n+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 + \dots$

**हल:** दक्षिण पक्ष $= 1 + n\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{n(n+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 + \dots$

मानक श्रेणी $(1+y)^m = 1 + my + \frac{m(m-1)}{2!}y^2 + \dots$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर,

$$my = n\left(1-\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

$$\frac{m(m-1)}{2!}y^2 = \frac{n(n+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 \quad (2)$$

समीकरण (1) का वर्ग करके (2) में भाग देने पर,

$$\frac{m(m-1)y^2}{2!\, m^2y^2} = \frac{n(n+1)}{2!}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{n^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(m-1)}{m} = \frac{(n+1)}{n} \Rightarrow mn - n = mn + m \quad \Rightarrow \quad m = -n$$

$m$ का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$-n.\,y = n\left(1-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y = -\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

अतः श्रेणी का योग $= (1+y)^m = \left[1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^{-n} = \left[\frac{1}{x}\right]^{-n} = [x]^n = x^n$= वाम पक्ष

## प्रश्नमाला 7.6

निम्नलिखित अनंत श्रेणीयों का योग ज्ञात कीजिए:

1. $1+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2.5}{3.6}.\frac{1}{2^2}+\dots$

2. $1+\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\frac{1.4}{3.6}.\frac{1}{4^2}+\dots$

3. $1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\dots$

4. $1+\frac{1}{10}+\frac{1.4}{10.20}+\frac{1.4.7}{10.20.30}+\dots$

5. $1-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\dots$

सिद्ध कीजिए (प्र. सं. 6–8):

6. $\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1.3}{2!\,.\,2^4}+\frac{1.3.5}{3!\,.\,2^6}+\dots$

7. $\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left[1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}.\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}.\frac{1}{10^6}+\dots\right]$

8. $\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1.4}{1.2}.\frac{1}{3^4}+\frac{1.4.7}{1.2.3}.\frac{1}{3^6}+\dots$

9. यदि $y = \frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\dots\infty$, तब सिद्ध कीजिए $y^2+2y-2=0$

10. सिद्ध कीजिए: $(1+x)^n = 2^n\left[1-\frac{n(1-x)}{(1+x)}+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2-\dots\right]$

## विविध प्रश्नमाला – 7

1. $\left(\frac{a}{x}+bx\right)^{12}$ के विस्तार में कुल पदों की संख्या है:

(A) 11 (B) 13 (C) 10 (D) 14

2. $\left(\frac{1}{2}+a\right)^{8}$ के विस्तार में 7 वां पद है:

(A) ${}^{8}C_7\left(\frac{1}{2}\right)(a)^7$ (B) ${}^{8}C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7.a$ (C) ${}^{8}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^2(a)^6$ (D) ${}^{8}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6(a)^2$

3. $(a-x)^8$ के प्रसार में मध्य पद है:

(A) $56a^3x^5$ (B) $-56a^3x^5$ (C) $70a^4x^4$ (D) $-70a^4x^4$

4. $\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^{9}$ के प्रसार में अचर पद है।

(A) पांचवां (B) चौथा (C) छठवां (D) सातवां

5. $(x+a)^n$ के प्रसार में व्यापक पद है:

(A) ${}^{n}C_r\,x^{n-r}.a^r$ (B) ${}^{n}C_r\,x^r.a^r$ (C) ${}^{n}C_{n-r}\,x^{n-r}.a^r$ (D) ${}^{n}C_{n-r}\,x^r.a^{n-r}$

6. $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$ के विस्तार में $x$ रहित पद का मान है:

(A) 264 (B) –264 (C) 7920 (D) –7920

7. $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में $x^{-17}$ का गुणांक है:

(A) 1365 (B) –1365 (C) 3003 (D) –3003

8. यदि $(1+x)^{18}$ के प्रसार में $(2r+4)$ वें तथा $(r-2)$ वें पदों के गुणांक बराबर हों, तब $r$ का मान है:

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

9. यदि $(a+b)^n$ तथा $(a+b)^{n+3}$ के प्रसार में क्रमशः दूसरे एवं तीसरे एवं तीसरे एवं चौथे पदों का अनुपात बराबर हो, तो $n$ का मान है:

(A) 5 (B) 6 (C) 3 (D) 4

10. यदि $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में $3r$ वें तथा $(r+2)$ वें पदों के गुणांक बराबर हो, तो

(A) $n=2r$ (B) $n=2r-1$ (C) $n=2r+1$ (D) $n=r+1$

11. $(2x-1/x)^{10}$ के विस्तार में $x$ रहित पद का मान ज्ञात कीजिए।

12. सरलीकरण के पश्चात् $(x+a)^{200}+(x-a)^{200}$ के प्रसार में पदों की संख्या लिखिए।

13. यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में $c_0, c_1, c_2 \ldots c_n$ विभिन्न पदों के गुणांक हो, तब $c_0+c_2+c_4\ldots$ का मान ज्ञात कीजिए।

**14.** ${}^{30}C_1 + {}^{30}C_2 + {}^{30}C_3 + \ldots + {}^{30}C_{30}$ का मान ज्ञात कीजिए।

**15.** $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

**16.** $(1+2x)^6(1-x)^7$ के प्रसार के गुणनफल में $x^5$ का गुणांक ज्ञात कीजिए।

**17.** यदि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में दूसरे, तीसरे और चौथे पदों के गुणांक समान्तर श्रेढ़ी में है, तो सिद्ध कीजिए। कि $2n^2 - 9n + 7 = 0$

