



رشتے اور تفاعلات (RELATIONS AND FUNCTIONS)

❖ دنیا میں بد صورت ریاضی کے لئے کوئی مستقل جگہ نہیں ہے۔ ریاضی کی خوبصورتی کو بیان کرنا بہت مشکل ہے لیکن یہ اتنا ہی سمجھ ہے جتنا کہ کسی بھی خوبصورتی کو بیان کرنا، ہم بالکل صحیح نہیں جانتے کہ ایک خوبصورت نظم کا کیا مطلب ہے، لیکن وہ ہمیں کسی کو بھی پہچاننے سے نہیں روکتا جب ہم اسے پڑھتے ہیں جی۔ ایچ۔ ہارڈی ❖

1.1 تعارف



لچو نے ڈیرچلیٹ
(1805-1859)

اسے یاد کیجیے کہ رشتے اور تفاعلات، علاقہ، ہم علاقہ اور وسعت کے تصور سے گیارہویں جماعت میں ہی متعارف کرا دیا گیا ہے جس میں مختلف قسم کے حقیقی قدر والے تفاعلات اور ان کے گراف بھی شامل ہیں۔ ریاضی میں اصطلاح 'رشتہ' کا مطلب وہی ہے جو انگریزی زبان ہے، جس کے مطابق دو اشیا چیزوں کا ایک دوسرے سے موازنہ کیا جاتا ہے اگر دونوں اشیا یا مقادیر کے درمیان ایک تعلق ہوتا ہے اگر دونوں کے درمیان ایک ربط ہو۔ مان لیجیے اگر ایک اسکول کے بارہویں جماعت کے طلباء کا ایک سیٹ A ہے اور اسی اسکول کے گیارہویں جماعت کے طلباء کا سیٹ B ہے۔ تب A سے B کے رشتے کی کچھ مثالیں اس طرح ہیں۔

$$(i) \{ (a, b) \in A \times B : b \text{ کا بھائی ہے } a \}$$

$$(ii) \{ (a, b) \in A \times B : b \text{ کی بہن ہے } a \}$$

$$(iii) \{ (a, b) \in A \times B : a \text{ کی عمر } b \text{ کی عمر سے زیادہ ہے} \}$$

$$(iv) \{ (a, b) \in A \times B : a \text{ کے ذریعے حاصل کیے گئے سالانہ امتحان میں کل نمبر } b \text{ کے ذریعے حاصل کئے گئے سالانہ امتحان میں کل نمبر سے کم} \}$$

$$\text{ہیں: } \{ (a, b) \in A \times B \}$$

ریاضی 2

(v) اسی علاقہ میں رہتا ہے جہاں b رہتا ہے: $\{(a, b) \in A \times B\}$ لیکن اس سے نتیجہ اخذ کرتے ہوئے ہم A سے B کا رشتہ R کو ریاضیاتی طور پر ایک $A \times B$ کا اختیاری ذیلی سیٹ کے طور پر بیان کرتے ہیں۔

اگر $(a, b) \in R$ ، ہم کہتے ہیں کہ a کا b سے رشتہ R کے ماتحت ایک تعلق ہے اور اسے $a R b$ لکھتے ہیں۔ عام طور پر، $(a, b) \in R$ ہم اس کی قطعی فکر نہیں کرتے کہ کیا a اور b کے درمیان کوئی قابل پہچان کوئی ربط یا تعلق ہے۔ جیسا کہ گیارہویں جماعت میں دیکھا گیا ہے کہ، تفاعلات خاص قسم کے رشتہ ہوتے ہیں۔

اس باب میں ہم مختلف قسم کے رشتوں اور تفاعلات کے بارے میں مطالعہ کریں گے، تفاعلات کی ترکیب، قابل انعکاس تفاعل فنکشن اور دو عنصری عمل۔

1.2 رشتوں کی قسمیں (Types of Relations)

اس سیکشن میں ہم مختلف قسم کے رشتوں کا مطالعہ کریں گے۔ ہم جانتے ہیں کہ ایک سیٹ A میں رشتہ $A \times A$ کا ذیلی سیٹ ہے۔ اس طرح، خالی سیٹ ϕ اور $A \times A$ دو طرفین رشتہ ہیں۔ سمجھانے کے لئے سیٹ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ میں رشتہ R پر غور کیجیے جو کہ $R = \{(a, b) : a - b = 10\}$ سے دیا گیا ہے۔ یہ ایک خالی سیٹ ہے، کیونکہ کوئی بھی جوڑا (a, b) شرط $a - b = 10$ کو مطمئن نہیں کرتا۔ اسی طرح $R' = \{(a, b) : |a - b| \geq 0\}$ مکمل سیٹ $A \times A$ ہے کیونکہ $A \times A$ میں تمام جوڑے (a, b) $|a - b| \geq 0$ کو مطمئن کرتے ہیں۔ ان دو مثالوں سے ہم ذیل میں دی گئی تعریفوں کو بیان کر سکتے ہیں۔

تعریف 1 سیٹ A میں ایک رشتہ R خالی رشتہ کہلاتا ہے، اگر A کا کوئی بھی عنصر کا تعلق A کے کسی بھی عنصر سے نہیں ہے، یعنی،

$$R = \phi \subset A \times A$$

تعریف 2 سیٹ A میں ایک رشتہ R آفاقی رشتہ کہلاتا ہے، اگر A کا ہر عنصر، A کے ہر ایک عنصر سے تعلق رکھتا ہے،

$$R = A \times A$$

دونوں خالی رشتہ اور آفاقی رشتہ اکثر ادنیٰ رشتے کہلاتے ہیں۔

مثال 1 مان لیجئے ایک لڑکوں کے اسکول کے تمام طلباء کا سیٹ A ہے۔ دکھائیے کہ رشتہ R ، A میں جو کہ a, b کی بہن ہے

$R = \{(a, b) \mid a \text{ اور } b \text{ کے قدوں کا فرق 3 میٹر سے کم ہے}\}$ آفاقی رشتہ ہے۔

حل کیونکہ اسکول ایک لڑکوں کا اسکول ہے، اسکول کا کوئی بھی طالب علم اسکول کے کسی طالب علم کی بہن نہیں ہو سکتی۔ اس لیے، $R = \emptyset$ جو دکھاتا ہے کہ R ایک خالی رشتہ ہے۔ اور یہ بھی صاف ہے کہ اسکول کے دو طلباء کے قدوں کا فرق 3 میٹر سے کم ہونا چاہئے۔ یہ دکھاتا ہے کہ $R' = A \times A$ ایک آفاقی رشتہ ہے۔

ریمارک گیارہویں جماعت میں ہم نے رشتہ کو ظاہر کرنے کے دو طریقے دیکھے تھے جن کے نام ہیں روسٹر طریقہ اور سیٹ ساز طریقہ۔ حالانکہ سیٹ $\{1, 2, 3, 4\}$ میں ایک رشتہ جو کہ $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ سے بیان کیا گیا ہے $a R b$ سے بہت سے مصنفوں نے بھی دکھایا ہے اگر اور صرف اگر $b = a + 1$ ۔ ہم اس علامت کا استعمال جہاں موزوں ہو کر سکتے ہیں۔

اگر $(a, b) \in R$ ، ہم کہتے ہیں کہ a کا تعلق b سے ہے اور ہم اسے $a R b$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ ایک بہت ہی اہم رشتہ، جو کہ ریاضی میں بہت اہم کردار ادا کرتا ہے معادلتی رشتہ ہے۔ معادلت کے رشتہ کا مطالعہ کرنے کے لئے، ہم پہلے تین قسم کے رشتوں پر غور کرتے ہیں، جن کے نام ہیں رجوعی، متشاکل اور انتقالی۔

تعریف 3 ایک رشتہ R ایک سیٹ A میں کہلاتا ہے

- (i) رجوعی، اگر $(a, a) \in R$ ، ہر ایک $a \in R$ کے لئے،
- (ii) متشاکل، اگر $(a_1, a_2) \in R$ سے ملتا ہے $(a_2, a_1) \in R$ تمام $a_1, a_2 \in A$ کے لئے،
- (iii) انتقالی، اگر $(a_1, a_2) \in R$ اور $(a_2, a_3) \in R$ سے نکلتا ہے $(a_1, a_3) \in R$ تمام $a_1, a_2, a_3 \in A$ کے لئے۔

تعریف 4 ایک رشتہ R ایک سیٹ A میں ایک معادلتی رشتہ کہلاتا ہے اگر R رجوعی، متشاکل اور انتقالی ہو۔

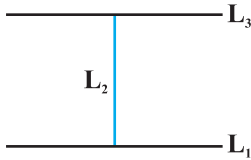
مثال 2 مان لیجئے ایک مستوی میں T تمام مثلثوں کا سیٹ ہے رشتہ کے ساتھ T میں جو کہ دیا گیا ہے $\{T_1, T_2\}$ کے متماثل ہے $R = \{(T_1, T_2)\}$ ۔ دکھائیے کہ R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

حل R رجوعی ہے، کیونکہ ہر مثلث اپنے آپ کے متماثل ہوتا ہے۔ مزید $T_1 \Rightarrow (T_1, T_2) \in R$ کا مطلب ہے $T_2 \Leftarrow T_1$ کے متماثل ہے اسی سے ملتا ہے کہ $(T_1, T_2) \in R$ کے متماثل ہے۔ $(T_2, T_1) \in R \Rightarrow$ اس لیے، R متشاکل ہے۔ اس کے علاوہ $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R$ کا مطلب ہے T_1 متماثل ہے T_2 کے اور T_2 متماثل ہے T_3 کے اس لیے T_1 متماثل ہے T_3 کے اس لیے R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

ریاضی 4

مثال 3 مان لیجئے مستوی L ، تمام خطوط کا سیٹ ہے اور L, R میں ایک رشتہ ہے جو اس طرح بیان کیا گیا ہے $\{(L_2, L_1)\}$ پر عمود ہے۔
 $R = \{(L_1, L_2)\}$ دکھائیے کہ R متشکل ہے لیکن نہ تو رجوعی اور نہ ہی انتقالی ہے۔

حل R رجوعی نہیں ہے، کیونکہ خط L_1 اپنے آپ پر عمود نہیں ہو سکتا، یعنی $R(L_1, L_1) \notin R$ متشکل ہے کیونکہ $(L_1, L_2) \in R$



شکل 1.1

L_2, L_1 پر عمود ہے $\Leftarrow$

L_1, L_2 پر عمود ہے $\Leftarrow$

$L_2, L_2 \in R$ $\Leftarrow$

R انتقالی نہیں ہے۔ کیونکہ، اگر $L_2 L_1$ پر عمود ہے اور $L_3 L_2$ پر عمود ہے، تب $L_3 L_1$ پر کبھی بھی عمود نہیں ہو سکتا۔ حقیقت میں،

$L_3 L_1$ پر متوازی ہے، یعنی، $(L_1, L_2) \in R$ ، $L_2, L_3 \in R$ ، لیکن $(L_1, L_3) \notin R$

مثال 4 دکھائیے کہ رشتہ R سیٹ $\{1, 2, 3\}$ میں دیئے گئے $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ میں رجوعی ہے لیکن نہ تو متشکل اور نہ ہی انتقالی ہے۔

حل R رجوعی ہے، کیونکہ $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ میں واقع ہیں۔ ساتھ ہی، R متشکل نہیں ہے، کیونکہ $(1, 2) \in R$

لیکن $(1, 2) \notin R$ ۔ اسی طرح، R انتقالی نہیں ہے، کیونکہ $(1, 2) \in R$ اور $(2, 3) \in R$ لیکن $(1, 3) \notin R$ ۔

مثال 5 دکھائیے کہ رشتہ R صحیح اعداد کے سیٹ Z میں جو کہ دیا گیا ہے۔

$$R = \{(a, b) : a - b = 2 \text{ کو تقسیم کرتا ہے}\}$$

ایک معادلتی کا رشتہ ہے۔

حل R رجوعی ہے، کیونکہ 2 تمام $a \in Z$ کے لیے $(a - a)$ کو تقسیم کرتا ہے۔ مزید اگر $(a, b) \in R$ ، جو دکھاتا ہے کہ $a - b = 2$ کو تقسیم کرتا ہے اس لیے $b - a = 2$ کو بھی تقسیم کرے گا اس لیے R متشکل ہے۔ اسی طرح، اگر $(a, b) \in R$ ، تب $a - b$ اور

$b - c$ سے تقسیم ہو سکتا ہے۔ اب $a - c = (a - b) + (b - c)$ ایک جفت ہے (کیوں؟)۔ اس طرح، $(a - c)$ سے تقسیم ہو سکتا

ہے۔ یہ دکھاتا ہے کہ R انتقالی ہے۔ اس لیے Z میں ایک معادلتی کا رشتہ ہے۔

مثال 5 میں یہ بات نوٹ کر لیجئے، کہ تمام جفت صحیح اعداد کا تعلق صفر سے ہے، کیونکہ $(0, \pm 2)$ ، $(0, \pm 4)$ وغیرہ۔ R میں واقع ہیں اور کسی بھی طاق صحیح عدد کا تعلق صفر سے نہیں ہے، کیونکہ $(0, \pm 1)$ ، $(0, \pm 3)$ وغیرہ وغیرہ R میں واقع نہیں ہے۔ اسی طرح، تمام طاق صحیح اعداد کا تعلق 1 سے ہے اور کسی بھی جفت صحیح اعداد کا تعلق 1 سے نہیں ہے۔ اس لئے تمام جفت صحیح اعداد کا سیٹ E اور تمام طاق صحیح اعداد کا سیٹ O ، Z کے ذیلی سیٹ ہیں جو ذیل شرائط کو مطمئن کرتا ہے:

(i) E کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے اور O کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے۔

(ii) E کے کسی بھی عنصر کا O کے کسی بھی عنصر سے تعلق نہیں ہے اور اس کے برعکس۔

(iii) E اور O غیر شریک ہیں اور $Z = E \cup O$

ذیلی سیٹ E معادلتی کلاس کہلاتا ہے جس میں صفر شامل ہے اور اسے $[0]$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسی طرح، O معادلتی کلاس ہے جس میں 1 شامل ہے اور $[1]$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہ بات نوٹ کر لیجئے کہ $[0] = [2r]$ ، $[1] \neq [0]$ اور $[1] = [2r + 1]$ ، جہاں $r \in Z$ ۔ حقیقت میں جو ہم نے اوپر ایک اختیاری معادلتی رشتہ R ایک اختیاری سیٹ X میں، X, R کو باہمی غیر مشترک ذیلی سیٹ A_i میں تقسیم کرتا ہے جسے ہم X کے حصے یا ذیلی تقسیم کہتے ہیں جو ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

(i) تمام i کے لئے A_i کے تمام عناصر ایک دوسرے سے تعلق رکھتے ہیں۔

(ii) $i \neq j$ کے لئے، A_i کا کوئی بھی عنصر A_j کے کسی بھی عنصر سے تعلق نہیں رکھتا۔

(iii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ ، $i \neq j$ اور $\bigcup A_j = X$

