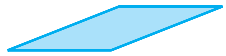
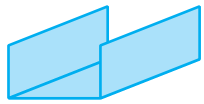
પ્રથમ બંડલનું તળિયું ઢાંકવા માટે લંબચોરસ કાગળનો ટુકડો જોઈશે. તે આકૃતિ 13.2 (a) માં દર્શાવેલ છે.



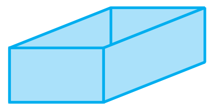
(a)

ત્યાર બાદ બે બાજુ ઢાંકવા બે મોટા લંબચોરસ ટુકડા જોઈશે. તે આકૃતિ 13.2 (b) જેવું દેખાશે.



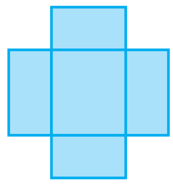
(b)

હવે તેના આગળ અને પાછળના ભાગ ઢાંકવા બીજાં વધુ બે જુદાં માપના લંબચોરસ ટુકડાની જરૂર પડશે. તેમના ઉપયોગથી આકૃતિ 13.2(c) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેની રચના થશે.



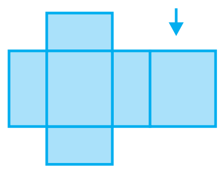
(c)

આ આકૃતિને ખોલી નાંખતાં 13.2 (d) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેની દેખાશે.



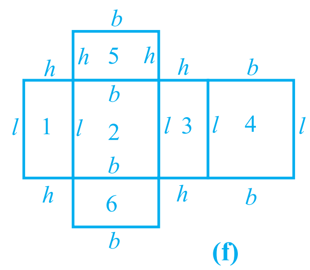
(d)

અંતે આ બંડલને ઉપરથી ઢાંકવા આપણે તળિયા જેટલા જ માપના બીજા લંબચોરસ ટુકડાની જરૂર પડશે. તેને જમણી બાજુ ચોંટાડતા આકૃતિ 13.2(e) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનું ચિત્ર દેખાશે.



(e)

આમ, આપણે લંબઘનની બહારની બધી જ સપાટી ઢાંકવા છ લંબચોરસ ટુકડાનો ઉપયોગ કરેલ છે.



(f)

આકૃતિ 13.2

તે દર્શાવે છે કે લંબઘનની બહારની સપાટી છ લંબચોરસથી બને છે. (અલબત, આ લંબચોરસ પ્રદેશને લંબઘનનાં પૃષ્ઠ કહેવાય). તે દરેકનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે તેમની લંબાઈ અને પહોળાઈના ગુણાકાર કરી અને આવાં છ ક્ષેત્રફળનો સરવાળો કરતાં કુલ ક્ષેત્રફળ મળે.

હવે, જો લંબઘનની લંબાઈ l, પહોળાઈ b અને ઊંચાઈ h લઈએ તો આ માપથી બનતા આકારની આકૃતિ 13.2(f) માં દર્શાવ્યા મુજબની હશે.

આથી, છ લંબચોરસના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો :

લંબચોરસ 1 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times h)$

$+$

લંબચોરસ 2 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times b)$

$+$

લંબચોરસ 3 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times h)$

$+$

લંબચોરસ 4 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times b)$

$+$

લંબચોરસ 5 નું ક્ષેત્રફળ $(= b \times h)$

$+$

લંબચોરસ 6 નું ક્ષેત્રફળ $(= b \times h)$

$= 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h)$

$= 2(lb + bh + hl)$

આ પરથી :

લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ $= \mathbf{2(lb + bh + hl)}$

અહીં l, b અને h લંબઘનની ત્રણ ધાર (*edges*) છે.

નોંધ : આપણે ક્ષેત્રફળનો એકમ એ ચોરસ એકમ તરીકે લઈશું, કારણ કે આ પ્રદેશને આપણે એકમ લંબાઈની બાજુના ચોરસથી ભરીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, જો લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 15 સેમી, 10 સેમી અને 20 સેમી હોય, તો તેનું પૃષ્ઠફળ :

$2[(15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)]$ સેમી^{2}

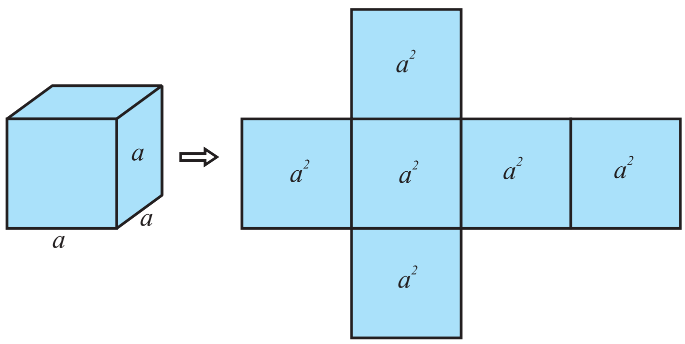
$= 2(150 + 200 + 300)$ સેમી^{2}

$= 2 \times 650$ સેમી^{2}

$= 1300$ સેમી^{2}

યાદ કરો કે જે લંબઘનમાં લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ સમાન હોય તે લંબઘનને ***સમઘન*** (*cube*) કહેવાય. જો સમઘનની દરેક ધાર a હોય, તો આ સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $2(a \times a + a \times a + a \times a)$, અર્થાત્, $6a^2$ (જુઓ આકૃતિ 13.3), જેટલું થાય.

a ધારવાળા સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $= \mathbf{6a^2}$



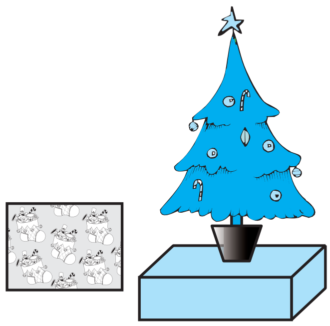
આકૃતિ 13.3

હવે, આપણે લંબઘનનાં છ પૃષ્ઠો પૈકી લંબઘનના પાયા અને તળિયા સિવાયનાં ચાર પૃષ્ઠોનાં જ ક્ષેત્રફળ શોધીએ. આવા કિસ્સામાં ચાર બાજુનાં ક્ષેત્રફળને લંબઘનનાં **પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ***(Lateral surface area)* કહેવાય. *આથી જો લંબઘનની લંબાઈ l, પહોળાઈ b અને ઊંચાઈ h હોય તો તેનાં પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ $2lh + 2bh$ અથવા $2(l + b)h$ થાય. આ જ રીતે, સમઘનની બાજુની લંબાઈ a હોય, તો તેના પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ $4a^2$ થાય.*

ઉપરની બાબતો ધ્યાનમાં રાખતાં સમઘન કે લંબઘનના પૃષ્ઠફળને કુલ પૃષ્ઠફળ કહીશું. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ ગણીએ.

ઉદાહરણ 1 : મેરીને તેનું ક્રિસમસ-ટ્રી શણગારવું છે. તે સાન્તાક્લોઝના ચિત્રને રંગીન કાગળ વીંટાળેલા લંબઘન લાકડાના ખોખા પર આ ક્રિસમસ-ટ્રી મૂકવા માંગે છે. (જુઓ આકૃતિ. 13.4.) આ કામ માટે તેણે ચોક્કસ કેટલો કાગળ ખરીદવો જોઇએ તે જાણવું છે. જો ખોખાની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 80 સેમી, 40 સેમી અને 20 સેમી હોય, તો 40 સેમી લંબાઈવાળા કેટલા ચોરસ કાગળની જરૂર પડે?

ઉકેલ : મેરીને ખોખાની બહારની બાજુ કાગળ ચોંટાડવો છે. આથી જરૂરી કાગળ એ લંબઘન આકારના ખોખાના પૃષ્ઠફળ જેટલો થાય. ખોખાની બાજુનાં માપ:



આકૃતિ 13.4

લંબાઈ = 80 સેમી, પહોળાઈ = 40 સેમી, ઊંચાઈ = 20 સેમી

ખોખાનું પૃષ્ઠફળ $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2[(80 \times 40) + (40 \times 20) + (20 \times 80)]$ સેમી^{2}

$= 2[3200 + 800 + 1600]$ સેમી^{2}

$= 2 \times 5600$ સેમી^{2} $= 11200$ સેમી^{2}

દરેક કાગળનું ક્ષેત્રફળ $= 40 \times 40$ સેમી^{2}

$= 1600$ સેમી^{2}

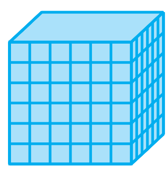
આથી, જરૂરી કાગળના ટુકડાની સંખ્યા $= \dfrac{\text{ખોખાનું પૃષ્ઠફળ}}{\text{એક કાગળનું ક્ષેત્રફળ}} = \dfrac{11200}{1600} = 7$

આથી, તેને 7 કાગળની જરૂર પડશે.

નોંધ : $2lb$, $2bh$, $2hl$ માટે અનુક્રમે 4, 1 અને 2 કાગળ જોઈએ. કાગળના માપ તથા ખોખાના માપ વચ્ચે યોગ્ય ગુણિતના સંબંધ ના હોય, તો કાગળના ટુકડા કરવા પડે તે યોગ્ય નથી.