**18.** $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ का द्विपद प्रमेय से प्रसार ज्ञात कीजिए।

## महत्त्वपूर्ण बिन्दु

**1.** यदि $n$ धनात्मक पूर्णांक घांतांक हो, तो $(x+a)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $(n+1)$ होती है। तथा

$$(x+a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^{n-r}a^r + \ldots + {}^nC_n\, a^n$$

**2.** व्यापक पद $T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}a^r$

**3.** यदि $n$ सम है, तो मध्यपद= $\left(\frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{n+2}{2}\right)$ वां पद होता है।

यदि $n$ विषम है, तो मध्यपद $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वां तथा $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ वां पद होता है।

**4.** किसी भी घातांक के लिए द्विपद प्रमेयः

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

इसमें पदों की संख्या अनंत होती है।

**5.** $(1+x)^n$ श्रेणी का व्यापक पद $= T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r$

**6.** $(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots$

**7.** $(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots$

**8.** $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^r x^r + \cdots$

**9.** $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^r + \cdots$

**10.** $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^r (r+1)x^r + \ldots$

**11.** $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (r+1)x^r + \cdots$

**12.** $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \ldots + (-1)^r \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r + \ldots$

**13.** $(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots + \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r + \cdots$

# उत्तरमाला

## प्रश्नमाला 7.1

**1.** $8-12x+6x^2-x^3$ **2.** $\frac{32}{x^5}-\frac{40}{x^3}+\frac{20}{x}-5x+\frac{5}{8}x^3-\frac{x^5}{32}$. **3.** $\frac{x^6}{729}+\frac{2x^4}{81}+\frac{5x^2}{27}+\frac{20}{27}+\frac{5}{3x^2}+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^6}$

**4.** $81x^4+216x^3y+216x^2y^2+96xy^3+16y^4$. **5.** $\frac{x^3}{a^3}-\frac{6x^2}{a^2}+\frac{15x}{a}-20+15\frac{9}{x}-6\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}$ **6.** 884736

**7.** 104060401 **8.** 9509900499 **9.** 1.771516 **10.** $(1.1)^{10000}$ बड़ी है **11.** $8ab(a^2+6^2);104\sqrt{6}$

## प्रश्नमाला 7.2

**1.** (i) ${}^{17}C_4\, a^{13}\ 16x^{12}$ (ii) $3247695\frac{y^4}{x^{12}}$ (iii) $-63x^8$ **2.** (i) $-56\frac{a^3}{b^5}$ (ii) 6435 (iii) $-120a^7b^3$

**3.** (i) 495 (ii) 405 (iii) $\frac{5}{4}$ (iv) $-252$ **4.** (i) $20x^3y^3$ (ii) $\frac{189}{8}a^{17}, \frac{-21}{16}a^{19}$. (iii) $\frac{2n!}{(n!)2}$

(iv) $\frac{-6435\times 3^8\times 2^7}{x^6}, \frac{6435\times 3^7\times 2^8}{x^9}$ **7.** 7 या 14 **8.** $x=2, a=3, n=5$ **9.** $n=55$ **10.** $m=4$

## प्रश्नमाला 7.3

**1.** (i) $(2)^8-1$ या 255 (ii) $(2)^7$ या 128

## प्रश्नमाला 7.4

**1.** **(i)** $1-2x^2+3x^4-4x^6$ **(ii)** $1-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{32}-\frac{x^3}{128}$ **(iii)** $\frac{1}{(3)^{2/3}}\left[1+\frac{4}{9}x^2+\frac{20}{81}x^4+\frac{320}{2187}x^6\right]$

**(iv)** $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[1-\frac{2}{5}x+\frac{6}{25}x^2-\frac{4}{25}x^3\right]$ **2. (i)** $\frac{14}{3}x^3$ **(ii)** $\frac{-5}{1024}x^6$ **(iii)** $\frac{-429}{16}x^7$

**3.** **(i)** $-\frac{2.1.4\ldots\ldots(3r-5)}{3^r\ r!}\cdot\frac{x^{3r}}{a^{3r-2}}$ **(ii)** $\frac{3.5.7\ldots\ldots(2r+1)}{r!}x^r$

**(iii)** $\frac{p(p+q)(p+2q)\ldots..\{p+(r-1)q\}}{r!}\left(\frac{x}{q}\right)^r$ **4.** $\frac{88}{(3)^{11}}$ **5.** $-80a^{-6}b^3$ **6.** 66

**7.** $(-1)^r\frac{2n(2n+1)(2n+2)\ldots..(2n+r-1)}{r!}, \frac{4}{9}$ **10.** $\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3-\ldots..$

## प्रश्नमाला 7.5

**2.** **(i)** $9+\frac{56}{5}x$ **(ii)** $\frac{2}{5}+\frac{27}{50}x$ **(iii)** $\left[1-\frac{305}{96}x\right]$

**3.** **(i)** 5.4775 **(ii)** 1.0099 **(iii)** 0.4964 **(iv)** 5.01333

## प्रश्नमाला 7.6

**1.** $(4)^{1/3}$ **2.** $(4/3)^{1/3}$ **3.** $(4)^{1/3}$ **4.** $(10/7)^{1/3}$ **5.** $\sqrt{2/3}$

## विविध प्रश्नमाला 7

**1.** A **2.** C **3.** C **4.** B **5.** A **6.** C **7.** B

**8.** B **9.** A **10.** A **11.** $-8064$ **12.** 101 **13.** $2^{n-1}$ **14.** $2^{30}-1$

**15.** 252 **16.** 171 **18.** $\frac{16}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^4}-4x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{16}-5$