ذیلی سیٹ A_i معادلتی کلاس کہلاتے ہیں۔ اس معاملہ کا دلچسپ حصہ یہ ہے کہ ہم اس کے برعکس بھی جاسکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، سیٹ Z کے تحت تقسیم میں باہمی غیر شریک ماتحت سیٹ A_1 ، A_2 اور A_3 سے دی گئی ہے جس کا اجماع Z ہے ذیل کے ساتھ

$$A_1 = \{x \in Z : 3, x \text{ کا ضعف ہے}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$A_2 = \{x \in Z : 3, x-1 \text{ کا ضعف ہے}\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$A_3 = \{x \in Z : 3, x-2 \text{ کا ضعف ہے}\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

ایک رشتہ R میں بیان کیجئے جو کہ $\{(a, b) : a - b, 3 \text{ کا ضعف ہے}\}$ جس کو تقسیم کرتا ہے: $R = \{(a, b) : a - b, 3 \text{ کا ضعف ہے}\}$ سے دیا گیا ہے۔ جیسا کہ مثال 5 میں

ریاضی 6

استعمال کیا گیا ہے، اسی طرح کی دلیل دے کر، ہم دکھا سکتے ہیں کہ R ایک معادلتی رشتہ ہے۔ ساتھ ہی A_1 تمام صحیح اعداد Z کے ساتھ میں ملتا ہے جن کا تعلق صفر سے ہے، A_2 تمام صحیح اعداد کے سیٹ کے ساتھ ملتا ہے جن کا تعلق 1، ہے اور A_3 تمام صحیح اعداد کے سیٹ کے ساتھ ملتا ہے جن کا تعلق 2 سے ہے۔ اس طرح $A_1 = [0]$ ، $A_2 = [1]$ اور $A_3 = [2]$ ہے۔ حقیقت میں، $A_1 = [3r]$ ، $A_2 = [3r + 1]$ اور $A_3 = [3r + 2]$ ہے، تمام $r \in Z$ کے لئے۔

مثال 6 مان لیجئے R ایک رشتہ ہے جو کہ سیٹ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ میں $\{(a, b) : \text{یا جفت ہیں یا توطاق ہوں}\}$ سے بیان کیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ R ایک معادلتی رشتہ ہے۔ اس کے آگے دکھائیے کہ ماتحت سیٹ $\{1, 3, 5, 7\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے اور ماتحت سیٹ $\{2, 4, 6\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے، لیکن ماتحت سیٹ $\{1, 3, 5, 7\}$ کے کسی بھی عنصر کا تعلق ماتحت سیٹ $\{2, 4, 6\}$ کے کسی عنصر سے نہیں ہے۔

حل A میں کوئی بھی عنصر a دیا گیا ہے، دونوں a اور a یا توطاق ہوں گے یا جفت ہوں گے، تاکہ $(a, a) \in R$ ۔ اس کے آگے $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ اور a اور b یا توطاق ہوں گے یا جفت ہوں گے $\Rightarrow (b, a) \in R$ ۔ اسی طرح $(a, b) \in R \Rightarrow (b, c) \in R$ تمام عناصر a, b, c یا توطاق ہوں گے یا جفت ہوں گے $\Rightarrow (a, c) \in R$ اس لئے R ایک معادلتی رشتہ ہے۔ اس کے آگے، $\{1, 3, 5, 7\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے، کیونکہ اس ماتحت سیٹ کے تمام عناصر توطاق ہیں۔ اسی طرح، ماتحت سیٹ کے $\{2, 4, 6\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے، کیوں کہ وہ تمام جفت ہیں۔ ساتھ ہی ماتحت سیٹ $\{1, 3, 5, 7\}$ کا کوئی بھی عنصر $\{2, 4, 6\}$ کے کسی بھی عنصر سے تعلق نہیں رکھتا، کیونکہ $\{1, 3, 5, 7\}$ کا کوئی بھی عنصر $\{2, 4, 6\}$ کے کسی بھی عنصر سے تعلق نہیں رکھتا، کیونکہ $\{1, 3, 5, 7\}$ کے عناصر توطاق ہیں، جب کہ $\{2, 4, 6\}$ کے عناصر جفت ہیں۔

مشق 1.1

1- دریافت کیجئے کہ کیا ہر ایک ذیل مثبت رجوعی ہے، متشاکل اور انتقالی ہیں:

(i) رشتہ R سیٹ $A = \{1, 2, 3, \dots, 13, 14\}$ میں، $R = \{(x, y) : 3x - y = 0\}$ کی طرح بیان کیا گیا ہے۔

(ii) رشتہ R طبعی اعداد کے سیٹ میں اس طرح بیان کیا گیا ہے

$$R = \{(x, y) : y = x + 5 \text{ اور } x < 4\}$$

(iii) رشتہ R سیٹ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ میں اس طرح بیان کیا گیا ہے

$$R = \{(x, y) : x, y \text{ سے تقسیم ہو جاتا ہے}\}$$

(iv) رشتہ R صحیح اعداد کے سیٹ Z میں اس طرح بیان کیا گیا ہے

$$R = \{(x, y) : x - y \text{ ایک صحیح عدد ہے}\}$$

(v) رشتہ R انسانوں کے سیٹ A میں ایک شہر میں ایک خاص وقت پر اس طرح دیا گیا ہے

$$R = \{(x, y) : x \text{ اور } y \text{ ایک ہی جگہ کام کرتے ہیں}\}$$

$$R = \{(x, y) : x \text{ اور } y \text{ ایک ہی محلے میں رہتے ہیں}\}$$

$$R = \{(x, y) : x, y \text{ سے صحیح 7 سینٹی میٹر لمبا ہے}\}$$

$$R = \{(x, y) : y, x \text{ کی بیوی ہے}\}$$

$$R = \{(x, y) : y, x \text{ کا والد ہے}\}$$

2- دکھائیے کہ رشتہ R جو کہ حقیقی اعداد کے سیٹ R میں اس طرح بیان کیا گیا ہے $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$ نہ تو رجوعی

ہے نہ ہی متشکل اور نہ ہی انتقالی ہے۔

3- جانچ کیجئے کہ کیا رشتہ R جو کہ سیٹ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ میں اس طرح بیان کیا گیا ہے $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ رجوعی ہے، متشکل یا انتقالی ہے۔

4- جانچئے کہ رشتہ R میں $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$ سے بیان کیا گیا ہے رجوعی ہے اور انتقالی ہے مگر متشکل نہیں۔

5- جانچ کیجئے کہ کیا رشتہ R میں $R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$ سے بیان کیا گیا ہے رجوعی ہے، متشکل ہے یا انتقالی۔

6- دکھائیے کہ رشتہ R سیٹ $\{1, 2, 3\}$ میں جو کہ $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ سے دیا گیا ہے متشکل ہے لیکن نہ تو رجوعی ہے

اور نہ ہی انتقالی ہے۔

7- دکھائیے کہ رشتہ R سیٹ A میں جو کہ ایک کالج کی لائبریری کی کتابوں کا سیٹ ہے اور دیا گیا ہے x اور y میں اوراق کی

تعداد برابر ہے: $R = \{(x, y) : \text{ایک معادلت رشتہ ہے}\}$

8- دکھائیے کہ رشتہ R سیٹ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ میں جو کہ دیا گیا ہے $\{(a, b) : |a - b| \text{ جفت ہے}\}$ سے ایک

معادلتی رشتہ ہے۔ دکھائیے کہ $\{1, 3, 5\}$ کے تمام عناصر کا تعلق ایک دوسرے سے ہے اور $\{2, 4\}$ کے تمام عناصر کا تعلق

ایک دوسرے سے ہے۔ لیکن $\{1, 3, 5\}$ کے کسی بھی عنصر کا تعلق $\{2, 4\}$ کے عنصر سے نہیں ہے۔

9- دکھائیے کہ ہر ایک رشتہ R سیٹ $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 12\}$ میں جو کہ دیا گیا ہے

$$R = \{(a, b) : 4, (a-b) \text{ کا ضعف ہے}\}$$

$$R = \{(a, b) : a = b\}$$

ایک معادلتی رشتہ ہے۔ ہر ایک کیس میں 1، سے تعلق رکھنے والے تمام عناصر کا سیٹ معلوم کیجیے۔

10- ایک رشتہ کی ایک مثال دیجئے۔ جو کہ ہے

(i) متشاکل ہے لیکن نہ تو رجوعی ہے اور نہ ہی انتقالی۔

(ii) انتقالی ہے لیکن نہ تو رجوعی ہے اور نہ ہی متشاکل ہے۔

(iii) رجوعی اور متشاکل ہے لیکن انتقالی نہیں۔

(vi) رجوعی اور انتقالی ہے لیکن متشاکل نہیں ہے۔

(v) متشاکل اور انتقالی ہے لیکن رجوعی نہیں۔

11- دکھائیے کہ رشتہ R جو کہ مستوی میں نقاط کے ایک سیٹ میں دیا گیا ہے {نقطہ P کا فاصلہ مبدا سے یکساں ہے جیسا

کہ نقطہ Q کا فاصلہ مبدا سے: $R = \{(P, Q) : \text{اس کے آگے، دکھائیے کہ تمام نقاط کا سیٹ}$

نقطہ $(0, 0) \neq P$ جو کہ ایک دائرہ ہے اور P سے گزر رہا ہے مبدا اس کا مرکز ہے۔

12- دکھائیے کہ رشتہ R جو کہ تمام مثلثوں کے سیٹ A میں اس طرح بیان کیا گیا ہے $\{T_1, T_2 : \text{مشابہ ہیں}\}$

معادلتی رشتہ ہے۔ تین قائم زاوی مثلث T_1 جس میں اضلاع 3, 4, 5 ہیں، T_2 جس میں اضلاع 5, 12, 13 ہیں اور

T_3 جس میں اضلاع 6, 8, 10 ہیں پر غور کیجئے۔ T_1, T_2 اور T_3 مثلث ہم رشتہ ہیں۔

13- دکھائیے کہ رشتہ R جو کہ تمام کثیر ضلعی کے سیٹ A میں $\{P_1, P_2 : \text{تعداد برابر ہے}\}$

سے ظاہر کیا گیا ہے ایک معادلتی رشتہ ہے۔ تمام عناصر کا سیٹ A میں، جو کہ قائم زاوی مثلث T جس کے اضلاع

3, 4 اور 5 ہیں کا کیا تعلق ہے؟

14- مان لیجئے XY مستوی میں L، خطوط کا سیٹ ہے اور L, R میں ایک رشتہ ہے جو اس طرح بیان کیا گیا ہے $\{L_1, L_2\}$

متوازی ہے: $R = \{(L_1, L_2) : \text{دکھائیے کہ R ایک معادلتی رشتہ ہے۔ ان تمام خطوط کا سیٹ معلوم کیجئے جن کا}$

تعلق خط $y = 2x + 4$ سے ہے۔

- 15- مان لیجئے R سیٹ $\{1,2,3,4\}$ میں ایک رشتہ ہے جو کہ $\{(3,2), (1,2), (2,2), (1,1), (4,4), (1,3), (3,3)\}$ سے دیا گیا ہے۔ صحیح جواب چنئے۔
- (A) R رجوعی اور متشاکل ہے لیکن انتقالی نہیں ہے۔
- (B) R رجوعی اور انتقالی ہے لیکن متشاکل نہیں۔
- (C) R متشاکل اور انتقالی ہے لیکن رجوعی نہیں۔
- (D) R ایک معادلت رشتہ ہے۔

- 16- مان لیجئے سیٹ N میں R ایک رشتہ ہے جو کہ $R = \{(a, b) : a = b-2, b > 6\}$ سے دیا گیا ہے۔ صحیح جواب چنئے۔
- (A) $(2, 4) \in R$ (B) $(3, 8) \in R$ (C) $(6, 8) \in R$ (D) $(8, 7) \in R$

1.3 تفاعلات کی قسمیں (Types of Functions)

ایک تفاعلات کی علامت کچھ اہم تفاعلات کے ساتھ مثال کے طور پر اکائی تفاعلات، مستقل تفاعلات کثیر رکنی تفاعلات، ناطق تفاعلات، مقیاس تفاعلات، سنگم تفاعلات وغیرہ ان کے گرافوں کے ساتھ گیارہویں جماعت میں بتائے جا چکے ہیں۔ دو تفاعلات کا مجموعہ، تفریق، حاصل ضرب اور تقسیم کے بارے میں پڑھا جا چکا ہے۔ کیونکہ تفاعلات کا تصور ریاضی میں ایک عظیم اور خاص سوچ رکھتا ہے اور دوسرے مضامین میں بھی، ہم تفاعلات کے مطالعہ کو اس سے آگے بڑھانا چاہیں گے جہاں چھوڑا تھا۔ اس سیکشن میں ہم تفاعلات کی مختلف قسموں کا مطالعہ کریں گے۔

تفاعلات f_1, f_2, f_3 اور f_4 پر غور کیجئے جو کہ ذیل تصاویر میں دیئے گئے ہیں۔

شکل 1.2 میں ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ X_1 کے مختلف عناصر کی پرچھائیاں تفاعلات f_1 کے زیرِ سائے مختلف ہیں، لیکن f_2 کے زیرِ سائے X_1 کے دو عناصر کی پرچھائیاں یکساں ہیں، جن کا نام b ہے اس کے آگے، کچھ عناصر X_2 میں مثال کے طور پر e اور f ہیں جو کہ f_1 کے زیرِ سائے X_1 کے کسی بھی عناصر کی پرچھائی نہیں ہے جب کہ f_3 کے زیرِ سائیہ X_1 کے کچھ عناصر کی پرچھائیاں ہیں۔ اوپر کا مشاہدہ ذیل کی تعریفوں کی طرف رہنمائی کرتا ہے۔

تعریف 5 تفاعلات $f : X \rightarrow Y$ ایک - یک (یا داخلی) کہا جاتا ہے، اگر x کے مختلف عناصر کی شبیہی جو کہ f کے زیرِ سائیہ مختلف ہیں، یعنی ہر ایک $x_1, x_2 \in X$ کے لئے $f(x_1) = f(x_2)$ کا مطلب ہے $x_1 = x_2$ ورنہ f بہت سے ایک