ઉદાહરણ 2 : હમીદ તેના ઘર માટે સમઘન આકારની ઢાંકણ સાથેની પાણીની ટાંકી બનાવે છે. તેની બહારની ધાર 1.5 મી લાંબી છે. તે તળિયા સિવાયના ટાંકીના બહારના ભાગમાં 25 સેમી લંબાઈવાળી ચોરસ લાદી લગાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.5.) તો લાદીના પ્રત્યેક ડઝનના ₹ 360 લેખે તેણે કરેલ ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ : હમીદ પાંચ બાજુ પર લાદી લગાવવા માંગે છે. તેથી જરૂરી લાદીની સંખ્યા નક્કી કરવા, તેણે ટાંકીનું પૃષ્ઠફળ જાણવું પડે.



આકૃતિ 13.5

સમઘન ટાંકીની ધાર = 1.5 મી = 150 સેમી (= a)

આથી, ટાંકીના બહારના ભાગનું જરૂરી ક્ષેત્રફળ $= 5 \times 150 \times 150$ સેમી^{2}

દરેક ચોરસ લાદીનું ક્ષેત્રફળ = (બાજુ)^2 = 25 × 25 સેમી^{2}

જરૂરી લાદીની સંખ્યા = $\frac{\text{ટાંકીના બહારના ભાગનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{એક લાદીનું ક્ષેત્રફળ}}$

$= \frac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$

1 ડઝન અર્થાત્ 12 લાદી લગાડવાનો ખર્ચ = ₹ 360

એક લાદી લગાડવાનો ખર્ચ = ₹ $\frac{360}{12}$ = ₹ 30

180 લાદી લગાડવાનો ખર્ચ = 180 × ₹ 30 = ₹ 5400

સ્વાધ્યાય 13.1

1. એક 1.5 મી લાંબો, 1.25 મી પહોળો અને 65 સેમી ઊંડો પ્લાસ્ટિકનો ડબો બનાવવો છે. તેનું મથાળું ખુલ્લું છે. પ્લાસ્ટિક શીટની જાડાઈ અવગણતાં

   (i) ડબો બનાવવા જરૂરી શીટનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

   (ii) 1 મી^{2} શીટના ₹ 20 લેખે શીટ માટે થતો કુલ ખર્ચ શોધો.

2. એક રૂમની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 5 મી, 4 મી અને 3 મી છે. રૂમની દીવાલ અને છત 7.50 પ્રતિ મી^{2} પ્રમાણે રંગવાનો ખર્ચ શોધો.

3. લંબચોરસ હૉલના તળિયાની પરિમિતિ 250 મી છે. જો 10 પ્રતિ મી^{2} લેખે તેની ચાર દીવાલ રંગવાનો ખર્ચ ₹15000 થતો હોય, તો હૉલની ઊંચાઈ શોધો.

   [**સૂચના :** ચાર દીવાલનું ક્ષેત્રફળ = પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ]

4. એક ડબામાં 9.375 મી^{2} ક્ષેત્રફળ રંગી શકાય તેટલો રંગ છે. 22.5 સેમી× 10 સેમી × 7.5 સેમી માપની કેટલી ઇંટો આ ડબાના રંગથી રંગી શકાય?

5. એક સમઘન પેટીની બધી જ ધાર 10 સેમી અને બીજી લંબઘન પેટીની લંબાઈ 12.5 સેમી, પહોળાઈ 10 સેમી અને ઊંચાઈ 8 સેમી છે.

   (i) કઈ પેટીનાં પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ વધુ છે? કેટલું?

   (ii) કઈ પેટીનું કુલ પૃષ્ઠફળ ઓછું છે? કેટલું?

6. ઘરમાં એક કાચનું ગ્રીન હાઉસ (તળિયા સાથે) બનાવેલ છે. તેને ટેપથી જોડેલ છે. જો તે 30 સેમી લાંબું, 25 સેમી પહોળું અને 25 સેમી ઊંચું હોય, તો

   (i) વપરાયેલ કાચનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થશે?

   (ii) આ 12 ધાર માટે કેટલી ટેપની જરૂર પડે?

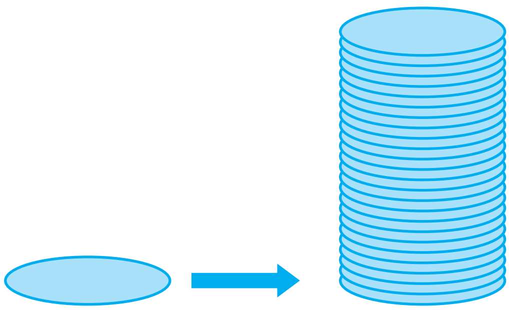
7. મીઠાઈની દુકાન, 'શાંતિ મીઠાઈ' કાગળના ખોખામાં મીઠાઈ પૅક કરવા ખોખા બનાવવાનો ઑર્ડર આપે છે. જુદાં જુદાં માપનાં

બે ખોખાની જરૂરિયાત છે. મોટા ખોખાનાં માપ 25 સેમી × 20 સેમી × 5 સેમી અને નાના ખોખાનાં માપ 15 સેમી × 12 સેમી × 5 સેમી છે. બધાને ઢાંકવા કુલ પૃષ્ઠફળના 5 % વધુ જગા જોઈશે. જો પૂંઠાનો ભાવ 1000 સેમી^{2} ના ₹ 4 હોય, તો બંને પ્રકારના 250 ખોખાં બનાવવાનો ખર્ચ શોધો.

8. પરવીન તેની ગાડી ઢાંકવા જેની ચાર બાજુઓ અને મથાળું તાડપત્રીથી બનાવેલ હોય તેવા માળખાવાળી કામચલાઉ પેટી (તેનો આગળનો ભાગ વીંટાળી શકાય તેવા ઢાંકણ જેવો હોય) આકારનું માળખું રચવા ઇચ્છે છે. માની લઈએ કે સિલાઇ કામમાં ખૂબ ઓછી જગા વપરાય છે. તેને અવગણી શકાય તો 2.5 મી ઊંચી અને 4 મી × 3 મી આધારવાળી પેટી માટે કેટલી તાડપત્રી જોઈશે?

13.3 લંબવૃત્તીય નળાકારનું પૃષ્ઠફળ

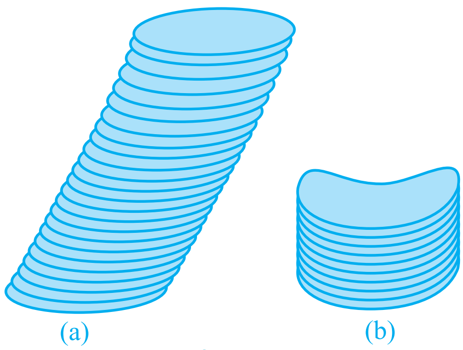
જો આપણે વર્તુળાકાર કાગળને એકબીજા પર ગોઠવીએ તો, આગળ લંબચોરસ ટુકડાની થપ્પી કરી હતી તે મુજબ અહીં આપણને શું મળે? (જુઓ આકૃતિ 13.6.)



આકૃતિ 13.6

અહીં, જો થપ્પી શિરોલંબ હોય, તો આપણને **લંબવૃત્તીય નળાકાર** (*Right circular cylinder*) મળશે, કેમકે તે વર્તુળાકાર તળિયા સાથે કાટખૂણો બનાવે છે. આપણે હવે જોઈએ કે કયા નળાકારને લંબવૃત્તીય નળાકાર ન કહેવાય.

આકૃતિ 13.7 (a) માં તમે જેનો પાયો વર્તુળાકાર છે તેવો નળાકાર જોઈ શકો છો તે પાયા સાથે કાટકોણ રચતો નથી. આથી આપણે તેને લંબવૃત્તીય નળાકાર કહી શકીએ નહિ.

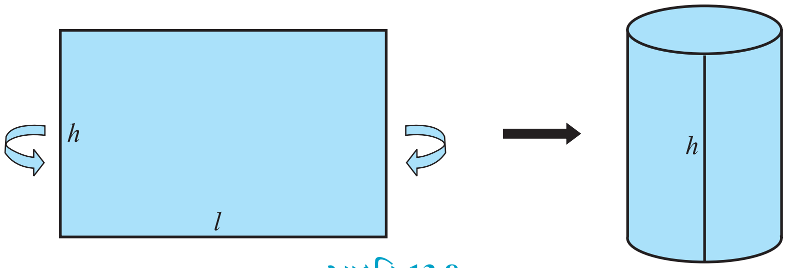


આકૃતિ 13.7

વળી, જો આકૃતિ 13.7 (b) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો પાયો વર્તુળાકાર ના હોય, તોપણ આપણે તેને લંબવૃત્તીય નળાકાર કહીશું નહિ.

નોંધ : અહીં આપણે લંબવૃત્તીય નળાકારનો જ ઉપયોગ કરીશું. આથી, જો ઉલ્લેખ ના કરેલ હોય, તો નળાકાર શબ્દનો અર્થ લંબવૃત્તીય નળાકાર કરીશું.

હવે, જો નળાકારને રંગીન કાગળ વડે ઢાંકવો હોય તો ઓછામાં ઓછો કેટલો કાગળ જોઈએ? પ્રથમ જેની લંબાઈ નળાકારને ગોળ વીંટાળવા માટે પૂરતી હોય તેવો એક લંબચોરસ કાગળનો ટુકડો લો અને પહોળાઈ નળાકારની ઊંચાઈ જેટલી હોય. (જુઓ આકૃતિ 13.8.)



આકૃતિ 13.8

કાગળનું ક્ષેત્રફળ એ નળાકારની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ જેટલું હશે. નોંધો કે કાગળની લંબાઈ એ વર્તુળાકાર પાયાના પરિઘ જેટલી અર્થાત્ $2\pi r$ છે.