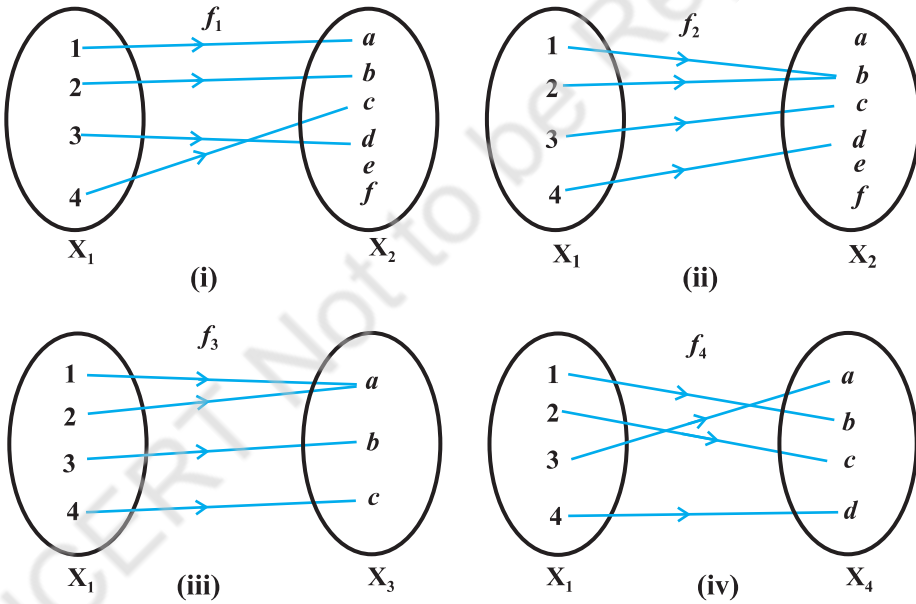
(Many-one) کہلاتا ہے۔

شکل 1.2(i) اور (ii) میں تفاعل f_1 اور f_4 ایک۔ ایک اور تفاعل f_2 اور f_3 شکل 1.2(iii) اور (iii) میں بہت سے۔

ایک ہیں۔

تعریف 6 ایک تفاعل $f : X \rightarrow Y$ کو اون ٹوکھا جاتا ہے، اگر y کا ہر عنصر کی پر چھائی x کا کوئی عنصر ہے f کے ماتحت، یعنی ہر ایک $y \in Y$ کے لئے x میں ایک عنصر X اس طرح موجود ہے کہ $f(x) = y$ ہو۔

شکل 1.2(iii)، (iv) میں تفاعل f_3 اور f_4 اون ٹو ہیں اور فنکشن f_1 شکل (i) 1.2 میں اون ٹو نہیں ہے کیونکہ عناصر e ، f_1 کے زیر سایہ f ، X_2 میں X_1 کے عناصر کی پر چھائی نہیں ہے۔



شکل 1.2(i) سے (iv)

ریمارک تفاعل $f : X \rightarrow Y$ کو اون ٹو ہے اگر اور صرف اگر f کی وسعت $Y =$ ہے

مثال 7 مان لیجئے ایک اسکول کی دسویں جماعت کے 50 طلباء کی تعداد کا سیٹ A ہے۔ مان لیجئے $f : A \rightarrow N$ ایک تفاعل

ہے جو کہ $f(x) =$ طلباء کے رول نمبر ہیں۔ دکھائیے کہ f ایک۔ ایک ہے نہ کہ بر۔

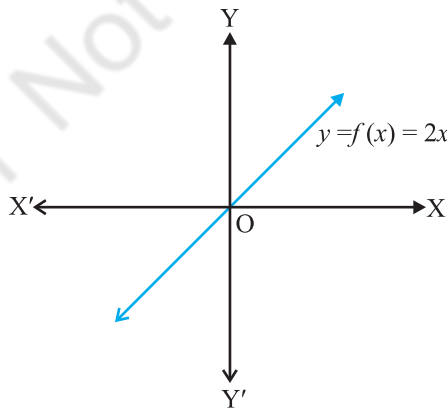
حل کلاس کے دو طلباء کا رول نمبر ایک نہیں ہو سکتا۔ اس لیے f کو ایک - ایک ہونا ہی ہے۔ ہم بغیر وقت برباد کئے یہ مان سکتے ہیں کہ طلباء کے رول نمبر 1 تا 50 ہیں۔ اس کا مطلب ہے N میں 51 کلاس کے کسی بھی طلباء کا رول نمبر نہیں ہے، اس لیے f کے ماتحت 51، x کے کسی بھی عنصر کی پر چھائی نہیں ہے۔ اس کا مطلب ہے f ، a ون ٹو نہیں ہے۔

مثال 8 دکھائیے کہ تقابل $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ جو کہ $f(x) = 2x$ ہے، ایک-ایک ہے لیکن اول ٹو نہیں ہے۔

حل تفاعل f ، ایک - ایک ہے، $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ کے لیے۔ اس کے آگے، f ، f اور f ٹو نہیں ہے، کیونکہ $1 \in \mathbb{N}$ کے لیے $\mathbb{N}$ میں کوئی بھی ایسا x نہیں ہے تاکہ $f(x) = 2x = 1$ ہو۔

مثال 9 ثابت کیجیے کہ تفاعل $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ $f(x) = 2x$ ہے، یک-یک اور اول ٹو ہے۔

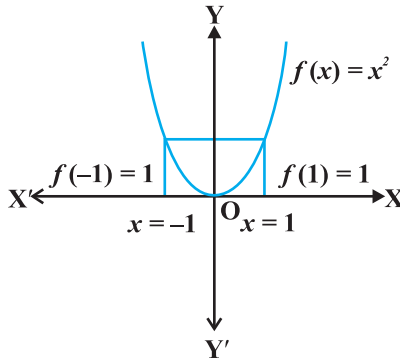
حل ایک ایک ہے، کیونکہ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ اگر کوئی حقیقی عدد $R_{x,y}$ میں دیا گیا ہے، $\frac{y}{2} \in R$ میں موجود ہے تاکہ $f(\frac{y}{2}) = 2 \cdot (\frac{y}{2}) = y$ ۔ اس لئے f ان ٹو ہے۔



شکل 1.3

مثال 10 دکھائیے کہ متقابل $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ جو کہ $f(1)=f(2)=1$ اور $f(x)=x-1$ ہر ایک $x > 2$ کے لیے، سے دیا گیا ہے اور n ٹو ہے لیکن یک - یک نہیں ہے۔

حل، f ، ایک۔ یک نہیں ہے، کیونکہ $f(1) = f(2) = 1$ ہے۔ لیکن f اون ٹو ہے، کیونکہ $y \in \mathbb{N}$ ، $y \neq 1$ دیا گیا ہے، ہم ایک x چن سکتے ہیں $y+1$ کی جگہ تاکہ $f(y+1) = y+1 - 1 = y$ ہے ساتھ ہی $1 \in \mathbb{N}$ کے لیے، ہمارے پاس ہے $f(1) = 1$ ۔



The image of 1 and -1 under f is 1.

شکل 1.4

مثال 11 دکھائیے کہ تفاعل $R \rightarrow R$ جو کہ $f(x) = x^2$ سے بیان

کیا گیا ہے نہ تو یک۔ یک ہے اور نہ ہی بر۔

حل کیونکہ $f(1) = 1 = f(-1)$ ، اس لیے f یک۔ یک نہیں ہے۔

ساتھ ہی، عنصر 2، ہم علاقہ R میں علاقہ R کے کی بھی عنصر کا عکس نہیں ہے (کیوں؟)

اس لیے کہ f اون ٹو نہیں ہے۔

مثال 12 دکھائیے کہ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ، جو کہ دیا گیا ہے۔

اگر x طاق ہے

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{اگر } x \text{ جفت ہے} \\ x-1 & \text{اگر } x \text{ طاق ہے} \end{cases}$$

حل مان لیجیے کہ $f(x_1) = f(x_2)$ ہے۔ یہ نوٹ کر لیجیے کہ اگر x_1 طاق ہے اور x_2 مثبت ہے، تب ہمارے پاس ہوگا $x_1 + 1 = x_2 - 1$ یعنی $x_2 - x_1 = 2$ جو کہ ناممکن ہے۔ اسی طرح x_1 کا جفت ہونا اور x_2 کا طاق ہونے کی ممکنات کو بھی نظر انداز کیا جاسکتا ہے، اسی طرح کی دلیل کا استعمال کر کے۔ اس لیے دونوں x_1 اور x_2 یا تو جفت یا طاق ہونے چاہئیں۔

مان لیجیے دونوں x_1 اور x_2 طاق ہیں۔ تب $x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ ۔ اسی طرح، اگر

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

دونوں x_1 اور x_2 جفت ہیں، تب بھی $x_1 = x_2$ ۔ ساتھ ہی، کوئی بھی طاق $2r+1$ ہم علاقہ $\mathbb{N}$ میں $2r+2$ کا عکس ہے اور کسی بھی مثبت عدد $2r$ کا ہم علاقہ $\mathbb{N}$ میں علاقہ $\mathbb{N}$ میں $2r-1$ کا عکس ہے اس طرح f ، اون ٹو ہے۔

مثال 13 دکھائیے کہ ایک اون ٹو تفاعل $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ ہمیشہ یک۔ یک ہے۔

حل مان لیجیے f ، یک۔ یک نہیں ہے تب علاقہ میں دو عناصر مثال کے طور پر 1، اور 2، موجود ہیں جس کا عکس ہم علاقہ میں وہی

ہے۔ ساتھ ہی f کے زیر سایہ 3 کا عکس صرف ایک عنصر ہو سکتا ہے۔ اس لیے وسعت سیٹ کے زیادہ سے زیادہ ہم علاقہ $\{1, 2, 3\}$ میں دو عناصر ہو سکتے ہیں، جو یہ دکھارہا ہے کہ f ، اون ٹو نہیں ہے، ایک تعاد ہے۔ اس لیے f ، یک۔ یک ہونا ہی چاہئے۔

مثال 14 دکھائیے کہ یک۔ یک۔ یک تفاعل $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ بر ہونا ہی چاہئے۔

حل کیونکہ f ، یک۔ یک ہے، اس لیے f کے زیر سایہ ہم علاقہ $\{1, 2, 3\}$ میں 3 مختلف عناصر ایک ساتھ لینے چاہئے۔ اس لیے f ، کو اون ٹو ہونا ہی ہے۔

ریمارک مثال 13 اور 14 میں دکھائے گئے اختیار محدود سیٹ کے نتائج بھی صحیح ہیں، یعنی، ایک۔ یک۔ یک تفاعل $f : X \rightarrow X$ ضروری ہے کہ اون ٹو ہو اور ایک اون ٹو نقشہ $f : X \rightarrow X$ ضروری ہے کہ یک۔ یک ہو، کسی بھی محدود سیٹ کے لئے۔ اس کے برعکس، مثالیں 8 اور 10 دکھاتی ہیں کہ لامحدود سیٹ کے لئے، یہ صحیح نہیں ہو سکتا۔ حقیقت میں، یہ محدود سیٹ اور لامحدود سیٹ کے بیچ میں ایک کرداری فرق ہے۔

مشق 1.2

1- دکھائیے کہ فنکشن $f : \mathbb{R}_* \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ $f(x) = \frac{1}{x}$ سے بیان کیا گیا ہے یک۔ یک اور بر ہے، جہاں $\mathbb{R}$ غیر صفر

حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔ کیا نتیجہ صحیح ہے، اگر علاقہ $\mathbb{R}_*$ کو N سے بدلا گیا ہو اور ہم علاقہ وہی ہو جو $\mathbb{R}_*$ میں ہے؟

2- ذیل فنکشن کی داخلی اور اون ٹو کی جانچ کیجیے:

(i) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ جو کہ $f(x) = x^2$ دیا گیا ہے

(ii) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ جو کہ $f(x) = x^2$ دیا گیا ہے

(iii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ $f(x) = x^2$ دیا گیا ہے

(iv) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ جو کہ $f(x) = x^3$ دیا گیا ہے

(v) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ جو کہ $f(x) = x^3$ دیا گیا ہے

3- ثابت کیجئے کہ عظیم صحیح عدد فنکشن $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ $f(x) = [x]$ سے دیا گیا ہے نہ تو یک۔ یک ہے اور نہ ہی اون ٹو،

جہاں $[x]$ عظیم صحیح عدد کو ظاہر کرتا ہے جو کہ x کے چھوٹا ہے یا برابر ہے۔

4- دکھائیے کہ مقیاس فنکشن $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ $f(x) = |x|$ دیا گیا ہے، نہ تو یک-یک ہے اور نہ ہی اونٹو جہاں $|x|$

ہے، اگر x مثبت یا 0 ہے اور $|x|$ ، $-x$ ہے، اگر x منفی ہے۔

5- دکھائیے کہ سگنم تفاعل $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } x > 0 \\ 0, & \text{اگر } x = 0 \\ -1, & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

سے دیا گیا ہے نہ تو یک-یک ہے اور نہ ہی بر

6- مان لیجئے $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{4, 5, 6, 7\}$ اور $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ سے A کی طرف ایک تفاعل

ہے۔ دکھائیے کہ f یک-یک ہے۔

7- مندرجہ ذیل ہر ایک کیس میں، بیان کیجئے کہ کیا تفاعل یک-یک ہے، اونٹو ہے یا دو قسمی۔ اپنے جواب کی دلیل دیجیے۔

(i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ $f(x) = 3 - 4x$ سے بیان کیا گیا ہے

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ $f(x) = 1 + x^2$ سے بیان کیا گیا ہے۔

8- مان لیجئے A اور B دو سیٹ ہیں۔ دکھائیے کہ $f : A \times B \rightarrow B \times A$ تاکہ $f(a, b) = (b, a)$ ایک دو قسمی تفاعل ہے۔

9- مان لیجئے $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ جو کہ اگر n طاق ہے $\frac{n+1}{2}$ اور اگر n جفت ہے $\frac{n}{2}$ سے بیان کیا گیا ہے

بیان کیجئے کہ کیا تفاعل f دو قسمی ہے۔ اپنے جواب کی وضاحت دیجئے۔

10- مان لیجئے $A = \mathbb{R} - \{3\}$ اور $B = \mathbb{R} - \{1\}$ ہے تفاعل $f : A \rightarrow B$ پر غور کیجئے جو کہ $f(x) = \left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ سے بیان کیا

گیا ہے۔ کیا f یک-یک ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجئے۔

11- مان لیجئے $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ $f(x) = x^4$ سے بیان کیا گیا ہے۔ صحیح جواب چنیے۔

(A) f یک-یک اور اونٹو ہے (B) f بہت سے ایک اونٹو ہے

(C) f یک-یک ہے نہ کہ اونٹو (D) f نہ تو یک-یک ہے اور نہ ہی اونٹو

12- مان لیجئے $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ $f(x) = 3x$ سے بیان کیا گیا ہے صحیح جواب چنیے۔

(A) f ایک-ایک اور ٹو ہے (B) f بہت سے-ایک اور ٹو ہے

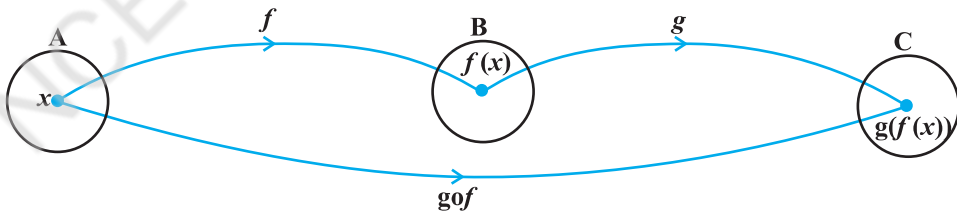
(C) f ایک-ایک ہے نہ کہ اور ٹو (D) f نہ تو ایک-ایک ہے اور نہ ہی اور ٹو

1.4 تفاعل کی ترکیب اور قابلِ انعکاس تفاعل

اس حصہ میں ہم تفاعل کی بناوٹ اور دو قسمی تفاعل کے معکوس کا مطالعہ کریں گے۔ ان تمام طلباء کے سیٹ A پر غور کیجیے جو دسویں جماعت میں 2006 میں بورڈ کے امتحان میں بیٹھے تھے۔ ہر طالب علم جو بورڈ کے امتحان میں بیٹھ رہا ہے اسے بورڈ نے ایک رول نمبر دیا ہے جو کہ ہر ایک طالب علم نے اپنی جواب کی کاپی میں امتحان کے وقت لکھا ہے۔ رازداری کے لیے بورڈ نے طلباء کے رول نمبروں کی شکل بدل کر انہیں از سر نو ان کی جواب کی کاپی میں ایک فرضی کوڈ نمبر ایک رول نمبر کے لیے لکھ دیا۔ مان لیجیے $B \subset \mathbb{N}$ تمام رول نمبروں کا سیٹ ہے اور $C \subset \mathbb{N}$ تمام کوڈ نمبروں کا سیٹ ہے یہ دو فنکشن $f: A \rightarrow B$ اور $g: B \rightarrow C$ کو وجود دیتا ہے جو کہ $f(a)$ وہ رول نمبر ہے جو طالب علم a کو فراہم کیا گیا ہے اور $g(b)$ وہ کوڈ نمبر ہے جو رول نمبر b کو فراہم کیا گیا ہے۔ اس طرح تفاعل f کے ذریعے ہر طالب علم کو ایک رول نمبر فراہم کیا گیا ہے اور ہر رول نمبر کو تفاعل g کے ذریعے ایک کوڈ نمبر فراہم کیا گیا ہے۔ اس طرح، ان دونوں تفاعل کے مجموعہ سے ہر ایک طالب علم ایک کوڈ نمبر کے ساتھ جڑ گیا ہے۔

تعریف 8 مان لیجیے $f: A \rightarrow B$ اور $g: B \rightarrow C$ دو تفاعل ہیں۔ تب f اور g کی بناوٹ، جو کہ $g \circ f$ سے ظاہر کی گئی ہے ایک تفاعل کی طرح بیان کی گئی ہے جو کہ $g \circ f: A \rightarrow C$ ہے۔

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in A.$$



شکل 1.5

مثال 15 مان لیجیے $f: \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{3, 4, 5, 9\}$ اور $g: \{3, 4, 5, 9\} \rightarrow \{7, 11, 15\}$ تفاعل ہیں جو کہ $f(2)=3$

gof در یافت کیجیے۔
 $g(5) = g(9) = 11$ اور $g(3) = g(4) = 7$ اور $f(3) = 4, f(4) = f(5) = 5$

حل ہمارے پاس ہے

$$gof(2) = g(f(2)) = g(3) = 7, gof(3) = g(f(3)) = g(4) = 7, gof(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$$

$$gof(5) = g(5) = 11$$

مثال 16 gof اور fog در یافت کیجیے، اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اور $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ دیے گئے ہیں $f(x) = \cos x$ اور $g(x) = 3x^2$ سے دکھائیے کہ $gof \neq fog$ ہے۔

حل ہمارے پاس ہے $gof(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = 3(\cos x)^2 = 3\cos^2 x$ اسی طرح $fog(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = \cos(3x^2)$ نوٹ کر لیجئے کہ $3\cos^2 x \neq \cos 3x^2$ ہے $x=0$ کے لیے اس طرح $gof \neq fog$

مثال 17 دکھائیے کہ اگر $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$ ہے جو کہ $f(x) = \frac{3x+4}{5x-7}$ سے بیان کیا گیا ہے۔ اور $g: \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$ ہے جو کہ $g(x) = \frac{7x+4}{5x-3}$ سے بیان کیا گیا ہے، تب $gof = I_B$ اور $fog = I_A$ جہاں، $A = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{5}\right\}$ اور $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{7}{5}\right\}$ ہے؛

$I_A(x) = x, \forall x \in A, I_B(x) = x, \forall x \in B$ بالترتیب سیٹ A اور B پر متشابهی تفاعل کہلاتے ہیں۔

حل ہمارے پاس ہے

$$gof(x) = g\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right) = \frac{7\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right) + 4}{5\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right) - 3} = \frac{21x + 28 + 20x - 28}{15x + 20 - 15x + 21} = \frac{41x}{41} = x$$

$$fog(x) = f\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right) + 4}{5\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right) - 7} = \frac{21x + 12 + 20x - 12}{35x + 20 - 35x + 21} = \frac{41x}{41} = x$$
 اسی طرح

اس طرح $g \circ f(x) = x, \forall x \in A$ اور $f \circ g(x) = x, \forall x \in B$ ہے جس کا مطلب ہے

$$f \circ g = I_A \text{ اور } g \circ f = I_B$$

مثال 18 دکھائیے کہ اگر $f : A \rightarrow B$ اور $g : B \rightarrow C$ ایک ایک ہیں، تب $g \circ f : A \rightarrow C$ بھی ایک ایک ہے۔

حل مان لیجئے $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$

$$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \text{کیونکہ } g \text{ ایک ایک ہے}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{کیونکہ } f \text{ ایک ایک ہے}$$

اس لئے، $g \circ f$ ، ایک ایک ہے

مثال 19 دکھائیے کہ اگر $f : A \rightarrow B$ اور $g : B \rightarrow C$ اور $g \circ f : A \rightarrow C$ بھی اولن ٹو ہے۔

حل ایک اختیاری عنصر $z \in C$ دیا گیا ہے g کے زیر سایہ Z کا پہلے کا عکس y موجود ہے تاکہ $g(y) = z$ ، کیونکہ g بر ہے۔ اس

کے آگے، $y \in B$ کے لئے A میں ایک عنصر موجود ہے $f(x) = y$ کے ساتھ، کیونکہ f بر ہے۔ اس لئے $g \circ f(x) = g(f(x))$

$$= g(y) = z \quad \text{ہو، جو کہ دکھاتا ہے کہ } g \circ f \text{ اولن ٹو ہے۔}$$

مثال 20 فنکشن f اور g پر غور کیجیے تاکہ $g \circ f$ کی بناوٹ بیان کی جاسکے اور ایک ایک ہو۔ کیا f اور g دونوں لازمی طور پر

ایک ایک ہیں؟

حل $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = x, \forall x$ کے لئے بیان کیا گیا ہے اور

$$g : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{کیونکہ } g(x) = x \text{ ہے تمام } x=1, 2, 3, 4 \text{ کے لئے اور } g(5)=g(6)=5$$

تب $g \circ f(x) = x \forall x$ ہے جو دکھاتا ہے کہ $g \circ f$ ، ایک ایک ہے۔ لیکن صاف طور پر g ، ایک ایک نہیں ہے؟

مثال 21 کیا دونوں فنکشن f اور g لازمی طور پر اولن ٹو ہیں، اگر $g \circ f$ ، اولن ٹو ہے؟

حل $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ اور $g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ بر غور کیجیے جو کہ $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, f(4)=3$ اور $g(1)=1, g(2)=2, g(3)=3, g(4)=3$ سے بیان کئے گئے ہیں۔ یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ $g \circ f$ اولن ٹو

ہے لیکن f اون ٹو نہیں ہے۔

ریمارک عام طور پر یہ جانچ کی جاسکتی ہے کہ gof ، یک۔ یک ہونے کا مطلب ہے f ، یک۔ یک ہے اسی طرح، gof ،
اولن ٹو ہے کا مطلب ہے g اولن ٹو ہے۔

اب ہم، بورڈ امتحانات کے حوالے سے اس سیکشن (حصہ) کے آغاز میں جو تفاعل f اور g بیان کئے گئے ہیں ان پر نظر رکھیں۔

گے۔ بورڈ کے دسویں جماعت کے امتحان پر بیٹھنے والے طلباء کا فنکشن f کے زیر سایہ ایک رول نمبر دیا گیا ہے g تفاعل کے زیر سایہ ہر رول نمبر کو ایک کوڈ دیا گیا ہے جو بات کی کابیوں کے جانچنے کے بعد نمبروں کی لسٹ میں جانچنے والا ہر کوڈ نمبر کے سامنے نمبر چڑھاتا ہے اور اسے بورڈ کے دفتر میں جمع کر دیتا ہے۔ بورڈ کے افسران اسے ڈی۔ کوڈ کرتے ہیں ہر ایک کوڈ نمبر کو ایک رول نمبر فراہم کرتے ہیں ایک طریقے سے جو اسے g کی طرف لے جاتا ہے اور اس طرح کوڈ نمبر کی بجائے نمبر، رول نمبروں کے ساتھ جڑ جاتے ہیں۔ اس کے آگے، طریقہ دوبارہ f کی طرف پلٹ جاتا ہے جو کہ رول نمبر کو اس رول نمبر سے ملاتا ہے۔ یہ ہماری مدد طلباء کو وہ نمبر دلانے میں کرتا ہے جو انھوں نے حاصل کئے ہیں۔ ہم اس بات کا مشاہدہ کرتے ہیں کہ $g \circ f$ کو حاصل کرنے کے لئے جب ہم f اور g کے ترکیب اجزائی کرتے ہیں، پہلے f اور پھر g کو لئے ہیں، جب کہ اُلٹے طریقے میں $g \circ f$ ترکیب اجزائی کرنے کے لئے پہلے ہم g کا التالیے ہیں اور پھر f کا التالیے۔

مثال 22 مان لیجئے $\{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$: f ایک-یک اور اونٹو تفاعل ہے جو کہ $f(1)=a, f(2)=b$ اور $f(3)=c$ سے دیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ ایک ایسا تفاعل موجود ہے $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ تاکہ $g \circ f = I_X$ اور $f \circ g = I_Y$ جہاں، $X = \{1, 2, 3\}$ اور $Y = \{a, b, c\}$ ہے۔

حل $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ پر غور کیجیے کیونکہ $g(a) = 1$, $g(b) = 2$ اور $g(c) = 3$ ہے۔ یہ جانچ کرنا آسان ہے کہ غیر مفرد $g \circ f = I_X$ ، متماثلی تفاعل X پر ہے اور غیر مفرد $f \circ g = I_Y$ ، متماثلی تفاعل Y پر ہے۔

ریمارک دلچسپ حقیقت یہ ہے کہ اوپر مثال میں دیا گیا نتیجہ اختیاری یک۔ یک اور اون ٹو تفاعل $f : X \rightarrow Y$ کے لئے درست ہے۔ صرف یہ ہی نہیں اس کا برعکس بھی صحیح ہے، یعنی، اگر $f : X \rightarrow Y$ ایک تفاعل ہے تاکہ ایک تفاعل $g : Y \rightarrow X$ موجود ہے، تاکہ $g \circ f = I_X$ اور $f \circ g = I_Y$ ہے، تب f یک۔ یک اور اون ٹو ہوگا ہی۔

اوپر کا بحث و مباحثہ، مثال نمبر 22 اور ریمارک ذیل تعریف کی طرف لے جاتے ہیں:

تعریف 9 ایک تفاعل $f : X \rightarrow Y$ اس وقت قابلِ انعکاس بیان کیا جاسکتا ہے، اگر ایک تفاعل $g : Y \rightarrow X$ موجود ہے تاکہ $gof = I_Y$ اور $fog = I_X$ ہے تفاعل g, f کا معکوس کہلاتا ہے اور اس f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اس طرح اگر f تقلیبی ہے، تب f ایک-یک اور برہونا چاہئے، اور اس کے برعکس اگر f^{-1} ایک-یک اور برہونا ہے، تب f تقلیبی ہونا چاہئے۔ یہ حقیقت ہماری صاف طور پر مدد کرتی ہے یہ ثابت کرنے میں کہ فنکشن f قابلِ انعکاس ہوگا یہ دکھانے سے کہ f ، ایک-یک اور اونٹو ہے، خاص طور پر اس وقت جب f ، کا اصل معکوس نہیں نکالنا ہو۔

مثال 23 مان لیجئے $f : N \rightarrow Y$ ایک فنکشن ہے جو کہ $f(x) = 4x + 3$ سے بیان کیا گیا ہے، جہاں $\{x \in N\}$ کے لئے $Y = \{y \in N : y = 4x + 3\}$ دکھائیے کہ f قابلِ انعکاس ہے۔ اس کا معکوس معلوم کیجیے۔

حل ایک اختیاری عنصر y کے پر غور کیجئے۔ Y کی تعریف سے، $y = 4x + 3$ ہے کسی بھی x کے لئے جو کہ علاقہ N میں ہے یہ

$$x = \frac{(y-3)}{4} \text{ ہے۔ } g : Y \rightarrow N \text{ سے بیان کیجیے۔ اب}$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(4x + 3) = \frac{(4x + 3 - 3)}{4} = x$$

$$fog(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{(y-3)}{4}\right) = \frac{4(y-3)}{4} + 3 = y - 3 + 3 = y$$

یہ دکھاتا ہے کہ $fog = I_Y$ اور $gof = I_N$ ہے، جس کا مطلب ہے کہ f ، قابلِ انعکاس ہے اور g ، کا معکوس ہے۔

مثال 24 مان لیجئے $f : N \rightarrow Y$ ، $Y = \{n^2 : n \in N\} \subset N$ کیونکہ $f(n) = n^2$ ہے۔ دکھائیے کہ f تقلیبی ہے۔ f کا معکوس دریافت کیجیے۔

حل Y میں ایک اختیاری عنصر y ہے جو کہ n^2 کی شکل کا ہے، کسی $n \in N$ کے لئے۔ اس کا مطلب ہے کہ $n = \sqrt{y}$ ، یہ

ایک تفاعل $g : Y \rightarrow N$ دیتا ہے جو کہ $g(y) = \sqrt{y}$ سے بیان کیا گیا ہے۔ اب

$$fog(y) = f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y \text{ اور } gof(n) = g(n^2) = \sqrt{n^2} = n$$

اس کا مطلب ہے کہ f قابلِ انعکاس ہے $f^{-1} = g$ کے ساتھ۔

مثال 25 مان لیجئے $f : N \rightarrow R$ ایک فنکشن ہے جو کہ $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$ سے بیان کیا گیا ہے۔ دکھائیے

کہ $f: N \rightarrow S$ جہاں f, S کی وسعت ہے، قابلِ انعکاس ہے۔ f کا معکوس دریافت کیجیے۔

حل مان لیجئے f کی وسعت کا ایک اختیاری عنصر ہے۔ تب $y = 4x^2 + 12x + 15$ ہے کسی بھی x کے لئے جو کہ N میں موجود ہے، اس کا مطلب یہ ہے کہ $y = (2x + 3)^2 + 6$ - یہ دیتا ہے $x = \frac{((\sqrt{y-6})-3)}{2}$ ، کیونکہ $y \geq 6$ سے۔