આથી, નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = લંબચોરસ કાગળનું ક્ષેત્રફળ

= લંબાઈ × પહોળાઈ

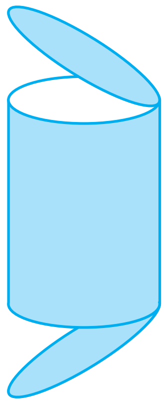
= નળાકારના પાયાની પરિમિતિ × h

= $2\pi r \times h$

આમ, નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi rh$

અહીં, નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા r અને નળાકારની ઊંચાઈ h છે.

નોંધ : નળાકારના કિસ્સામાં, જો બીજો ઉલ્લેખ ના કરેલ હોય, તો 'નળાકારની ત્રિજ્યા' અર્થાત્ 'નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા' સમજીશું.



આકૃતિ 13.9

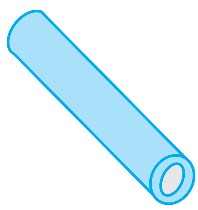
જો નળાકારના તળિયા અને મથાળાને પણ ઢાંકીએ તો, આપણે r ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળો (અલબત વર્તુળાકાર પ્રદેશ)ની જરૂર પડે અને દરેકનું ક્ષેત્રફળ πr^2 હોવાથી (જુઓ આકૃતિ 13.9), નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$ થશે.

આથી, **નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ = $2\pi r(r + h)$**

અહીં, નળાકારની ઊંચાઈ h અને ત્રિજ્યા r છે.

નોંધ : તમે પ્રકરણ 1 પરથી યાદ કરી શકશો કે π એ અસંમેય સંખ્યા છે. આથી, π ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અને અનાવૃત્ત હોય છે. પરંતુ, આપણે ગણતરીમાં તેની લગભગ કિંમત $\frac{22}{7}$ અથવા 3.14 લઈશું.

ઉદાહરણ 3 : સાવિત્રી તેના વિજ્ઞાનના પ્રૉજેક્ટ માટે નળાકાર કેલિડોસ્કૉપનું મોડેલ બનાવવા માંગે છે. કેલિડોસ્કૉપની વક્રસપાટી માટે તે ચાર્ટ પેપરનો ઉપયોગ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.10.) જો કેલિડોસ્કૉપની લંબાઈ 25 સેમી અને ત્રિજ્યા 3.5 સેમી રાખે, તો તેને કેટલા પેપરની જરૂર પડે? તમે $\pi = \frac{22}{7}$ લઈ શકો.



આકૃતિ 13.10

ઉકેલ : નળાકાર કેલિડોસ્કૉપના પાયાની ત્રિજ્યા (r) = 3.5 સેમી

કેલિડોસ્કૉપની ઊંચાઈ (લંબાઈ) $(h) = 25$ સેમી

આવશ્યક ચાર્ટ પેપરનું ક્ષેત્રફળ = કેલિડોસ્કૉપની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25$ સેમી^{2}

$= 550$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.2

જ્યાં અન્ય ઉલ્લેખ ન હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. લંબવૃત્તીય નળાકારની ઊંચાઈ 14 સેમી અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 88 સેમી^{2} છે, તો નળાકારના પાયાનો વ્યાસ શોધો.

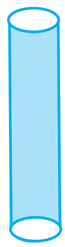
2. ધાતુના પતરામાંથી 1 મીટર ઊંચાઈ અને 140 સેમી પાયાના વ્યાસવાળી બંધ નળાકાર ટાંકી બનાવવી છે. તે બનાવવા માટે કેટલા ચોરસ મીટર પતરાની જરૂર પડશે?

3. ધાતુની એક પાઇપ 77 સેમી લાંબી છે. તેના *આડ છેદ* (*cross section*)નો અંદરનો વ્યાસ 4 સેમી અને બહારનો વ્યાસ 4.4 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.11.) તો,

(i) તેની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(ii) તેની બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(iii) તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો



આકૃતિ 13.11

4. 120 સેમી લંબાઈવાળા રોલરનો વ્યાસ 84 સેમી છે. જો રમતના મેદાનને સમતલ બનાવવા માટે રોલરને 500 આંટા મારવા પડે, તો રમતના મેદાનનું ક્ષેત્રફળ કેટલા ચોરસ મીટર હશે?

5. એક નળાકાર આકારના થાંભલાની ઊંચાઈ 3.5 મીટર અને વ્યાસ 50 સેમી છે. થાંભલાની વક્રસપાટીને રંગવાનો ખર્ચ પ્રતિ મી^{2} ના ₹ 12.50 હોય, તો રંગકામ માટે કુલ ખર્ચ શોધો.

6. એક નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 4.4 મી^{2} છે. જો તેના પાયાની ત્રિજ્યા 0.7 મી હોય, તો તેની ઊંચાઈ શોધો.

7. એક કૂવાની અંદરની સપાટીનો વ્યાસ 3.5 મી છે. તે 10 મી ઊંડો છે, તો

(i) અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

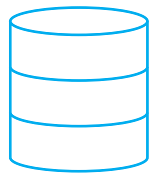
(ii) એક મી^{2} ના ₹ 40 લેખે અંદરની વક્રસપાટીને પ્લાસ્ટર કરવાનો ખર્ચ કેટલો આવે?

8. પાણીને ગરમ કરવાના સાધનમાં એક 28 મી લાંબો અને 5 સેમી વ્યાસવાળો નળાકાર પાઇપ છે. સાધનની ગરમ થતી સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. (i) 4.5 મી ઊંચી અને 4.2 મી વ્યાસ ધરાવતી બંધ નળાકારીય પેટ્રોલની ટાંકીની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(ii) ટાંકી બનાવતી વખતે $\frac{1}{12}$ ભાગનું સ્ટીલ નકામું ગયું હોય, તો ખરેખર કેટલું સ્ટીલ ઉપયોગમાં લેવાયું હશે?

10. આકૃતિ 13.12 માં લૅમ્પશેડની ફ્રેમ જુઓ. તેને સુશોભિત કપડાંથી ઢાંકેલ છે. ફ્રેમના પાયાનો વ્યાસ 20 સેમી અને ઊંચાઈ 30 સેમી છે. મથાળા અને તળિયા માટે 2.5 સેમીની જગા તેને વાળવા માટે રાખેલી છે. લૅમ્પશેડને ઢાંકવા માટે કેટલું કાપડ જોઈશે તે શોધો.



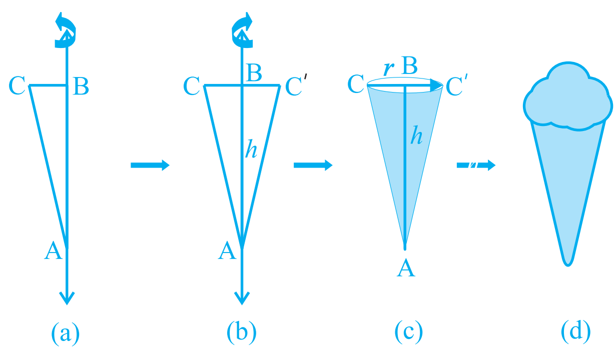
આકૃતિ 13.12

11. વિદ્યાલયના વિદ્યાર્થીઓ કાર્ડબૉર્ડમાંથી કે જેનો પાયો નળાકાર છે તેવું પેન-હૉલ્ડર બનાવવાની અને સજાવવાની હરીફાઈમાં ભાગ લે છે. દરેક પેન-હૉલ્ડરની ત્રિજ્યા 3 સેમી અને ઊંચાઈ 10.5 સેમી રાખવાની છે. વિદ્યાલયે હરીફાઈ માટે કાર્ડબૉર્ડ આપવાના છે. જો 35 હરીફો હોય, તો આ હરીફાઈ માટે કેટલું કાર્ડબૉર્ડ જોઈશે?

13.4 લંબવૃત્તીય શંકુનું પૃષ્ઠફળ

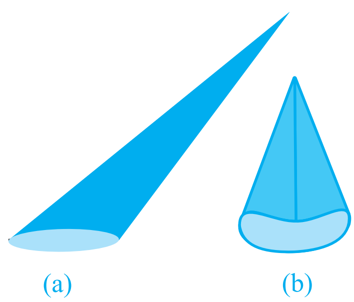
આપણે અત્યાર સુધી એકરૂપ આકૃતિઓની થપ્પી બનાવીને નક્કર પદાર્થ બનાવ્યા. આવી આકૃતિઓને *પ્રિઝમ (ત્રિપાર્શ્વ) (prism)* કહેવાય છે. હવે પ્રિઝમ ના હોય તેવા બીજા પ્રકારના નક્કર પદાર્થનો વિચાર કરીએ. (આ પ્રકારના નક્કર પદાર્થોને *પિરામિડ* કહેવાય.) ચાલો આપણે જોઈએ કે તે કેવી રીતે બનાવવા.

પ્રવૃત્તિ : B પાસે કાટખૂણો હોય તેવો ત્રિકોણ ABC કાપો. ત્રિકોણની કોઈ એક લંબ બાજુ (ધારો કે) AB પર લાંબી ઘટ્ટ દોરી ચોંટાડો. [જુઓ આકૃતિ 13.13(a).] દોરીને ત્રિકોણની બાજુ પર બંને બાજુથી પકડી અને ત્રિકોણને દોરીની આસપાસ ઘણી વખત ઘુમાવો. શું બને છે? તમે ત્રિકોણને દોરીની આસપાસ ફેરવતાં બનતાં આકારને ઓળખી શકશો?[આકૃતિ 13.13(b).] તે તમને તમે જેમાં આઇસક્રીમ ખાધો હોય તેવા આકારની યાદ અપાવે છે? [જુઓ આકૃતિ 13.13 (c) અને (d).]