ہمیں $g: S \rightarrow N$ کو $g(y) = \frac{((\sqrt{y-6})-3)}{2}$ سے بیان کرنا چاہیے۔

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(4x^2 + 12x + 15) = g((2x + 3)^2 + 6) \\ &= \frac{((\sqrt{(2x+3)^2 + 6 - 6}) - 3)}{2} = \frac{(2x + 3 - 3)}{2} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ g(y) &= f\left(\frac{((\sqrt{y-6})-3)}{2}\right) = \left(\frac{2((\sqrt{y-6})-3)}{2} + 3\right)^2 + 6 \\ &= ((\sqrt{y-6}) - 3 + 3)^2 + 6 = (\sqrt{y-6})^2 + 6 = y - 6 + 6 = y \end{aligned}$$

اس لئے $g \circ f = I_N$ اور $f \circ g = I_S$ ہے۔ اس سے یہ نکلتا ہے کہ f تقلیبی ہے $g = f^{-1}$ کے ساتھ۔

مثال 26 $h: N \rightarrow R$ پر غور کیجیے، جو کہ $f: N \rightarrow N$, $g: N \rightarrow N$ اور $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$

اور $h(z) = \sin z$, $\forall x, y$ میں موجود ہیں کے لئے بیان کیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ $ho(g \circ f) = (hog) \circ f$ ہے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned} ho(g \circ f)(x) &= h(g \circ f(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x)) \\ &= h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = \sin(6x + 4) \quad \forall x \in N. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (hog) \circ f(x) &= (hog)(f(x)) = (hog)(2x) = h(g(2x)) \\ &= h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = \sin(6x + 4), \quad \forall x \in N \end{aligned}$$

یہ دکھاتا ہے کہ $ho(g \circ f) = (hog) \circ f$

یہ نتیجہ عام حالات کے لئے بھی صحیح ہے۔

مسئلہ 1 $h: Z \rightarrow S$ اور $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ متعلق ہیں، تب

$$ho(gof) = (hog)of.$$

ثبوت ہمارے پاس ہے

$$ho(gof)(x) = h(gof(x)) = h(g(f(x))), \forall x \text{ میں } X$$

$$\text{اور } (hog)of(x) = hog(f(x)) = h(g(f(x))), \forall x \text{ میں } X$$

$$\text{اس طرح } ho(gof) = (hog)of.$$

مثال 27 $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ اور $g: \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ پر غور کیجیے جو کہ $f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c, g(a)=1, g(b)=2, g(c)=3$ ، سیب، گیند، بلی

میں دکھائیے کہ f, g اور gof قابلِ تعلق ہیں۔ f^{-1}, g^{-1} اور $(gof)^{-1}$ دریافت کیجئے اور دکھائیے کہ $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ہے۔

حل تعریف سے یہ نوٹ کر لیجیے کہ f اور g دو قسمی متعلق ہیں۔ مان لیجئے کہ $\{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ اور f^{-1} ،

$$\{a, b, c\} \rightarrow \{\text{سیب، گیند، بلی}\} \text{ ہیں جو کہ } f^{-1}\{a\} = 1, f^{-1}\{b\} = 2, f^{-1}\{c\} = 3,$$

$$g^{-1}\{\text{سیب}\} = a, g^{-1}\{\text{گیند}\} = b, g^{-1}\{c\} = 1 \text{ اور } g^{-1}\{\text{بلی}\} = 3 \text{ سے ظاہر کئے گئے ہیں۔ یہ تصدیق کرنا آسان ہے کہ}$$

$$gog^{-1} = I_D \text{ اور } f^{-1}of = I_{\{1, 2, 3\}}, fo f^{-1} = I_{\{a, b, c\}}, g^{-1}og = I_{\{a, b, c\}}$$

$$\{ \text{سیب، گیند، بلی} \} = D \text{ ہے۔ اب } \{ \text{سیب، گیند، بلی} \} \rightarrow \{1, 2, 3\} \text{ دیا گیا ہے سیب } gof(1) = \text{سیب، گیند } gof,$$

$$\text{بلی } gof(3) = \text{بلی، گیند } gof(2) = \text{گیند، سیب } gof(1) = \text{سیب، گیند، بلی} \text{ اور } (gof)^{-1}$$

$$(gof)^{-1}(\text{سیب}) = 1, (gof)^{-1}(\text{گیند}) = 2, (gof)^{-1}(\text{بلی}) = 3$$

$$(gof)^{-1} \circ (gof) = I_{\{1, 2, 3\}} \text{ ہے۔ یہ دیکھنا آسان ہے کہ}$$

$$(gof)^{-1} \circ (gof) = I_D \text{ اس طرح ہم نے دیکھا کہ } f, g \text{ اور } gof \text{ متعلق ہیں۔}$$

$$\text{اب، } f^{-1}og^{-1}(\text{سیب}) = f^{-1}(g^{-1}(\text{سیب})) = f^{-1}(a) = 1 = (gof)^{-1}(\text{سیب})$$

$$f^{-1}og^{-1}(\text{گیند}) = f^{-1}(g^{-1}(\text{گیند})) = f^{-1}(b) = 2 = (gof)^{-1}(\text{گیند}) \text{ اور}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} (b) = f^{-1} (g^{-1} (b)) = f^{-1} (3) = 1 = (g \circ f)^{-1} (b) = f^{-1} (c) = 1 \text{ (جی)۔}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \text{ اس طرح۔}$$

اوپر دیا ہوا نتیجہ عام حالات میں بھی درست ہے۔

مسئلہ 7 مان لیجئے $f: X \rightarrow Y$ اور $g: Y \rightarrow Z$ دو قابلِ انعکس تفاعل ہیں۔ تب $g \circ f$ بھی قابلِ انعکس تفاعل ہے

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \text{ کے ساتھ۔}$$

ثبوت یہ دکھانے کے لئے کہ $g \circ f$ قابلِ انعکس ہے $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ کے ساتھ، یہ دکھانا کافی ہے کہ

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_Z \text{ اور } (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_X \text{ ہے۔}$$

$$\text{اب } (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g) \circ f \text{ مسئلہ 1، سے}$$

$$= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \text{ مسئلہ 1، سے}$$

$$= f^{-1} \circ I_Y \circ f \text{ کی تعریف سے}$$

$$= f^{-1} \circ f = I_X \text{ اسی طرح، یہ بھی دکھایا جاسکتا ہے کہ } (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_Z \text{ ہے۔}$$

مثال 28 مان لیجئے $S = \{1, 2, 3\}$ ہے یہ نکالنے کے لئے کیا تفاعل $f: S \rightarrow S$ جو ذیل طرح سے بیان کیا گیا ہے کے معکوس

موجود ہیں۔ f^{-1} دریافت کیجیے، گریہ موجود ہے۔

$$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \quad (a)$$

$$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\} \quad (b)$$

$$f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\} \quad (c)$$

حل

(a) یہ دیکھنا آسان ہے کہ f ، ایک۔ ایک اور بر ہے، تاکہ f کے دئے ہوئے معکوس f^{-1} کے ساتھ f قابلِ انعکس ہے جو کہ

$$f^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = f \text{ دیا گیا ہے۔}$$

(b) کیونکہ $f(2) = f(3) = 1$ ، ایک۔ ایک نہیں ہے، اس لئے کہ f قابلِ انعکس نہیں ہے۔

(c) یہ دیکھنا آسان ہے کہ f ، ایک۔ ایک اور بر ہے، اس طرح کہ $f^{-1} = \{(3, 1), (2, 3), (1, 2)\}$ کے ساتھ قابلِ انعکس ہو۔

مشق 1.3

1- مان لیجیے $f: \{1, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 5\}$ اور $g: \{1, 2, 5\} \rightarrow \{1, 3\}$ دیئے گئے ہیں
 $f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ اور $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ سے $g \circ f$ لکھیے۔

2- مان لیجیے f, g, h اور R سے R میں تفاعلات کے ہیں۔ دکھائیے کہ

$$(f + g)oh = foh + goh$$

$$(f \cdot g)oh = (foh) \cdot (goh)$$

3- $g \circ f$ اور $f \circ g$ دریافت کیجیے، اگر

$$g(x) = |5x - 2| \text{ اور } f(x) = |x| \quad (i)$$

$$g(x) = x^3 \text{ اور } f(x) = 8x^3 \quad (ii)$$

4- اگر $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$ ، دکھائیے کہ $f \circ f(x) = x$ ہے، تمام $x \neq \frac{2}{3}$ کے لیے f کا معکوس کیا ہے؟

5- وجوہات کے ساتھ بیان کیجیے کہ کیا ذیل تفاعلات کے معکوس ہیں۔

$$(i) f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{10\} \text{ کے ساتھ}$$

$$f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$$

$$(ii) g: \{5, 6, 7, 8\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \text{ کے ساتھ}$$

$$g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$$

$$(ii) h: \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{7, 9, 11, 13\}$$

$$h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$$

6- دکھائیے کہ $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ جو کہ $f(x) = \frac{x}{(x+2)}$ سے دیا گیا ہے ایک-ایک ہے۔ فنکشن

$$f: [-1, 1] \rightarrow \text{سمت } f \text{ کا معکوس دریافت کیجیے۔}$$

(اشارہ۔ کسی بھی f کی وسعت $y \in$ کے لیے $y = f(x) = \frac{x}{x+2}$ کسی بھی x کے لیے جو کہ $[-1, 1]$

$$x = \frac{2y}{(1-y)}, \text{ یعنی،}$$

7- تفاعل $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = 4x + 3$ سے دیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ f قابلِ انعکاس ہے۔ f کا معکوس دریافت کیجیے۔

8- تفاعل $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow [4, \infty)$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = x^2 + 4$ سے دیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ f قابلِ انعکاس ہے۔ معکوس f^{-1} کے ساتھ جو کہ دیا گیا ہے $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$ سے، جہاں $\mathbf{R}_+$ تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔

9- تفاعل $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow [-5, \infty)$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = 9x^2 + 6x - 5$ سے دیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ $f^{-1}(y) = \left(\frac{(\sqrt{y+6}) - 1}{3} \right)$ کے ساتھ قابلِ انعکاس ہے۔

10- مان لیجیے $f: X \rightarrow Y$ ایک قابلِ انعکاس تفاعل ہے۔ دکھائیے کہ f کا معکوس اکلوتا ہے۔

(اشارہ-مان لیجیے g_1 اور g_2 ، f کے دو معکوس ہیں۔ تب

$$(y \in Y, f \circ g_1(y) = 1_y(y) = f \circ g_2(y) \text{ ایک خصوصیت کا استعمال کر کے})$$

11- $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ پر غور کیجیے جو کہ $f(1) = a, f(2) = b$ اور $f(3) = c$ سے دیئے گئے ہیں دریافت کیجیے اور دکھائیے کہ $(f^{-1})^{-1} = f$ ہے۔

12- مان لیجیے $f: X \rightarrow Y$ ایک قابلِ انعکاس تفاعل ہے۔ دکھائیے کہ f^{-1} معکوس f ہے، یعنی، $(f^{-1})^{-1} = f$ ۔

13- اگر $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ دیا گیا ہے $f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$ سے، تب $f \circ f(x)$ ہے۔

$$(A) x^{\frac{1}{3}} \quad (B) x^3 \quad (C) x \quad (D) (3 - x^3).$$

14- مان لیجیے $f: \mathbf{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \rightarrow \mathbf{R}$ ایک تفاعل ہے جو کہ بیان کیا گیا ہے $f(x) = \frac{4x}{3x+4}$ سے f کا معکوس میپ

$$g: \mathbf{R} - \left\{ -\frac{4}{3} \right\} \rightarrow \mathbf{R} \text{ دیا گیا ہے۔}$$

$$(A) g(y) = \frac{3y}{3-4y}$$

$$(B) g(y) = \frac{4y}{4-3y}$$

$$(C) g(y) = \frac{4y}{3-4y}$$

$$(D) g(y) = \frac{3y}{4-3y}$$

1.5 دو عنصری عمل

اسکولی زندگی میں آپ کے سامنے چار بنیادی عمل جمع، تفریق ضرب اور تقسیم آئے ہیں ان عملوں کا اصل مقصد ہے کہ دیئے ہوئے کن ہی دو نمبروں a اور b کے لیے۔ ہم ایک دوسرا نمبر $a+b$ یا $a-b$ یا ab یا $\frac{a}{b}$ ، $b \neq 0$ ، رشتہ بنا لیتے ہیں۔ اس بات کو نوٹ کر لیجیے کہ صرف دو اعداد بیک وقت جوڑے یا ضرب کئے جاسکتے ہیں۔ جب ہمیں تین اعداد کا مجموعہ معلوم کرنے کی ضرورت ہوگی، پہلے ہم دو اعداد کو جوڑیں گے اور تب ان کے مجموعہ کو تیسرے عدد کے ساتھ جوڑیں گے۔ اس طرح مجموعہ، ضرب، تفریق اور تقسیم دو عنصری عملیات کی مثالیں ہیں، کیونکہ (Binary) کا مطلب ہے دو اگر ہم ایک عام تعریف بیان کرنا چاہتے ہیں جو یہ چاروں عملیات کو ایک ساتھ لے، تب اعداد کے سیٹ کو ایک اختیاری سیٹ X سے بدلنا ہوگا اور تب عام دو عنصری عملیات اور کچھ نہیں ہیں بلکہ ضرب a, b اعداد کے کسی بھی جوڑے کے رشتہ X کے ایک عنصر سے دوسرے X کے عنصر میں ہوں گے۔ یہ ایک عام تعریف بیان کرتا ہے جو اس طرح دی گئی ہے۔

تعریف 10 ایک دو عنصری عمل $*$ ایک سیٹ A پر ایک تفاعل $A \times A \rightarrow A$: ہے۔ ہم $(a, b) * a * b$ کو a سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 29 دکھائیے کہ R پر جوڑ تفریق اور ضرب دو عنصری عملیات ہیں، لیکن R پر تقسیم ایک دو عنصری عمل نہیں ہے۔ مزید، دکھائیے کہ سیٹ R غیر صفر حقیقی اعداد پر تقسیم دو عنصری عمل ہے۔

حل $R \times R \rightarrow R$: کے ذریعے دیا گیا ہے۔

$$(a, b) \rightarrow a + b$$

$R \times R \rightarrow R$: کے ذریعے دیا گیا ہے۔

$$(a, b) \rightarrow a - b$$

$R \times R \rightarrow R$: کے ذریعے دیا گیا ہے۔

$$(a, b) \rightarrow ab$$

کیونکہ '، '، '، اور '،' تفاعل ہیں، وہ R پر دو عنصری عمل ہیں۔

لیکن $R \times R \rightarrow R$:، $\div$ ، $(a, b) \rightarrow \frac{a}{b}$ کے ذریعے دیا گیا، ایک تفاعل نہیں ہے اور اس لیے دو عنصری عمل نہیں ہے