આકૃતિ 13.13

આને ***લંબવૃત્તીય શંકુ*** (*Right circular cone*) કહેવાય. આકૃતિ 13.13(c) એ A શિરોબિંદુવાળો લંબવૃત્તીય શંકુ છે. AB ને ઊંચાઈ, BC ને ત્રિજ્યા અને AC ને શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ (તિર્યક ઊંચાઈ) કહેવાય. અહીં આપણે B ને શંકુના વર્તુળાકાર પાયાનું કેન્દ્ર કહીશું. આપણે શંકુની ઊંચાઈ, ત્રિજ્યા અને ત્રાંસી ઊંચાઈને અનુક્રમે h, r અને l વડે દર્શાવીશું. ફરી એક વખત કયા શંકુને લંબવૃત્તીય શંકુ ન કહેવાય તે જોઈએ. હવે મુદ્દા પર આવ્યા. (જુઓ આકૃતિ 13.14.)

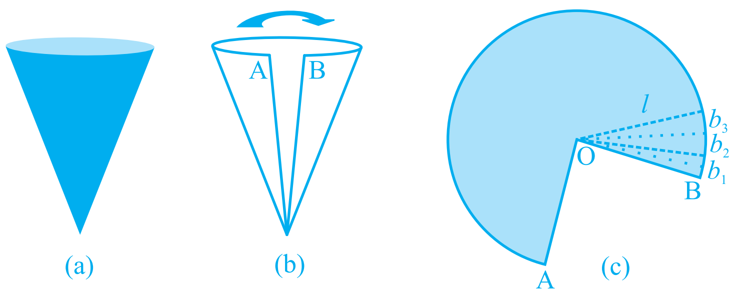


આકૃતિ 13.14

આ આકૃતિઓ લંબવૃત્તીય શંકુ નથી, કારણ કે (a)માં શિરોબિંદુને પાયાના કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા, પાયા સાથે કાટખૂણો બનાવતી નથી અને (b)માં પાયો વર્તુળાકાર નથી. આપણે નળાકારની જેમ માત્ર લંબવૃત્તીય શંકુનો જ અભ્યાસ કરવાના હોવાથી 'શંકુ'નો અર્થ 'લંબવૃત્તીય શંકુ' ગણીશું.

પ્રવૃત્તિ : (i) કાગળમાંથી વ્યવસ્થિત રીતે જેમાં સીધી બાજુ પર ઉપરાઉપરી કાગળ લગાવેલ ન હોય તેવો શંકુ ધારથી કાપો અને તેને શંકુની વક્રસપાટીનો કાગળ પર બનતો આકાર જોઈ શકાય તેવી રીતે ખોલી કાઢો. (તમે જ્યાંથી શંકુને કાપો છો તે શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ છે. તેને l વડે દર્શાવાય છે.) તે વર્તુળાકાર કેકના ભાગ જેવો દેખાય છે.

(ii) A અને B ચિહ્નવાળા અણીવાળા ભાગને જો તમે એકબીજા પાસે લાવો તો, આકૃતિ 13.15 (c)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો વર્તુળાકાર પાયો ધરાવતા શંકુનો વક્રભાગ તમે જોઈ શકશો.



આકૃતિ 13.15

(iii) જો આકૃતિ 13.15 (c)માં દર્શાવેલ કાગળને બિંદુ O માંથી પસાર થતી રેખાઓ દ્વારા બનતાં સેંકડો નાના ટુકડામાં કાપવામાં આવે તો દરેક કપાતો ટુકડો, એ લગભગ નાનો ત્રિકોણ હશે અને તેની ઊંચાઈ શંકુની ત્રાંસી(*slant*) ઊંચાઈ l જેટલી હશે.

(iv) હવે, દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ × દરેક ત્રિકોણના પાયાની લંબાઈ × l

આથી, પૂરા કાગળનું ક્ષેત્રફળ = બધા જ ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળનો સરવાળો

$$= \frac{1}{2}b_1l + \frac{1}{2}b_2l + \frac{1}{2}b_3l + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}l\left(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\right)$$

= $\frac{1}{2}$ × l × આકૃતિ 13.15(c) ની વક્રસપાટીની પૂર્ણ લંબાઈ

(કેમ કે $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વક્રસપાટીનો ભાગ બનાવે છે.)

પરંતુ, આકૃતિનો વક્રભાગ શંકુના પાયાની પરિમિતિ બનાવે છે અને તે શંકુના પાયાના પરિઘ = $2\pi r$ જેટલો છે. અહીં r શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા છે.

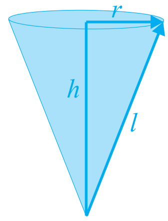
આથી, **શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi rl$**

અહીં, પાયાની ત્રિજ્યા r અને ત્રાંસી ઊંચાઈ l છે.

નોંધો કે, પાયથાગોરસનું પ્રમેય લગાડતાં $l^2 = r^2 + h^2$ (આકૃતિ 13.16 માં જોઈ શકાય.)

અહીં, h શંકુની ઊંચાઈ છે.

આથી, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$



આકૃતિ 13.16

હવે, જો શંકુનો પાયો બંધ હોય, તો r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર કાગળની પણ જરૂર પડે, તેનું ક્ષેત્રફળ πr^2 થાય.

આથી, **શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ = $\pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$**

ઉદાહરણ 4 : જેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી હોય તેવા લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = πrl

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ સેમી}^2 = 220 \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 5 : શંકુની ઊંચાઈ 16 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 12 સેમી છે. તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : અહીં, $h = 16$ સેમી અને $r = 12$ સેમી

આથી, $l^2 = h^2 + r^2$, પરથી

$l = \sqrt{16^2 + 12^2}$ સેમી = 20 સેમી

આથી, વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = πrl

$= 3.14 \times 12 \times 20$ સેમી^{2}

$= 753.6$ સેમી^{2}

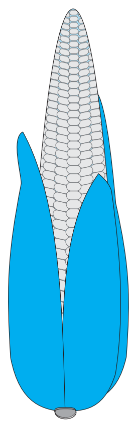
વળી, કુલ પૃષ્ઠફળ = $\pi rl + \pi r^2$

$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12)$ સેમી^{2}

$= (753.6 + 452.16)$ સેમી^{2}

$= 1205.76$ સેમી^{2}

ઉદાહરણ 6 : મકાઈના ડોડાનો આકાર લગભગ શંકુ જેવો હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 13.17.) તેના સૌથી પહોળા ભાગની ત્રિજ્યા 2.1 સેમી અને લંબાઈ (ઊંચાઈ) 20 સેમી છે. જો ડોડાની પ્રત્યેક 1 સેમી^{2} સપાટી પર આશરે 4 મકાઈના દાણા હોય, તો આખા ડોડા પર કુલ કેટલા દાણા હશે, તે શોધો.


આકૃતિ 13.17

ઉકેલ : મકાઈના દાણા માત્ર ડોડાની વક્રસપાટી પર જ હોવાથી, કુલ મકાઈના દાણા શોધવા આપણે તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું. આ પ્રશ્નમાં, આપણને મકાઈના ડોડાની ઊંચાઈ આપેલ હોવાથી તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધીશું.

અહીં, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ સેમી $= \sqrt{404.41}$ સેમી = 20.11 સેમી

આથી, મકાઈના ડોડાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl = \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11$ સેમી^{2} $= 132.726$ સેમી^{2} $= 132.73$ સેમી^{2} (લગભગ)

1 સેમી^{2} ડોડાની વક્રસપાટી પર દાણાની સંખ્યા = 4

આથી, આખા ડોડા પર દાણાની સંખ્યા = 132.73 × 4 = 530.92 = 531 (લગભગ)

આથી, મકાઈના ડોડા પર આશરે 531 મકાઈના દાણા હશે.

સ્વાધ્યાય 13.3

જ્યાં અન્ય ઉલ્લેખ ન કરેલ હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. શંકુના પાયાનો વ્યાસ 10.5 સેમી અને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી છે. તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

2. જેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 21 મી અને પાયાનો વ્યાસ 24 મી હોય તેવા શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.

3. શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 308 સેમી^{2} અને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 14 સેમી છે. આ શંકુની (i) પાયાની ત્રિજ્યા અને (ii) કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

4. શંકુ આકારનો તંબુ 10 મી ઊંચો છે અને તેના પાયાની ત્રિજ્યા 24 મી છે. તો,

   (i) તંબુની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો.

   (ii) 1 મી^{2} ના ₹ 70 લેખે તંબુ બનાવવા માટે વપરાતા કાપડનો કુલ ખર્ચ શોધો.

5. જેની ઊંચાઈ 8મી અને પાયાની ત્રિજ્યા 6 મી હોય તેવા શંકુ આકારના તંબુ બનાવવા માટે 3 મી પહોળી કેટલી તાડપત્રીની જરૂર પડે? માની લો કે સિલાઈના માપ અને કાપકૂપમાં થતા બગાડમાં લગભગ 20 સેમી જેટલી વધારાની તાડપત્રી વપરાય છે. ($\pi = 3.14$ લો.)

6. શંકુ આકારના મકબરાની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને પાયાનો વ્યાસ અનુક્રમે 25 મી અને 14 મી છે. તેની વક્રસપાટી પર 100 મી^{2} ના ₹ 210 લેખે ચૂનો કરવાનો ખર્ચ શોધો.

7. એક જોકર (વિદૂષક)ની ટોપી લંબવૃત્તીય શંકુ આકારની છે, તેના પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને ઊંચાઈ 24 સેમી છે. આવી 10 ટોપી બનાવવા વપરાતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

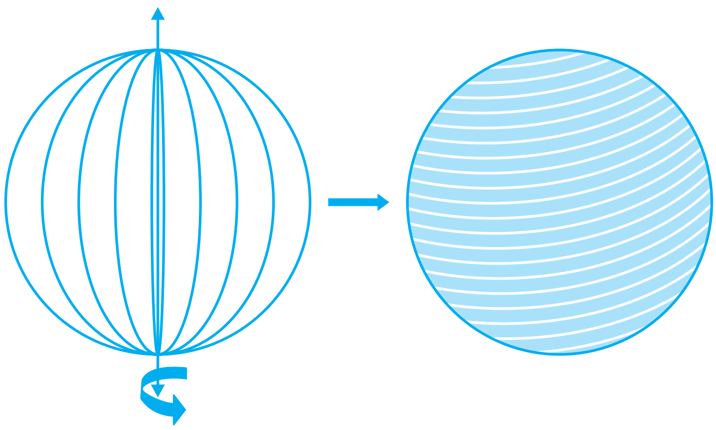
8. એક બસ સ્ટૉપને રોડના બાકીના ભાગથી જુદો પાડવા ફરી ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવા કાર્ડબૉર્ડથી 50 પોલા શંકુ બનાવ્યા છે. પ્રત્યેક શંકુનો પાયાનો વ્યાસ 40 સેમી અને ઊંચાઈ 1 મી છે. જો પ્રત્યેક શંકુના બહારના ભાગને રંગવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 12 લેખે આવે તો બધા જ શંકુ રંગવાનો કુલ ખર્ચ શોધો.

   ($\pi = 3.14$ અને $\sqrt{1.04} = 1.02$ લો.)

13.5 ગોલકનું પૃષ્ઠફળ

ગોલક (*sphere*) શું છે? શું તે વર્તુળ જેવું જ છે? શું તમે વર્તુળને કાગળ પર દોરી શકો છો? હા, તમે કરી શકો. જેના પરનું પ્રત્યેક બિંદુ નિશ્ચિત બિંદુથી (કે જેને વર્તુળનું કેન્દ્ર કહેવાય.) સમાન અંતરે (કે જેને ત્રિજ્યા કહેવાય.) આવેલ એવી સમતલ પરની બંધ આકૃતિ વર્તુળ કહેવાય છે. હવે વર્તુળાકાર તક્તીના વ્યાસ આસપાસ દોરી વીંટાળી અને જે રીતે આગળના વિભાગમાં ત્રિકોણને ઘુમાવેલ, તેમ ઘુમાવવામાં આવે તો એક નવો નક્કર પદાર્થ બને તે તમે જોઈ શકશો. (આકૃતિ 13.18) તે શું દર્શાવે છે? એક દડો? હા, તેને ગોલક કહેવાય.

જ્યારે વર્તુળને ગોળ ઘુમાવીએ ત્યારે બનતા વર્તુળના કેન્દ્રનું શું થાય તેની તમે કલ્પના કરી શકો? અલબત, તે ગોલકનું કેન્દ્ર બને. આમ, અવકાશમાં નિશ્ચિત બિંદુથી નિશ્ચિત અંતરે આવેલ બિંદુઓથી બનતી ત્રિપરિમાણીય ઘન આકૃતિને *ગોલક* કહે છે. નિશ્ચિત બિંદુને ગોલકનું કેન્દ્ર અને નિશ્ચિત અંતરને તેની *ત્રિજ્યા* કહે છે.



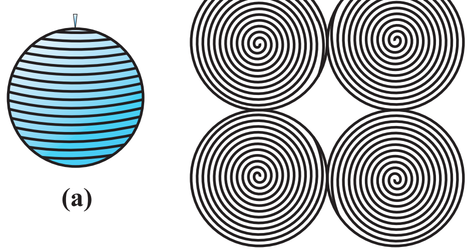
આકૃતિ 13.18

નોંધ : ગોલક એ દડાની વક્રસપાટી જેવું છે. જેની વક્રસપાટી ગોલક હોય એવા ઘન પદાર્થ માટે ઘન ગોલક શબ્દનો ઉપયોગ થાય.

પ્રવૃત્તિ : શું તમે ભમરડાથી રમ્યા છો કે કોઈને તેનાથી રમતા જોયા છે? તમે જાણતા જ હશો કે તેની આસપાસ દોરી કેમ વીંટાળાય છે. હવે, એક રબરનો દડો લઈ તેમાં ખીલી ખોસીએ. ખીલીનો આધાર લઈ દડાની આસપાસ દોરી વીંટાળીએ. જ્યારે 'સંપૂર્ણ' દડો ભરાઈ જાય ત્યારે દોરીને તેની જગાએ રાખવા માટે ટાંકણીનો ઉપયોગ કરીએ. જ્યાં સુધી આખો જ દડો દોરીથી ઢંકાઈ ત્યાં સુધી દોરી બાંધવાનું ચાલુ રાખો. [જુઓ આકૃતિ 13.19(a).] દોરીના શરૂઆત અને અંત્યબિંદુ પર નિશાની કરી, દડાની વક્રસપાટી પરની દોરીને હળવેથી કાઢી નાખો.

હવે, તમારા શિક્ષકને આસાનીથી તે ત્રિજ્યા શોધી શકાય તે માટે દડાના વ્યાસના માપન માટે મદદ કરવા કહો. એક કાગળ પર દડાની ત્રિજ્યા જેટલી ત્રિજ્યાવાળાં ચાર વર્તુળ દોરો. હવે દડાને વીંટાળેલ દોરીથી એક પછી એક વર્તુળ ભરવાનું શરૂ કરો.

[જુઓ આકૃતિ 13.19(b).]



(a) (b)

આકૃતિ 13.19

આ બધું કરતાં તમને શું મળ્યું ?

ગોલકની વક્રસપાટી ઢાંકવા વપરાયેલ દોરી ગોલક જેટલી જ ત્રિજ્યાવાળાં ચાર વર્તુળોનો પ્રદેશ ઢાંકવા માટે વપરાય છે. આથી આનો અર્થ શું કરીશું? આ દર્શાવે છે કે r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકનું પૃષ્ઠફળ

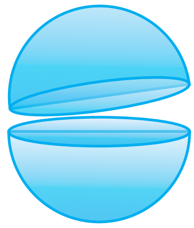
= ચાર વખત r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= 4 \times (\pi r^2)$

આમ, **ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $4\pi r^2$**

r ગોલકની ત્રિજ્યા છે.

તમે ગોલકનાં કેટલાં પૃષ્ઠ જોઈ શકો છો ? માત્ર એક જ, તે વક્રાકાર છે.

હવે, એક નક્કર ગોલક લઈ તેને બરાબર વચ્ચેથી કાપીએ. ગોલકનું શું થાય છે?



આકૃતિ 13.20

હા, તે બે સમાન ભાગમાં વહેંચાય છે. (જુઓ આકૃતિ 13.20.) પ્રત્યેક અડધા ભાગને શું કહેવાય? તેને ***અર્ધગોલક*** (*hemisphere*) કહેવાય. (કેમ કે *hemi* શબ્દનો અર્થ અર્ધ થાય છે.)

અને તેની વક્રસપાટીનું શું ? તેને કેટલાં પૃષ્ઠ હશે? બે! એક વક્ર અને બીજો સપાટ (પાયો).

અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ ગોલકના ક્ષેત્રફળ કરતાં અડધું થશે તે $4\pi r^2$ના $\frac{1}{2}$ ભાગનું હશે.

આથી, **અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi r^2$**

અહીં, અર્ધગોલક જેનો એક ભાગ હોય તેવા ગોલકની ત્રિજ્યા r છે.

આથી, અર્ધગોલકનાં બંને પૃષ્ઠો લેતાં, તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ $2\pi r^2 + \pi r^2$ થાય.

આમ, **અર્ધગોલકની કુલ સપાટીનું પૃષ્ઠફળ = $3\pi r^2$**

ઉદાહરણ 7 : 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ સેમી^{2} = 616 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 8 : 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં અર્ધગોલકની (i) વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ (ii) કુલ સપાટીનું પૃષ્ઠફળ શોધો.

ઉકેલ : 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2} = 2772 સેમી^{2}

(ii) અર્ધગોલકનું કુલ પૃષ્ઠફળ $3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2} = 4158 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 9 : સરકસમાં કામ કરતો મોટરસાઇકલ-સવાર 7 મી વ્યાસવાળા પોલા ગોલકમાં પ્રદર્શન કરે છે. મોટરસાઇકલ-સવારને ચલાવવા મળતી જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ગોલકનો વ્યાસ = 7 મી. આથી, તેની ત્રિજ્યા 3.5 મી થાય. આથી, મોટરસાઇકલ-સવારને ચલાવવા મળતી જગ્યા

= ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$ મી^{2}

= 154 મી^{2}

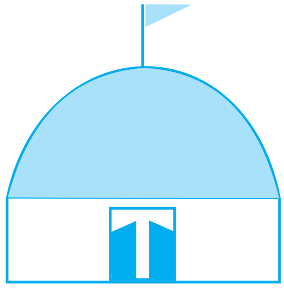
ઉદાહરણ 10 : એક મકાનના અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટને રંગ કરવાનો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.21.) જો અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટનો પરિઘ 17.6 મી હોય, તો તેને 100 સેમીના ₹ 5 લેખે રંગવાનો ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, આપણે માત્ર ઘુમ્મટની વક્રસપાટી પર રંગ કરવો છે. તેથી આપણે અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું.