کیونکہ $b = a$ کے لیے $\frac{a}{b}$ بیان نہیں کیا گیا ہے۔

حالانکہ $R_* \times R_* \rightarrow R_*$ ، $\div$ ، جو کہ $(a, b) \rightarrow \frac{a}{b}$ کے ذریعے دیا گیا ایک تفاعل ہے اور اس لیے R_* پر دو عنصری عمل ہے۔

مثال 30 دکھائیے کہ تفریق اور تقسیم N پر دو عنصری عمل نہیں ہے۔

حل $N \times N \rightarrow N$ ، $-$ ، جو کہ $(a, b) \rightarrow a - b$ سے دیا گیا ہے، ایک دو عنصری عمل نہیں ہے، کیونکہ $(3, 5)$ کا عکس $-$ کے زیر سایہ $3 - 5 = -2 \in N$ ہے۔ اسی طرح $\div$ ، جو کہ $(a, b) \rightarrow a \div b$ ایک دو عنصری عمل نہیں ہے، کیونکہ $(3, 5)$ کا عکس $\div$ کے زیر سایہ $3 \div 5 = \frac{3}{5} \in N$ ہے۔

مثال 31 دکھائیے کہ $R \times R \rightarrow R$ ، $*$ ، جو کہ $(a, b) \rightarrow a + 4b^2$ سے دکھایا گیا ہے ایک دو عنصری عمل ہے۔

حل کیونکہ $*$ ہر جوڑے (a, b) کو واحد عنصر $a + 4b^2$ کو R میں لے جاتا ہے، R میں ایک دو عنصری عمل ہے R پر۔

مثال 32 مان لیجئے P ایک دیئے ہوئے سیٹ X کے تمام ماتحت سیٹ کا سیٹ ہے۔ دکھائیے کہ

$P \times P \rightarrow P$ ، $\cup$ ، جو کہ دیا گیا ہے۔ $(A, B) \rightarrow A \cup B$ ہے اور $P \times P \rightarrow P$ ، $\cap$ ، جو کہ دیا گیا ہے

$(A, B) \rightarrow A \cap B$ سے سیٹ P پر دو عنصری عملیات ہیں۔

حل کیونکہ اجماع عمل $\cup$ کے ہر جوڑے (A, B) کو $P \times P$ میں ایک واحد عنصر $A \cup B$ ، P میں لے جاتا ہے۔ P ، $\cup$ پر ایک دو عنصری عمل ہے۔ اسی طرح، تقاطع عمل $\cap$ ہر جوڑے (A, B) ، $P \times P$ کے واحد عنصر $A \cap B$ کو P میں لے جاتا ہے، P پر ایک دو عنصری عمل ہے۔

مثال 33 دکھائیے کہ $R \times R \rightarrow R$ ، $\vee$ ، جو کہ $(a, b) \rightarrow$ عظیم $\{a, b\}$ سے دیا گیا ہے اور

$R \times R \rightarrow R$ ، $\wedge$ ، جو کہ $(a, b) \rightarrow$ صغیر سے دیا گیا ہے دو عنصری عمل ہے۔

حل کیونکہ $\vee$ ہر جوڑے (a, b) کو $R \times R$ میں واحد عنصر بنام a اور b کے عظیم کی طرف لے جاتا ہے جو کہ R میں موجود ہے، $\vee$ ایک دو عنصری عمل ہے۔ اسی طرح کی دلیل کا استعمال کرے، کوئی بھی یہ کہہ سکتا ہے کہ $\wedge$ ایک دو عنصری عمل ہے۔

ریمارک $\wedge(4, -7) = -7$ اور $\vee(4, 7) = 7$, $\vee(4, -7) = 4$, $\wedge(4, 7) = 4$ ہے۔

جب ایک سیٹ میں عناصر کی تعداد کم ہے، ہم ایک دو عنصری عمل * کو سیٹ A پر ایک جدول کے ذریعے عمل * کے لیے دکھا سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر $A = \{1, 2, 3\}$ پر غور کیجئے۔ تب، عمل $\vee$ کو مثال 33 میں A پر ذیل عمل جدول (جدول 1.1) پر بیان کیا گیا ہے۔ یہاں $\vee(1, 2) = 2$, $\wedge(2, 3) = 3$, $\vee(1, 3) = 3$ ۔

جدول 1.1

V	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

ہمارے پاس یہاں عملی جدول میں (i, j) کے ساتھ 3 قطاریں اور 3 کالم ہیں، جدول میں سیٹ A کے i^{th} اور j^{th} عناصر کا اندراج عظیم ہے۔ اسے عام عملوں $A \times A \rightarrow A$ کے لیے عام کیا جاسکتا ہے۔ اگر

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ تب عملی جدول میں n قطاریں اور m کالم $(i, j)^{\text{th}}$ اندراج کے ہوں گے کیونکہ

$a_i * a_j$ ہے۔ اس کے برعکس کوئی بھی عملی جدول جس میں n قطاریں اور m کالم دیئے ہوئے ہیں جس میں ہر ایک اندراج $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ کے ایک عنصر کا ہے، ہم ایک دو عنصری عمل $A \times A \rightarrow A$ کو بیان کرتے ہیں جو کہ $a_i * a_j =$ عملی جدول کی i^{th} قطار اور j^{th} کالم کا اندراج سے دیا گیا ہے۔

کوئی بھی اینوٹ کر سکتا ہے کہ 3 اور 4 کسی بھی ترتیب میں جوڑے جاسکتے ہیں اور نتیجہ وہی رہے گا، یعنی، $3 + 4 = 4 + 3$ ، لیکن 3 اور 4 کی تفریق مختلف ترتیب میں مختلف نتیجہ دے گی، یعنی، $3 - 4 \neq 4 - 3$ اسی طرح 3 اور 4 کی ضرب میں، ترتیب کی کوئی اہمیت نہیں ہے، لیکن 3 اور 4 کی تفریق اور تقسیم بے معنی ہے تفریق اور تقسیم کے لئے ہمیں لکھنا پڑے گا، 3 کی 4 سے تفریق کیجیے، 4 کی 3 سے تفریق کیجیے، 3 کو 4 سے تقسیم کیجیے، یا 4 کو 3 سے تقسیم کیجیے۔

یہ ذیل تعریف کی طرف لے جاتی ہے۔

تعریف 11 ایک سیٹ X میں ایک دوغضری عمل تقلیبی کہلاتا ہے، اگر $a * b = b * a$ ہو، ہر ایک $a, b \in X$ کے لیے۔

مثال 34 دکھائیے کہ $+$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ اور $\times$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ تقلیبی دوغضری عمل ہیں، لیکن $\div$: $\mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \rightarrow \mathbf{R}_*$ تقلیبی نہیں ہے۔

حل کیونکہ $a + b = b + a$ اور $' + ' : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ، $\forall a, b \in \mathbf{R}$ ، $a \times b = b \times a$ ، تقلیبی دوغضری عمل ہیں۔ حالانکہ، $\div$ تقلیبی نہیں ہے، کیونکہ $3 - 4 \neq 4 - 3$ کے۔ اسی طرح، $3 \div 4 \neq 4 \div 3$ دکھاتا ہے کہ $\div$ تقلیبی نہیں ہے۔

مثال 35 دکھائیے کہ $*$: $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ جو کہ $a * b = a + 2b$ سے بیان کیا گیا ہے تقلیبی نہیں ہے۔

حل کیونکہ $3 * 4 = 3 + 8 = 11$ اور $4 * 3 = 4 + 6 = 10$ ، جو دکھاتا ہے کہ عمل $*$ تقلیبی نہیں ہے۔

اگر ہم سیٹ X کو تین عناصر کا رشتہ بنانا چاہیں، X پر دوغضری عمل کے ذریعے، تو ہم ایک اصل مسئلہ پر زور دے رہے ہیں۔ عبارت $a * b * c$ کو اس طرح بھی دکھایا جاسکتا ہے $(a * b) * c$ یا $a * (b * c)$ کے ذریعے اور یہ دونوں عبارتیں ایک جیسی نہیں ہوں گی۔ مثال کے طور پر $(5-2)-2 \neq 8-(8-5)$ ۔ اس لیے، تین نمبروں 5, 8 اور 3 کا اجتماع، ایک دوغضری عمل 'تفریق' کے ذریعے بے معنی ہے، جب تک کہ بریکٹ کا استعمال نہ کیا جائے۔ لیکن جوڑے کے کیس میں $8 + 5 + 2$ کی برابر قدر ہے چاہے ہم اسے $8 + 5 + 2$ یا $(8 + 5) + 2$ طرح سے دیکھیں۔ اس لیے 3 یا 3 سے زیادہ نمبروں کا اجتماع جوڑے کے ذریعے بمعنی ہے بغیر بریکٹ کا استعمال کئے ہوئے۔

یہ ذیل کی طرف لے جاتا ہے:

تعریف 12 ایک دوغضری عمل $*$: $A \times A \rightarrow A$ ایک تلازمی عمل کہلاتا ہے اگر

$$(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c, \in A$$

مثال 36 دکھائیے کہ $\mathbf{R}$ پر جمع اور ضرب تلازمی دوغضری عمل ہیں۔ لیکن تفریق $\mathbf{R}$ پر تلازمی نہیں ہے۔ تقسیم $\mathbf{R}$ پر تلازمی نہیں ہے۔

حل جوڑ اور ضرب تلازمی ہیں، کیونکہ $(a + b) + c = a + (b + c)$ اور $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \forall a, b, c \in \mathbf{R}$

تمام کے لیے۔ حالانکہ، تفریق اور تقسیم تلازمی نہیں ہیں، کیونکہ $(8-5)-3 \neq 8-(5-3)$ اور $(8 \div 5) \div 3 \neq 8 \div (5 \div 3)$

مثال 37 دکھائیے کہ $R \times R \rightarrow R : R \times R \rightarrow R$ جو کہ $a * b \rightarrow a + 2b$ سے دیا گیا ہے تلازمی نہیں ہے۔

حل عمل $*$ تلازمی نہیں ہے، کیونکہ

$$(8 * 5) * 3 = (8 + 10) * 3 = (8 + 10) + 6 = 24,$$

$$8 * (5 * 3) = 8 * (5 + 6) = 8 * 11 = 8 + 22 = 30.$$

جبکہ

ریمارک دو عنصری عمل کی تلازمی خصوصیت اس سوچ میں بہت اہم ہے کہ یہ دو عنصری عمل کی خصوصیت ہے، ہم لکھ سکتے ہیں $a_1 * a_2 * \dots * a_n$ جو کہ صاف نہیں ہے۔ لیکن اس خصوصیت کی غیر موجودگی میں، عبارت $a_1 * a_2 * \dots * a_n$ بے معنی ہے اگر ہم بریکٹ کا استعمال نہ کریں۔ اسے یاد کیجئے کہ کچھلی جماعتوں میں بریکٹوں کا استعمال اس وقت ہوتا تھا جب تفریق یا تقسیم کے عملیات ہوتے تھے یا ایک سے زیادہ عمل موجود ہوتے تھے۔

R پر دو عنصری عمل $+$ کے لیے، صفر عدد کا دلچسپ منظر یہ ہے کہ $a + 0 = a = 0 + a$ ، یعنی، کوئی بھی نمبر میں صفر جوڑنے پر نمبر نہیں بدلتا۔ لیکن ضرب کے کیس میں، عدد 1، یہ کردار ادا کرتا ہے، کیونکہ $a \times 1 = a = 1 \times a$ ، $\forall a$ تمام R میں یہ ذیل کی تعریف کی طرف لے جاتا ہے۔

تعریف 13 ایک دو عنصری عمل $A \times A \rightarrow A$ دیا ہوا ہے، ایک عنصر $e \in A$ ، اگر یہ موجود ہے عمل $*$ کے لئے متماثلہ کہلاتا ہے،

$$a * e = a = e * a, a \in A$$

مثال 38 دکھائیے کہ R پر جمع کے لیے صفر متماثلہ ہے اور 1، R پر ضرب کا ہے۔ لیکن عمل

$$: R \times R \rightarrow R \text{ اور } : R_* \times R_* \rightarrow R_*$$

کے لیے کوئی متماثلہ عنصر نہیں ہے۔

حل $a + 0 = 0 + a = a$ اور $a \times 1 = a = 1 \times a, \forall a \in R$ کا مطلب ہے کہ 0 اور 1 بالترتیب عمل $+$ اور $\times$ کے لیے متماثلہ

عنصر ہیں۔ اس کے آگے، R میں، $a - e = e - a$ کے لئے کوئی بھی عنصر e نہیں ہے۔

اسی طرح، R میں ہمیں کوئی بھی عنصر e نہیں ملتا، تاکہ $a \times e = e \times a, \forall a \in R$ میں کے لیے۔ اس طرح $-$ اور $+$ کے لیے

کوئی بھی تماشلی عنصر نہیں ہے۔

ریمارک R پر جمع کے عمل کے لیے صفر تماثلہ ہے لیکن یہ N پر جمع کے عمل کے لیے تماثلہ نہیں ہے، کیونکہ $0 \notin N$ ۔ حقیقت میں جمع کے عمل کا N کے لیے کو تماثلہ نہیں ہے۔

آگے یہ دھیان دیا جاتا ہے کہ جمع کے عمل کے لیے $R \times R \rightarrow R$ کسی بھی دیئے ہوئے $a \in R$ کے لئے R میں $-a$ موجود ہے تاکہ $a + (-a) = 0 = ((-a)) + a$ (جمع کے لئے تماثلہ)

اسی طرح، R پر ضرب کے عمل کے لیے، دیئے ہوئے $a \in R$ میں، $a \neq 0$ میں، $\frac{1}{a}$ چن سکتے ہیں تاکہ $a \times \frac{1}{a} = 1$ (‘ $\times$ ’ کے لیے تماثلہ) $-a \times \frac{1}{a}$ ۔ یہ ذیل تعریف کی طرف لے جاتا ہے۔

تعریف 14 ایک عنصری $A: A \times A \rightarrow A$ ، تماشلی عنصر $e \in A$ میں کے لیے ایک عنصر $a \in A$ کو تقلیبی کہا جاتا ہے عمل $*$ کے ساتھ، اگر کوئی عنصر $b \in A$ میں موجود ہے تاکہ $a * b = e = b * a$ اور a کا معکوس کہلاتا ہے اور اسے a^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 39 دکھائیے کہ R پر جمع کے عمل کے لیے a^{-1} کا معکوس ہے اور $a \neq 0$ کے لیے R پر ضرب کے عمل کے لیے معکوس ہے۔

حل کیونکہ $a + (-a) = 0$ اور $a + (-a) = a - a = 0$ ، اس لئے a^{-1} کا جمع کے لیے معکوس ہے۔

اسی طرح، $a \neq 0$ کے لیے $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$ کا مطلب ہے کہ $\frac{1}{a}$ ضرب کے لیے a کا معکوس ہے۔

مثال 40 دکھائیے کہ $a \in N$ کا معکوس نہیں ہے جمع کے عمل کے لیے N پر اور $\frac{1}{a}$ کا عمل معکوس نہیں ہے ضربی عمل $\times$ کا N پر، $a \neq 1$ کے لیے۔

حل کیونکہ $a \in N$ ، $-a \notin N$ ، جمع کے عمل کے لیے، a پر $-a$ کا معکوس نہیں ہو سکتا، جب کہ $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ ۔ کو مطمئن کرتا ہے۔

اسی طرح، $a \neq 1$ کے لیے N میں $\frac{1}{a}$ ، جس کا مطلب ہے کہ 1 کے علاوہ N میں کسی بھی عنصر کا N پر ضربی عمل کے لیے معکوس نہیں ہوتا۔

مثالیں 38، 36، 34 اور 39 دکھاتی ہیں کہ R پر جمع تقابلی اور تلازمی دوغضری عمل ہے جس میں O متاثری عنصر ہے اور $-a$ ،

$$R \text{ میں } a \text{ کا معکوس ہے تمام } a \text{ کے لیے } R \forall a$$

مشق 1.4

1- معلوم کیجیے کہ کیا کسی ہر ایک تعریف جو کہ نیچے دی گئی ہے دوغضری عمل دیتی ہے یا نہیں۔ جس میں ایک دوغضری عمل نہیں ہے، اس کا جواز پیش کیجیے۔

$$(i) \text{ } Z^+ \text{ پر، بیان کیجیے } a * b = a - b \text{ کے ذریعے}$$

$$(ii) \text{ } Z^+ \text{ پر، بیان کیجیے } a * b = ab \text{ کے ذریعے}$$

$$(iii) \text{ } R \text{ پر، بیان کیجیے } a * b = ab^2 \text{ کے ذریعے}$$

$$(iv) \text{ } Z^+ \text{ پر، بیان کیجیے } a * b = |a - b| \text{ کے ذریعے}$$

$$(v) \text{ } Z^+ \text{ پر، بیان کیجیے } a * b = a \text{ کے ذریعے}$$

2- ہر ایک دوغضری عمل $*$ کے لیے جو کہ نیچے بیان کیا گیا ہے، معلوم کیجیے کہ کیا $*$ تقابلی ہے تلازمی۔

$$(i) \text{ } Z \text{، بیان کیجیے } a * b = a - b$$

$$(ii) \text{ } Q \text{ پر، بیان کیجیے } a * b = a + b + 1$$

$$(iii) \text{ } Q \text{ پر، بیان کیجیے } a * b = \frac{ab}{2}$$

$$(iv) \text{ } Z^+ \text{ پر، بیان کیجیے } a * b = 2^{ab}$$

$$(v) \text{ } Z^+ \text{ پر، بیان کیجیے } a * b = a^b$$

$$(vi) \text{ } R - \{-1\} \text{ پر بیان کیجیے } a * b = \frac{a}{b+1}$$

3- سیٹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ پر دوغضری عمل $\wedge$ پر غور کیجیے جو کہ $\{a, b\} = a \wedge b$ سے بیان کیا گیا ہے۔ عمل $\wedge$ کے لیے عملی جدول لکھیے۔

4- سیٹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ پر ایک دوغضری عمل $*$ پر غور کیجیے جو کہ ذیل ضربی جدول (جدول 1.2) سے دیا گیا ہے۔

$$(i) \text{ } 4 * (2 * 3) \text{ اور } (3 * 4) * 2 \text{ کا حساب لگائیے۔}$$

(ii) کیا * تقلیلی ہے؟

(iii) $(2 * 3) * (4 * 5)$ کا حساب لگائیے۔

(اشارہ: ذیل جدول استعمال کیجیے)

جدول 1.2

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

5- مان لیجیے * سیٹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ پر دو عنصری عمل ہے جو کہ $a = a * b$ اور b کا عدا عظم مشترک (HCF) سے بیان

کیا گیا ہے۔ کیا عمل * عمل کے جیسا ہے جو کہ اوپر 4 میں دیا گیا ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

6- کیا N پر دو عنصری عمل ہے جو کہ $a = a * b$ اور b کے دو اضعاف اقل (LCM) سے دیا گیا ہے۔ معلوم کیجیے۔

(i) $5 * 7, 20 * 16$ (ii) کیا * تقلیلی ہے؟

(iii) کیا * تلازمی ہے؟ (vi) * کا تماثلہ N میں دریافت کیجیے۔

(v) کا کون سے عنصر عمل * کے لئے تقلیلی ہیں۔

7- کیا * سیٹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ پر بیان کیا گیا ہے۔ $a = a * b$ اور b کا عدا عظم مشترک (HCF) ایک دو عنصری عمل ہے

کے ذریعہ؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

8- مان لیجیے * ایک دو عنصری عمل N پر ہے جو کہ بیان کیا گیا ہے $a = a * b$ اور b کے عدا عظم مشترک ہے۔ کیا * تقلیلی ہے؟

کیا * تلازمی ہے؟ کیا اس دو عنصری عمل جو کہ N کے اوپر ہے کے لیے تماثلہ موجود ہے؟

9- مان لیجیے ناطق اعداد کے سیٹ Q پر ایک دو عنصری عمل ہے جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

(i) $a * b = a - b$

(ii) $a * b = a^2 + b^2$

(iii) $a * b = a + ab$

(iv) $a * b = (a - b)^2$

$$(v) \quad a * b = \frac{ab}{4}$$

$$(vi) \quad a * b = ab^2$$

وہ دو عنصری عمل دریافت کیجیے جو تقلیبی ہیں اور جو تلازمی ہیں۔

10- دکھائیے کہ اوپر دیئے ہوئے کسی بھی عمل کی متماثلی نہیں ہے۔

11- مان لیجئے $N \times N = A$ اور دو عنصری عمل A پر اس طرح بیان کیا گیا ہے۔

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$$

دکھائیے کہ تقلیبی اور تلازمی ہے۔ * کے لئے A پر متماثلی عنصر معلوم کیجیے، اگر کوئی ہے۔

12- دکھائیے کہ کیا ذیل بیانات درست ہیں یا غلط۔ وضاحت کیجیے۔

(i) سیٹ N پر ایک دو عنصری عمل * کے لئے $a * a = a$ تمام $a \in N$ کیجیے۔

(ii) اگر * N پر دو عنصری عمل ہے، تب $a * (b * c) = (a * b) * c$

13- ایک دو عنصری عمل * پر N پر غور کیجئے جو کہ $a * b = a^3 + b^3$ سے بیان کیا گیا ہے۔ صحیح جواب چنیے۔

(A) کیا * دونوں تلازمی اور تقلیبی ہے؟

(B) کیا * تقلیبی ہے لیکن تلازمی نہیں؟

(C) کیا * تلازمی ہے لیکن تقلیبی نہیں؟

(D) کیا * نا تو تقلیبی ہے اور نہ تلازمی؟

متفرق مثالیں

مثال 41 اگر R_1 اور R_2 سیٹ A میں معادلتی رشتے ہیں، دکھائیے کہ $R_1 \cap R_2$ بھی ایک معادلتی رشتہ ہے۔

حل کیونکہ R_1 اور R_2 معادلتی رشتے ہیں، $(a, a) \in R_1$ اور $(a, a) \in R_2 \quad \forall a \in A$ کے لیے۔ اس سے نہ نکلتا

ہے کہ $(a, a) \in R_1 \cap R_2 \quad \forall a$ جو دکھاتا ہے کہ $R_1 \cap R_2$ رجوعی ہے۔ اس کے آگے، $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ اور $(b, c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1$ اور $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_2$ انتہائی ہے۔ اس طرح، $R_1 \cap R_2$ ایک

معادلت رشتہ ہے۔

مثال 42 مان لیجیے مثبت صحیح اعداد کے مرتب جوڑوں کے سیٹ A پر R ایک رشتہ ہے جو کہ $(x, y) R (u, v)$ سے بیان کیا گیا ہے اگر اور صرف $xv = yu$ ہے۔ دکھائیے کہ R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

حل صاف طور پر $(x, y) \in A \forall, (x, y) R(x, y)$ ہے کیونکہ $xy = yx$ ہے۔ یہ دکھاتا ہے کہ R رجوعی ہے۔ اس کے آگے، $(x, y) R(u, v) \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx$ اور اس طرح $(u, v) R(x, y)$ یہ دکھاتا ہے کہ R متشاکل ہے۔ اسی طرح، $(x, y) R(u, v)$ اور $(u, v) R(a, b) \Rightarrow xv = yu$ اور $ay = bu$ اور $xv \frac{a}{u} = yu \frac{a}{u} \Rightarrow xv \frac{b}{v} = yu \frac{a}{u} \Rightarrow xb = ya$ اور $(a, b) R(x, y)$ ۔ اس طرح R انتقالی ہے۔ اس طرح، R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

مثال 43 مان لیجیے $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ مان لیجیے R_1 میں ایک رشتہ ہے جو کہ دیا گیا ہے سے $3^x - y$ تقسیم ہوتا ہے: $R_1 = \{(x, y) : x - y \text{ تقسیم ہوتا ہے}\}$ اور R_2 پر ایک دوسرا رشتہ ہے جو دیا گیا ہے۔

حل: $R_1 = R_2$ دکھانے کے لیے $R_2 = \{(x, y) : \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}\}$ یا $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ یا $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\}$ کے لیے نوٹ کر لیجیے کہ سیٹوں $\{1, 4, 7\}$ ، $\{2, 5, 8\}$ اور $\{3, 6, 9\}$ کی خصوصیات ہیں کہ ان کا فرق وہ ہے جو ان سیٹس کے دو عناصر کے درمیان میں 3 کا ضعف ہے۔ اس لیے $x - y \Rightarrow (x, y) \in R_1$ کا ضعف ہے۔ $3 \Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ یا $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ یا $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow (x, y) \in R_2$ اس لیے، $R_1 \subset R_2$ ۔ اسی طرح $3 \Rightarrow \{x, y\} \in R_2 \Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ یا $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ یا $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow x - y$ سے تقسیم ہوتا ہے $\{x, y\} \in R_1$ یہ دکھاتا ہے $R_2 \subset R_1$ اس طرح

مثال 44 مان لیجیے $f: X \rightarrow Y$ ایک تفاعل ہے۔ X میں رشتہ R بیان کیجیے۔ جو کہ دیا گیا ہے $R = \{(a, b): f(a) = f(b)\}$

جانچ کیجیے کہ کیا R ایک معادتی رشتہ ہے۔

حل ہر ایک $a \in X, (a, a) \in R$ کیونکہ $f(a) = f(a)$ ہے، جو دکھاتا ہے کہ R جوئی ہے۔ اسی طرح $(a, b) \in R \Rightarrow f(a) = f(b)$ اور $(b, c) \in R \Rightarrow f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in R$ اس لیے R متشکل ہے۔ اس کے آگے $(a, b) \in R$ اور $f(b) = f(a)$ اور $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in R$ جس کا مطلب ہے R انتقالی ہے۔ اس طرح R ایک معادلتی رشتہ ہے۔

مثال 45 دریافت کیجیے کہ ذیل میں کون سے دو عنصری عمل سیٹ N پر تلازمی ہیں اور کون سے تقلیمی ہیں۔

$$(a) \quad a * b = 1 \quad a, b \in N \quad (b) \quad a * b = \frac{(a+b)}{2} \quad a, b \in N$$

حل (a) صاف طور پر تعریف ہے $a * b = b * a = 1, \forall a, b \in N$ ساتھ ہی $a * (b * c) = a * 1 = a$ اور $(a * b) * c = 1 * c = 1$

$$(1) = 1, a, b, c \in N$$

$$a * b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b * a \text{ ہے تقلیمی}$$

$$(a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2} \right) * c \text{ اس کے آگے،}$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{2} \right) + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$$

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2} \right) \text{ لیکن}$$

$$= \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4} \neq \frac{a+b+2c}{4} \text{ عام طور پر}$$

اس لئے تلازمی نہیں ہے۔

مثال 46 سیٹ $A = \{1, 2, 3\}$ سے اپنے آپ میں تمام یک - یک تفاعل کی تعداد دریافت کیجیے۔

حل یک - یک تفاعل $\{1, 2, 3\}$ سے اپنے آپ میں آسانی سے ایک مبادلہ ہے تین علامتوں 1, 2, 3 پر۔ اس لئے یک -

یک - نقشوں کی کل تعداد $\{1, 2, 3\}$ سے اپنے آپ میں بالکل ایسی ہے جیسا کہ تینوں علامتوں 1, 2, 3 پر مبادلہ کی کل تعداد جو

$$\text{کہ } 6 = 3! \text{ ہے۔}$$

مثال 47 مان لیجیے $A = \{1, 2, 3\}$ ہے۔ تب دکھائیے کہ رشتوں کی تعداد جن میں (1, 2) اور (2, 3) موجود ہیں جو کہ

رجوعی اور انتقالی ہیں لیکن متشاکل نہیں 3 ہے۔

حل سب سے چھوٹا رشتہ R_1 جس میں (1, 2) اور (2, 3) موجود ہیں جو کہ رجوعی اور انتقالی ہیں لیکن متشاکل نہیں $\{(1, 1),$

$(1, 3), (2, 3), (1, 2), (3, 3), (2, 2)\}$ یہ ہے۔ اب، اگر ہم جوڑے (2, 1) کو R_1 میں جوڑیں R_2 حاصل کرنے کے

حل سب سے چھوٹی معاوت رشتہ R_1 ہے جس میں $(1,2)$ اور $(2,1)$ شامل ہے $\{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1)\}$ ہے۔
اب ہمارے پاس صرف 4 جوڑے باقی ہیں جن کے نام ہیں $(1,3), (3,2), (2,3)$ اور $(3,1)$ ۔ اگر ہم ان میں سے کسی ایک کو جوڑتے ہیں۔ مثال کے طور پر $(2,3)$ کو R_1 میں، تب متشاکلت کے لئے ہمیں $(3,2)$ بھی جوڑنا ہوگا۔ اور اب انتقالیت کے لئے جبراً ہمیں $(1,3)$ اور $(3,1)$ کو جوڑنا ہوگا۔ اس طرح معاوت رشتہ R_1 سے بڑا صرف آفاقی رشتہ ہے۔ یہ دکھاتا ہے کہ معاوت رشتوں کی تعداد جن میں $(1,2)$ اور $(2,1)$ شامل 2 ہے۔

حل دو عنصری عمل $\ast$ پر ایک تفاعل ہے $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$ سے $\{1, 2\}$ کو، یعنی، ایک تفاعل $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\} \rightarrow \{1, 2\}$ ۔ کیونکہ مطلوبہ دو عنصری عمل $\ast$ کے لئے '1' متماثل اس لئے $\ast(1, 1) = 1, \ast(1, 2) = 2, \ast(2, 1) = 2$ ہے اور چننے کے لئے $(2, 2)$ برابر ہونا چاہئے '1' کے۔ اس طرح، مطلوبہ دو عنصری عمل کی تعداد صرف ایک ہے۔