હવે, ઘુમ્મટનો પરિઘ = 17.6 મી

તેથી, $17.6 = 2\pi r$

તેથી, ઘુમ્મટની ત્રિજ્યા $= 17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ મી = 2.8 મી



આકૃતિ 13.21

ઘુમ્મટની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$ મી^{2}

$= 49.28$ મી^{2}

હવે, 100 સેમી^{2} રંગવાનો ખર્ચ ₹ 5.

તો, 1 મી^{2} રંગવાનો ખર્ચ ₹ 500.

આખા અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટને રંગવાનો ખર્ચ = ₹ 500×49.28

= ₹ 24,640

સ્વાધ્યાય 13.4

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. આપેલ ત્રિજ્યા પરથી ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

   (i) 10.5 સેમી (ii) 5.6 સેમી (iii) 14 સેમી

2. આપેલ વ્યાસ પરથી ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

   (i) 14 સેમી (ii) 21 સેમી (iii) 3.5 મી

3. 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોળાનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

4. એક ગોળાકાર ફુગ્ગામાં હવા ભરવાથી તેની ત્રિજ્યા 7 સેમીથી વધીને 14 સેમી થાય છે. આ બંને પરિસ્થિતિમાં ગોળાકાર ફુગ્ગાની વક્રસપાટીનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

5. તાંબાના અર્ધગોળાકાર વાટકાની અંદરનો વ્યાસ 10.5 સેમી છે. તેની અંદર સપાટીને 100 સેમીના ₹ 16 લેખે કલાઈ કરવાનો ખર્ચ કેટલો થાય?

6. જો ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી^{2} હોય, તો તેની ત્રિજ્યા શોધો.

7. જો ચંદ્રનો વ્યાસ પૃથ્વીના વ્યાસના આશરે ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો તેમની વક્રસપાટીઓનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

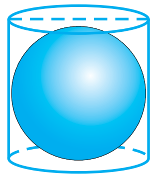
8. સ્ટીલના અર્ધગોળાકાર વાટકાની જાડાઈ 0.25 સેમી છે. જો વાટકાની અંદરની સપાટીની ત્રિજ્યા 5 સેમી હોય, તો વાટકાની બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં બંધબેસે તે રીતે r ત્રિજ્યાવાળો એક ગોળો મૂકેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 13.22.) તો,

(i) ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(ii) નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(iii) (i) અને (ii) માં મળતાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.



આકૃતિ 13.22

13.6 લંબઘનનું ઘનફળ

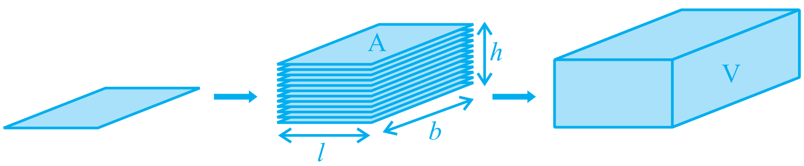
આપણે અગાઉનાં ધોરણોમાં અમુક ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ શોધતાં શીખી ગયાં છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે, ઘન પદાર્થ અવકાશમાં જગ્યા રોકે છે. આ રોકેલી જગ્યાના માપને તે ઘન પદાર્થનું ***ઘનફળ*** કહેવાય.

નોંધ : જો ઘન પદાર્થ નક્કર હોય તો તે ઘન પદાર્થ દ્વારા અવકાશમાં રોકાયેલ જગ્યા માપી શકાય છે અને તે રોકેલી જગ્યાના માપને તેનું ઘનફળ કહેવાય.

હવે, જો ઘન પદાર્થ પોલો હોય તો તે અંદરથી ખાલી હોય છે અને તે ખાલી જગ્યા વાયુ કે પ્રવાહીથી ભરવામાં આવે, તો તે વાસણ જેવો આકાર ધારણ કરે છે. વાસણમાં ભરવામાં આવેલ પદાર્થના ઘનફળને *વાસણની ક્ષમતા (capacity of the container)* કહે છે. *ટૂંકમાં પદાર્થે રોકેલી જગ્યાના માપને તે પદાર્થનું ઘનફળ કહેવાય અને પદાર્થની ક્ષમતા તે પદાર્થની અંદરની જગ્યામાં સમાવી શકાતા પ્રવાહીનું ઘનફળ.*

હવે, જો આપણે લંબઘનના ઘનફળની વાત કરીએ તો, આપણે લંબઘન દ્વારા અવકાશમાં રોકાયેલી જગ્યાના માપની વાત કરીએ છીએ.

વધુમાં આપણે ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ કોઈક વિસ્તારનું માપ દર્શાવવા માટે જોઈએ છે. પરંતુ વાસ્તવમાં આપણે વર્તુળાકાર ક્ષેત્રફળ, લંબઘનાકાર વિસ્તારનું ઘનફળ અથવા ગોળાકાર વિસ્તારનું ઘનફળ વગેરે શોધીએ છીએ, પરંતુ સરળતા ખાતર આપણે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ, લંબઘનનું ઘનફળ અથવા ગોળાનું ઘનફળ તેવો ઉલ્લેખ કરીએ છીએ. જોકે ઉલ્લેખ કરેલ આકાર માત્ર તેની સીમા દર્શાવે છે.



આકૃતિ 13.23

આકૃતિ 13.23 જુઓ. ધારો કે આકૃતિમાં દર્શાવેલ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ A છે. આવી લંબચોરસ તક્તીઓને વ્યવસ્થિત થપ્પીમાં ગોઠવો. તેની ઊંચાઈ h અને લંબઘનના ઘનફળને V લઈએ. શું તમે કહી શકશો કે V, A અને H વચ્ચે કેવો સંબંધ છે?

પ્રત્યેક સમતલીય લંબચોરસ સપાટી દ્વારા રોકાયેલ જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = લંબઘન દ્વારા અવકાશમાં રોકાયેલ જગ્યાનું માપ.

તેથી, આપણે $A \times h = V$ મળે.

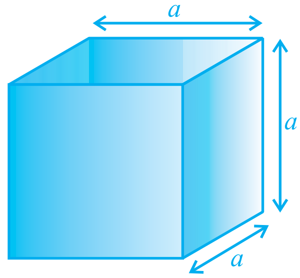
લંબઘનનું ઘનફળ = પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ

અથવા $l \times b \times h$, જ્યાં l, b અને h અનુક્રમે લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ, ઊંચાઈ છે.

નોંધ : જ્યારે આપણે અવકાશમાં આવેલ પ્રદેશનું માપ કાઢીએ, એટલે કે ઘન પદાર્થે રોકેલી જગા ત્યારે તે વિસ્તારમાં એક એકમ લંબાઈ ધરાવતા સમઘનની મહત્તમ કેટલી સંખ્યા સમાવિષ્ટ કરી શકાય તે ગણીએ છીએ. તેથી ઘનફળના માપન માટેનો એકમ ઘન એકમ છે.

ફરીથી, જો સમઘનની બાજુની લંબાઈ a હોય તો (જુઓ આકૃતિ 13.24.)

સમઘનનું ઘનફળ = ધારની લંબાઈ × ધારની લંબાઈ × ધારની લંબાઈ = $a \times a \times a = a^3$



આકૃતિ 13.24

જો સમઘનની બાજુની લંબાઈ 12 સેમી હોય,

તો સમઘનનું ઘનફળ = 12 × 12 × 12 સેમી = 1728 (સેમી)^3

તમે યાદ કરો કે તમે આ સૂત્ર અગાઉના ધોરણમાં શીખી ગયાં છો. ચલો હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા આ સૂત્રનો ઉપયોગ સમજીએ.

ઉદાહરણ 11 : એક ખુલ્લા મેદાનની એક બાજુથી બીજી બાજુ સુધી 10 મી લંબાઈની એક દીવાલ બનાવવી છે. આ દીવાલની ઊંચાઈ 4 મી અને દીવાલની જાડાઈ 24 સેમી છે. હવે, જો આ દીવાલ બનાવવા 24 સેમી × 12 સેમી × 8 સેમી માપની ઈંટો વાપરવાની હોય, તો આવી કેટલી ઈંટોની જરૂર પડશે?

ઉકેલ : અહીં, આપણે દીવાલ દ્વારા અવકાશમાં રોકેલી જગ્યાના માપને ઈંટો દ્વારા ભરવું છે. તેથી આપણે દીવાલનું ઘનફળ શોધવું પડશે. દીવાલનું ઘનફળ એ બીજું કશું નહિ પણ લંબઘનનું ઘનફળ થશે.

લંબાઈ = 10 મી = 1000 સેમી

જાડાઈ = 24 સેમી

ઊંચાઈ = 4 મી = 400 સેમી

તેથી, દીવાલનું ઘનફળ = લંબાઈ × જાડાઈ × ઊંચાઈ

= 1000 × 24 × 400 સેમી^{3}

હવે, પ્રત્યેક ઈંટ એ લંબઘન છે. તેની લંબાઈ = 24 સેમી, પહોળાઈ = 12 સેમી અને ઊંચાઈ = 8 સેમી

તેથી, એક ઈંટનું ઘનફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ = 24 × 12 × 8 સેમી^{3}

તેથી, જરૂરી ઈંટોની સંખ્યા = $\dfrac{\text{દીવાલનું ઘનફળ}}{\text{એક ઈંટનું ઘનફળ}}$

$$= \frac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8}$$

= 4166.6

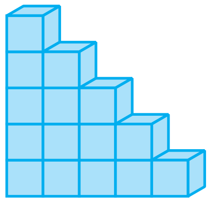
આમ, દીવાલ બનાવવા માટે 4167 ઈંટોની જરૂર પડશે.

ઉદાહરણ 12 : એક બાળક ઘન આકારના બ્લૉકથી રમે છે. તે આકૃતિ 13.25 માં દર્શાવ્યા મુજબનું માળખું ઘન આકારના બ્લૉકથી બનાવે છે. જો દરેક બ્લૉકની બાજુની લંબાઈ 3 સેમી હોય, તો બાળકે બનાવેલ માળખાનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : દરેક ઘનનું ઘનફળ = લંબાઈ × લંબાઈ × લંબાઈ = 3 × 3 × 3 સેમી^{3} = 27 સેમી^{3}

અહીં, માળખામાં ઘનની સંખ્યા = 15

તેથી માળખાનું ઘનફળ = 27 × 15 સેમી^{3} = 405 સેમી^{3}



આકૃતિ 13.25

સ્વાધ્યાય 13.5

1. દીવાસળીની એક પેટીનું માપ 4 સેમી × 2.5 સેમી × 1.5 સેમી છે, તો આવી 12 પેટી સમાય તેવી પેટીનું ઘનફળ કેટલું થાય ?
2. એક લંબઘન પાણીની ટાંકી 6 મી લાંબી, 5 મી પહોળી અને 4.5 મી ઊંડી છે. આ ટાંકીમાં કેટલા લિટર પાણી સમાઈ શકે ? (1 મી^{3} = 1000 લીટર)
3. એક લંબઘન વાસણ 10 મી લાંબું અને 8 મી પહોળું છે. તેમાં 380 મી^{3} પ્રવાહી સમાઈ શકે, તો તેની ઊંચાઈ કેટલી?
4. 8 મી લંબાઈ, 6 મી પહોળાઈ અને 3 મી ઊંડાઇનો એક લંબઘન ખાડો ખોદવો છે. 1 મી^{3} ના ₹ 30 લેખે ખાડો ખોદવાનો ખર્ચ કેટલો થાય?
5. એક લંબઘન પાણીની ટાંકીની ક્ષમતા 50000 લિટર છે. જો તેની લંબાઈ અને ઊંડાઈ અનુક્રમે 2.5 મી અને 10મી હોય, તો તેની પહોળાઈ શોધો.
6. એક ગામમાં 4000 લોકો રહે છે. દરેક વ્યક્તિની એક દિવસની જરૂરિયાત 150 લિટર પાણીની છે. આ ગામમાં 20 મી × 15 મી × 6 મી માપની ટાંકી છે. આ ટાંકીનું પાણી ગામના લોકોને કેટલા દિવસ ચાલે ?
7. એક ગોદામનું માપ 40 મી × 25 મી × 15 મી છે. આ ગોદામમાં 1.5 મી × 1.25 મી × 0.5 મી માપનાં કેટલાં લાકડાંનાં ખોખાં સમાય?
8. 12 સેમી લંબાઈવાળા નક્કર ઘન પદાર્થને સરખા ઘનફળવાળા 8 ઘનમાં કાપવામાં આવે છે, તો નવા બનેલ ઘનની લંબાઈ કેટલી હશે? તેમના પૃષ્ઠફળનો ગુણોત્તર શોધો.
9. 3 મી ઊંડાઈવાળી અને 40 મી પહોળાઈવાળી એક નદી 2 કિમી/કલાકની ઝડપથી વહે છે તો તે 1 મિનિટમાં કેટલું પાણી સમુદ્રમાં ઠાલવશે ?

13.7 નળાકારનું ઘનફળ

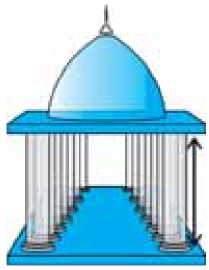
જેવી રીતે સમાન લંબચોરસને ગોઠવીને લંબઘન બનાવાય, તેવી રીતે સમાન માપનાં વર્તુળોને ગોઠવીને થપ્પી કરી લંબવૃત્તીય નળાકાર બનાવી શકાય. હવે જે દલીલની મદદથી આપણે લંબઘનનું ઘનફળ મેળવ્યું તે જ દલીલ મુજબ

નળાકારનું ઘનફળ = પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = વર્તુળાકાર પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = $\pi r^2 h$

આમ, **નળાકારનું ઘનફળ = $\pi r^2 h$**

આ સૂત્રમાં પાયાની ત્રિજ્યા r છે તથા નળાકારની ઊંચાઈ h છે.

ઉદાહરણ 13 : એક મંદિરના થાંભલાઓ નળાકાર છે. (જુઓ આકૃતિ 13.26) જો પ્રત્યેક થાંભલાનો પાયો 20 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ અને ઊંચાઈ 10 મીટર હોય, તો આવા 14 થાંભલાઓમાં કોંક્રીટનું કેટલું મિશ્રણ જોઈએ?



આકૃતિ 13.26

ઉકેલ : થાંભલાઓ બનાવવા કૉંક્રીટના મિશ્રણનો ઉપયોગ કરવાનો હોવાથી, થાંભલાઓ જેટલી જગ્યા રોકે, તેટલું સિમેન્ટ કૉંક્રીટનું મિશ્રણ જોઈએ. માટે અહીં, આપણે નળાકારનું ઘનફળ શોધીશું.

નળાકાર થાંભલાની ત્રિજ્યા = 20 સેમી

નળાકાર થાંભલાની ઊંચાઈ = 10 મી = 1000 સેમી

તેથી, દરેક નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000$ સેમી^{3}

$= \frac{8800000}{7}$ સેમી^{3}

$= \frac{8.8}{7}$ મી^{3} (કારણ કે 1000000 સેમી^{3} = 1 મી^{3})

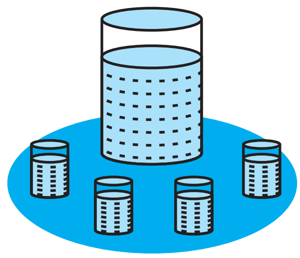
14 થાંભલાનું ઘનફળ = દરેક નળાકારનું ઘનફળ × 14

$= \frac{8.8}{7} \times 14$ મી^{3}

= 17.6 મી^{3}

આમ, 14 થાંભલાઓ માટે 17.6 મી^{3} સિમેન્ટ-કૉંક્રીટનું મિશ્રણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 14 : રમજાનના મેળામાં એક દુકાનદારે ખાણીપીણીની દુકાનમાં 15 સેમી ત્રિજ્યાવાળા એક નળાકાર વાસણમાં 32 સેમી ઊંચાઈ સુધી નારંગીનો રસ ભરેલો છે. આ રસ તે 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળા નળાકાર પ્યાલાઓમાં 8 સેમી ઊંચાઈ સુધી ભરે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.27.) તે ₹ 3 પ્રતિ પ્યાલાના ભાવે તેનું વેચાણ કરે છે. જો દુકાનદાર બધો રસ વેચી દે તો તેને કેટલા રૂપિયા મળે?



આકૃતિ 13.27

ઉકેલ : રસ ભરેલા વાસણનું ઘનફળ = નળાકાર વાસણનું ઘનફળ

$= \pi R^2 H$ (R અને H એ અનુક્રમે નળાકાર વાસણની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈ છે.)

$= \pi \times 15 \times 15 \times 32$ સેમી^{3}

એ જ રીતે, દરેક પ્યાલામાં રહેલા રસનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$ (r અને h એ અનુક્રમે દરેક પ્યાલાની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈ છે.)

$= \pi \times 3 \times 3 \times 8$ સેમી^{3}

આમ, વેચાતા રસના પ્યાલાની કુલ સંખ્યા $= \dfrac{\text{વાસણનું ઘનફળ}}{\text{દરેક પ્યાલાનું ઘનફળ}}$

$= \dfrac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8}$

$= 100$

તેથી, દુકાનદારને મળતી કુલ રકમ = ₹ 3 × 100

= ₹ 300

સ્વાધ્યાય 13.6

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. નળાકાર વાસણના પાયાનો પરિઘ 132 સેમી અને ઊંચાઈ 25 સેમી છે. તેમાં કેટલાં લિટર પાણી સમાય? (1000 સેમી^{3} = 1 લિટર)

2. એક નળાકાર લાકડાના પાઇપનો અંદરનો વ્યાસ 24 સેમી અને તેનો બહારનો વ્યાસ 28 સેમી છે. પાઇપની લંબાઇ 35 સેમી છે. જો 1 સેમી^{3} લાકડાનું દળ 0.6 ગ્રામ હોય તે પાઇપનું દળ શોધો.

3. એક ઠંડું પીણું બે પ્રકારનાં પાત્રોમાં મળે છે : (i) જેની લંબાઈ 5 સેમી, પહોળાઈ 4 સેમી અને ઊંચાઈ 15 સેમી છે એવું એક લંબચોરસ પાયાવાળું પતરાનું પાત્ર. (ii) જેના વર્તુળાકાર પાયાનો વ્યાસ 7 સેમી અને ઊંચાઈ 10 સેમી એવું પ્લાસ્ટિકનું નળાકાર પાત્ર. કયા પાત્રની ક્ષમતા વધુ છે ? કેટલી ?