$(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$ ہے **بر نہیں**

2020-21

مثال 51 تفاعل $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}$ پر غور کیجیے جو کہ $f(x) = \sin x$ سے دیا گیا ہے اور $g: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}$ ، دونوں f اور g ایک-یک ہونے چاہئے ہیں۔ لیکن $(f+g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ اور $(f-g)(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1$ ہے۔ اس لیے $f+g$ ایک-یک نہیں ہے۔

حل کیونکہ کہیں دو مختلف عناصر x_1 اور x_2 کے لئے $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ میں، $\sin x_1 \neq \sin x_2$ اور $\cos x_1 \neq \cos x_2$ دونوں f اور g ایک-یک ہوتے چاہیے ہیں۔ لیکن $(f+g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ اور $(f+g)(\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1$ ہے۔ اس لئے $f+g$ ایک-یک نہیں ہے۔

باب 1 پر مبنی متفرق مشق

1- مان لیجئے $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ جو کہ $f(x) = 10x + 7$ سے بیان کیا گیا ہے۔ $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ تفاعل دریافت کیجئے تاکہ $g \circ f = f \circ g = I_{\mathbf{R}}$

2- مان لیجئے $f: W \rightarrow W$ جو کہ $f(n) = n - 1$ سے بیان کیا گیا ہے، اگر n طاق ہے اور $f(n) = n + 1$ ، اگر n جفت ہے۔ دکھائیے کہ f تقلیسی ہے۔ f کا معکوس معلوم کیجیے۔ W تمام مکمل اعداد کا سیٹ ہے۔

3- اگر $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ، $f(x) = x^2 - 3x + 2$ سے بیان کیا گیا ہے، $f(x)$ دریافت کیجئے۔

4- دکھائیے کہ فنکشن $f: \mathbf{R} \rightarrow \{x \in \mathbf{R} : -1 < x < 1\}$ جو کہ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ سے بیان کیا گیا ہے، اور $x \in \mathbf{R}$ ہے ایک-یک اور اونٹو تفاعل ہے۔

5- دکھائیے کہ تفاعل $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ جو کہ $f(x) = x^3$ دیا گیا ہے، ایک-یک ہے۔

6- دو تفاعل $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ اور $g: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ کی مثالیں دیجئے تاکہ $g \circ f$ ایک-یک ہے لیکن f ایک-یک نہیں ہے۔

(اشارہ $f(x) = x$ اور $g(x) = |x|$ پر غور کیجئے۔)

7- دو تفاعل $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ اور $g: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ کی مثالیں دیجئے تاکہ $g \circ f$ برہے لیکن f ، اونٹو نہیں ہے

$$(g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{if } x > 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \end{cases} \text{ اور } f(x) = x + 1 \text{ اشارہ})$$

8- ایک غیر خالی سیٹ X دیا گیا ہے، $P(X)$ پر غور کیجیے جو کہ X کے تمام ماتحت سیٹ کا پیٹ ہے۔ رشتہ R کو $P(X)$ میں اس طرح سے بیان کیا گیا ہے۔ ماتحت سیٹ A, B کے لیے $P(X), A \cap B$ اگر اور صرف اگر $A \subset B$ کیا، $P(X), R$ پر ایک معادلتی رشتہ ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

9- ایک غیر خالی سیٹ X دیا گیا ہے۔ دو عنصری عمل $P(X) \times P(X) \rightarrow P(X)$ پر غور کیجیے جو کہ $A * B = A \cap B \forall A, B$ میں موجود ہیں کے لیے دیا گیا ہے، جہاں $P(X), X$ کا پاور سیٹ ہے۔ دکھائیے کہ X ایک تماشلی عنصر ہے اس عمل کے لیے اور صرف X قابلِ تکلیس عنصر ہے $P(X)$ میں عمل * کو مد نظر رکھتے ہوئے۔

10- سیٹ $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ سے خود میں تمام اون ٹو تفاعلات کی تعداد دریافت کیجیے۔

11- مان لیجیے $S = \{a, b, c\}$ اور $T = \{1, 2, 3\}$ ہیں۔ ذیل تفاعل F کا F^{-1} سے T دریافت کیجیے۔ اگر یہ موجود ہے۔

$$(i) \quad F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\} \quad (ii) \quad F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$$

12- دو عنصری عمل $R \times R \rightarrow R$ اور $R \times R \rightarrow R$ پر غور کیجیے جو کہ $a * b = |a - b|$ اور $a \circ b = a, \forall a, b \in R$ تمام $a, b \in R$ کے لیے بیان کیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ * تقلیمی ہے لیکن تلازمی نہیں، $\circ$ تلازمی ہے لیکن تقلیمی نہیں۔ اس کے آگے، دکھائیے کہ تمام $a, b, c \in R$ کے لیے $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * b)$ اگر یہ ایسا ہی ہے، ہم کہتے ہیں کہ عمل *، عمل $\circ$ کے اوپر تقسیم کرتا ہے [کیا، * کے اوپر تقسیم کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

13- ایک غیر خالی سیٹ X دیا ہوا ہے، مان لیجیے $P(X) \times P(X) \rightarrow P(X)$ جو کہ $A * B = (A - B) \cup (B - A), \forall A, B \in P(X)$ سے تمام $A, B \in P(X)$ کے لیے بیان کیا گیا ہے۔ دکھائیے کہ خالی سیٹ ϕ عمل * کے لئے تماشلہ ہے اور A کے تمام عناصر $P(X)$ کے قابلِ تکلیس ہیں $A^{-1} = A$ کے ساتھ۔

$$(A - A) \cup (A - A) = A * A = \phi \text{ اور } (A - \phi) \cup (\phi - A) = A \text{ اشارہ:}$$

14- سیٹ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ پر ایک دو عنصری عمل * بیان کیجیے۔ جو اس طرح ہے۔

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{if } a + b < 6 \\ a + b - 6 & \text{if } a + b \geq 6 \end{cases}$$

دکھائیے کہ اس عمل کے لیے صفر تماشلہ ہے اور سیٹ کا ہر عنصر a قابلِ تکلیس ہے اور $a - 6$ کے a کا معکوس ہے۔

15- مان لیجیے $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-4, -2, 0, 2\}$ اور $f, g: A \rightarrow B$ ایک تفاعل ہے جو کہ $f(x) = x^2 - x$, $x \in A$

اور $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1$, $x \in A$ سے بیان کیا گیا ہے۔ کیا f اور g برابر ہیں۔ اپنے جواب کی وضاحت کیجیے۔

(اشارہ: یہ نوٹ کیا جاسکتا ہے کہ دو تفاعل $f: A \rightarrow B$ اور $g: A \rightarrow B$ ہیں تاکہ $f(a) = g(a) \forall a \in A$ برابر تفاعل کہلاتے ہیں۔

16- مان لیجیے $A = \{1, 2, 3\}$ رشتوں کی تعداد جن میں $(1, 2)$ اور $(1, 3)$ موجود ہوں جو کہ رجوعی اور متشاکل ہے لیکن انتقالی نہیں ہے۔

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

17- مان لیجیے $A = \{1, 2, 3\}$ ۔ تب معاوت کے رشتوں کی تعداد جن میں $(1, 2)$ شامل ہو یہ ہے۔

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

18- مان لیجیے $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ایک سگنم تفاعل ہے جو کہ اس طرح بیان کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

اور $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ عظیم صحیح عدد تفاعل ہے جو کہ دیا گیا ہے $g(x) = [x]$ سے، جہاں $[x]$ عظیم صحیح عدد محور ہے یا x سے

چھوٹا تب کیا $g \circ f$ اور $f \circ g$ میں ملتے ہیں؟

19- سیٹ $\{a, b\}$ پر دو عنصری عمل کی تعداد ہیں۔

- (A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

خلاصہ

اس باب میں ہم نے مختلف قسم کے رشتوں کے بارے میں پڑھا ہے اور معاوتی کے رشتے کے بارے میں، تفاعلات کے ترکیب اجزائی معکوس تفاعل اور دو عنصری عمل۔ اس باب کی اہم مختلف حصہ اس طرح دیئے ہوئے ہیں۔

♦ X میں خالی رشتہ، رشتہ R ہے جو کہ دیا گیا ہے $R = \emptyset \subset X \times X$ ۔

♦ آفاقی رشتہ X میں رشتہ R ہے جو کہ دیا گیا ہے $R = X \times X$ ۔

- ♦ رجوعی رشتہ $X \times R$ میں ایک رشتہ ہے $(a, a) \in R$ کے ساتھ، تمام $a \in X$ ۔
- ♦ متشاکل رشتہ $X \times R$ میں ایک رشتہ ہے جو $(a, b) \in R$ کو مطمئن کرتا ہے جس کا مطلب ہے $(b, a) \in R$ ۔
- ♦ انتقالی رشتہ $X \times R$ میں ایک رشتہ ہے جو کہ $(a, b) \in R$ اور $(b, c) \in R$ کو مطمئن کرتا ہے جس کا مطلب ہے $(a, c) \in R$ ۔
- ♦ معادلتی کارشتہ $X \times R$ میں ایک رشتہ ہے جو کہ رجوعی، متشاکل اور انتقالی ہے۔
- ♦ معادلتی کلاس $[a]$ جس میں $a \in X$ موجود ہے ایک معاوت کارشتہ R کے لئے X میں X کا ماتحت سیٹ ہے تمام عناصر a, b سے تعلق رکھنے والے موجود ہیں۔
- ♦ ایک تفاعل $f: X \rightarrow Y$ یک یک ہے (یا داخلی ہے) اگر $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ، $x_1, x_2 \in X$
- ♦ ایک تفاعل $f: X \rightarrow Y$ f اور Y میں $f(x) = y$ کے لئے $\exists x \in X$ اگر کسی بھی $x \in X$ کے لئے $f(x) = y$ ۔
- ♦ ایک تفاعل $f: X \rightarrow Y$ یک یک اور f اور Y میں $f(x) = y$ کے لئے $\exists x \in X$ اگر کسی بھی $x \in X$ کے لئے $f(x) = y$ ۔
- ♦ تفاعل f کے ترکیب $f: A \rightarrow B$ اور $g: B \rightarrow C$ ایک تفاعل ہے $g \circ f: A \rightarrow C$ جو کہ $g \circ f(x) = g(f(x)) \forall x \in A$ دیئے گئے ہیں۔
- ♦ ایک تفاعل $f: X \rightarrow Y$ قابلِ انعکس ہے اور اگر $\exists g: Y \rightarrow X$ تاکہ $g \circ f = I_X$ اور $f \circ g = I_Y$ ۔
- ♦ ایک تفاعل $f: X \rightarrow Y$ قابلِ انعکس ہے اگر اور صرف اگر f یک یک اور Y میں $f(x) = y$ کے لئے $\exists x \in X$ ۔
- ♦ ایک متناہی سیٹ X دیا ہوا ہے، ایک فنکشن $f: X \rightarrow X$ یک یک ہے (ساتھ ہی اونٹوں) اگر اور صرف اگر f ، اونٹوں (ساتھ ہی یک یک)۔ یہ ایک متناہی سیٹ کی کرداری خصوصیت ہے۔ یہ غیر متناہی سیٹ کے لئے درست نہیں ہے۔
- ♦ ایک دو عنصری عمل $*$ ایک سیٹ A پر ایک فنکشن ہے $A \times A$ سے A تک۔
- ♦ ایک عنصر $e \in X$ دو عنصری عمل کے لئے متماثل عنصر ہے: $X \times X \rightarrow X$ اگر $a * e = a = e * a$ تمام $a \in X$ کے لئے۔
- ♦ ایک عنصر $a \in X$ دو عنصری عمل $*$ کے لئے قابلِ انعکس ہے اگر $b \in X$ موجود ہے تاکہ $a * b = e = b * a$ ۔
- ♦ جہاں دو عنصری عمل $*$ کے لئے متماثل عنصر e متماثل ہے۔ عنصر a, b کا معکوس کہلاتا ہے اور a^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
- ♦ ایک عمل $*$ کے لئے e پر تقابلی ہے اگر $a * b = b * a$ تمام $a, b \in X$ میں موجود ہیں۔
- ♦ ایک عمل $*$ پر تلازمی ہے اگر $(a * b) * c = a * (b * c)$ تمام a, b, c کے لئے جو X میں ہیں۔

تاریخ کے اوراق

فنکشن کی سوچ بہت لمبے عرصے سے موجود ہے جو کہ R-ڈیس کارٹس (1596-1650) کے زمانے سے شروع ہوتی ہے، جس نے اپنی ہاتھ سے لکھی کتاب ”جیومیٹریائی“ 1637 میں جس کا مطلب ہے کچھ مثبت صحیح طاقتیں x^n ایک متغیر x کی جب وہ جیومیٹریائی منحسیوں کا مطالعہ کر رہا تھا مثال کے طور پر زائد، مکانی اور ناقص۔ جیمس گری گوری (1636-1675) نے اپنے کام ”Vera Circuliet Hyperbolae Quadratura“ (1667) میں غور کیا ہے کہ فنکشن ایک تعداد ہے جو کہ دوسری تعداد سے حاصل ہوتا ہے طریقہ الجبری عملیات یا کسی بھی دوسرے عملیات سے۔ بعد میں جی۔ ڈیبلو۔ لینٹس (1646-1716) اپنی کتاب ”Methodus tangentium“ (1673) میں لکھی گئی ہے لفظ ”فنکشن“ کا مطلب ہے ایک اشیاء جو منحنی پر ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر تبدیل ہو رہی ہے جیسے کہ منحنی پر ایک نقطہ کے مختص منحنی کا سلوپ، ایک نقطہ پر مماس اور نارمل۔ حالانکہ، اپنی کتاب ”Historia“ (1714) میں لینٹس نے لفظ ”فنکشن“ کا مطلب نکالا ہے وہ اشیاء جو متغیر پر منحصر ہیں۔ وہ پہلا آدمی تھا جس نے x کا فنکشن کا استعمال کیا ہے۔ جون برنولی (1667-1748) نے علامت $\phi(x)$ کا استعمال پہلی بار 1718 میں x کے فنکشن کو ظاہر کرتی ہیں۔ کولیون ہارڈ (1707-1783) نے عام طور پر گلے لگایا اپنی کتاب 1793 ”Theorie des fonctions analytiques“ میں چھاپی، جہاں اس نے تخلیقی فنکشن پر بحث و مباحثہ کیا اور علامات $f, F, \phi, \psi, \dots$ وغیرہ وغیرہ کا استعمال x کے مختلف فنکشنوں کے لئے کیا۔ اس کے بعد Lejeune Dirichlet (1805-1859) نے فنکشن کی تعریف بیان کی جو اس وقت تک استعمال ہوتی رہی جب تک کہ حال میں استعمال ہونے والی فنکشن کا نظریہ نہ آگیا، یہ اس وقت تک دی گئی جب تک سیٹ کا نظریہ جو کہ رج کیمنٹر (1845-1916) نے پیدا کیا۔ فنکشن کی سیٹ نظریہ آئی اور یقیناً جنہیں آج جانا جاتا ہے صرف ایک نچوڑ ہے Dirichlet کے ذریعہ دی گئی تعریف کا ایک بہت ہی بے ترتیب انداز ہیں۔