4. એક નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 94.2 સેમી^{2} અને તેની ઊંચાઈ 5 સેમી હોય તો (i) તેની પાયાની ત્રિજ્યા અને (ii) તેનું ઘનફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

5. 10 મીટર ઊંડા એક નળાકાર વાસણની અંદરની સપાટીને રંગવાનો ખર્ચ ₹ 2200 થાય છે. જો રંગવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 20 હોય, તો

   (i) વાસણની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

   (ii) પાયાની ત્રિજ્યા

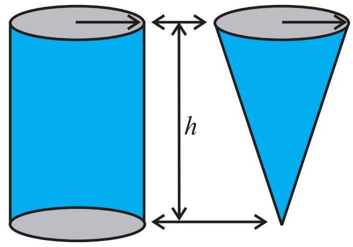
   (iii) વાસણની ક્ષમતા શોધો.

6. 1 મી ઊંચાઈવાળા બંધ નળાકાર વાસણની ક્ષમતા 15.4 લિટર છે, તો તે બનાવવા કેટલા ચોરસ મીટર ધાતુના પતરાની જરૂર પડશે ?

7. એક પેન્સિલ લાકડાના પાયા નળાકાર અને તેની અંદરના ભાગમાં ચુસ્ત રીતે બેસે તેવા નક્કર ગ્રેફાઇટના નળાકારની બનેલી છે. પેન્સિલનો વ્યાસ 7 મીમી અને ગ્રેફાઇટનો વ્યાસ 1 મિમી છે. જો પેન્સિલની લંબાઈ 14 સેમી હોય, તો લાકડાનું અને ગ્રેફાઇટનું ઘનફળ શોધો.

8. એક હોસ્પીટલમાં દર્દીઓને 7 સેમી વ્યાસવાળા નળાકાર પાત્રમાં સુપ આપવામાં આવે છે. જો સુપ 4 સેમી ઊંચાઈ સુધી ભરવામાં આવતું હોય, તો દવાખાનામાં રોજ 250 દર્દીઓને આપવા માટે કેટલું સુપ બનાવવું પડે ?

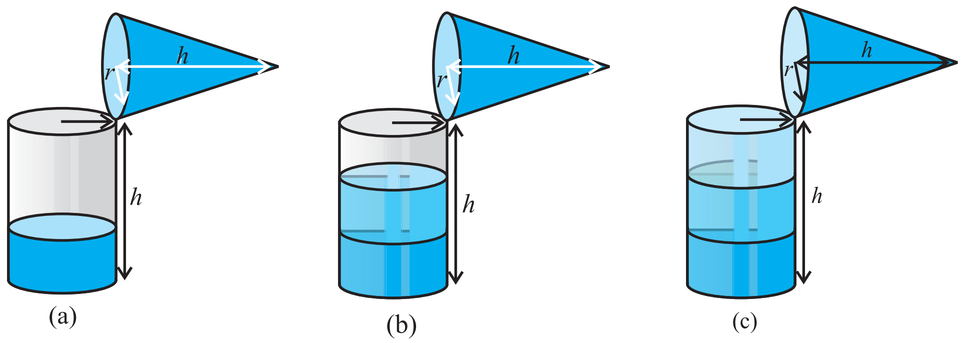
13.8 લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ



આકૃતિ 13.28

તમે આકૃતિ 13.28 માં જોઈ શકો છો કે લંબવૃત્તીય નળાકાર અને લંબવૃત્તીય શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા સમાન છે અને તેમની ઊંચાઈ પણ સમાન છે.

પ્રવૃત્તિ : સમાન પાયાની ત્રિજ્યા અને સમાન ઊંચાઈ ધરાવતા પોલા નળાકાર અને પોલા શંકુ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. (જુઓ આકૃતિ 13.28.) આપણે આના ઉપયોગથી એક પ્રયોગ કરીશું. તેના દ્વારા આપણે લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ શું થાય તે પ્રાયોગિક રીતે જોઈ શકીશું.



આકૃતિ 13.29

ચાલો આપણે શરૂઆત કરીએ.

આપણે પહેલા શંકુને રેતીથી છલોછલ ભરી દઈશું. ત્યાર બાદ તેને નળાકાર પાત્રમાં પૂરેપૂરો ખાલી કરીશું. આપણે જોઈશું કે તે રેતીથી નળાકાર પાત્ર થોડાક ભાગ સુધી જ ભરાશે. [જુઓ આકૃતિ 13.29(a).]

હવે, ફરી શંકુને રેતીથી છલોછલ ભરી અને નળાકારમાં ખાલી કરો. આપણે જોઈ શકીશું કે નળાકાર હજી પણ પૂરો ભરાયો નથી. [જુઓ આકૃતિ 13.29(b).]

હવે, જ્યારે શંકુને ત્રીજી વખત રેતીથી ભરી નળાકારમાં ખાલી કરતાં જોઈશું કે નળાકાર રેતીથી છલોછલ ભરાઈ જશે. [જુઓ આકૃતિ 13.29(c).]

આ પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, પાયાની ત્રિજ્યા સમાન હોય અને ઊંચાઈ સમાન હોય તેવા નળાકાર અને શંકુ માટે, ત્રણ વખત શંકુનું ઘનફળ એ નળાકારના ઘનફળ જેટલું થાય. તેનો અર્થ એવો થાય કે, શંકુનું ઘનફળ એ નળાકારના ઘનફળના ત્રીજા ભાગ જેટલું થાય.

આમ, પાયાની ત્રિજ્યા r અને શંકુની ઊંચાઈ h વાળા

$$\text{શંકુનું ઘનફળ} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

ઉદાહરણ 15 : એક શંકુની ઊંચાઈ અને ત્રાંસી ઊંચાઈ અનુક્રમે 21 સેમી અને 28 સેમી હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : $l^2 = r^2 + h^2$ પરથી,

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ સેમી} = 7\sqrt{7} \text{ સેમી}$$

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21$ સેમી^{3} = 7546 સેમી^{3}

ઉદાહરણ 16 : મોનીકા પાસે 551 મી^{2} ક્ષેત્રફળવાળો કૅનવાસનો ટુકડો છે. તે ટુકડાનો ઉપયોગ 7 મી પાયાની ત્રિજ્યાવાળો શંકુ આકારનો તંબુ બનાવવા માટે કરે છે. ટાંકા લેવામાં અને કાપવામાં 1 મી^{2} જેટલું કૅનવાસ બગડે છે. તે તંબુનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, કૅનવાસ વપરાય તેનું ક્ષેત્રફળ = 551 મી^{2} અને બગાડમાં જતા કૅનવાસનું, ક્ષેત્રફળ 1 મી^{2} છે. તેથી તંબુ બનાવવા માટે મળતા કૅનવાસનું ક્ષેત્રફળ (551 – 1) મી^{2} = 550 મી^{2}.

તેથી, તંબુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = 550 મી^{2} અને જરૂરી તંબુના પાયાની ત્રિજ્યા = 7 મી

અહી, નોંધીશું કે તંબુને ફક્ત વક્રસપાટી છે, (તંબુના પાયાના ભાગમાં કૅનવાસ નથી !)

તંબુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = 550 મી^{2}

$$\therefore \quad \pi r l = 550$$

$$\therefore \quad \frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

$$\therefore \quad l = \frac{550}{22} \text{ મી} = 25 \text{ મી}$$

હવે, $l^2 = r^2 + h^2$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} \text{ મી} = \sqrt{625 - 49} \text{ મી} = \sqrt{576} \text{ મી} = 24 \text{ મી}$$

આથી, શંકુ આકારના તંબુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ મી^{3} = 1232 મી^{3}

સ્વાધ્યાય 13.7

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. નીચેના લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ શોધો :

   (i) ત્રિજ્યા 6 સેમી, ઊંચાઈ 7 સેમી (ii) ત્રિજ્યા 3.5 સેમી, ઊંચાઈ 12 સેમી

2. નીચેના શંકુ આકારના વાસણની ક્ષમતા લિટરમાં શોધો :

   (i) ત્રિજ્યા 7 સેમી, ત્રાંસી ઊંચાઈ 25 સેમી (ii) ઊંચાઈ 12 સેમી, ત્રાંસી ઊંચાઈ 13 સેમી

3. એક શંકુની ઊંચાઈ 15 સેમી છે. જો તેનું ઘનફળ 1570 સેમી^{3} હોય, તો તેના પાયાની ત્રિજ્યા શોધો. (π = 3.14 લો.)

4. એક લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 48 π સેમી^{3} છે. તેની ઊંચાઈ 9 સેમી હોય, તો તેના પાયાનો વ્યાસ શોધો.

5. એક શંકુ આકારના ખાડાના ઉપરના ભાગનો વ્યાસ 3.5 મી અને ઊંડાઈ 12 મી છે. તેની ક્ષમતા (કિલોલિટરમાં) કેટલી થાય ?

6. લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 9856 સેમી^{3} છે. તેના પાયાનો વ્યાસ 28 સેમી છે. તો,

(i) શંકુની ઊંચાઈ (ii) શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને (iii) શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

7. કાટકોણ ત્રિકોણ ABC ની બાજુનાં માપ 5 સેમી, 12 સેમી અને 13 સેમી છે. જો તેને 12 સેમીની બાજુ તરફ પરિભ્રમણ કરવામાં આવે, તો તેથી બનતા શંકુનું ઘનફળ શોધો.

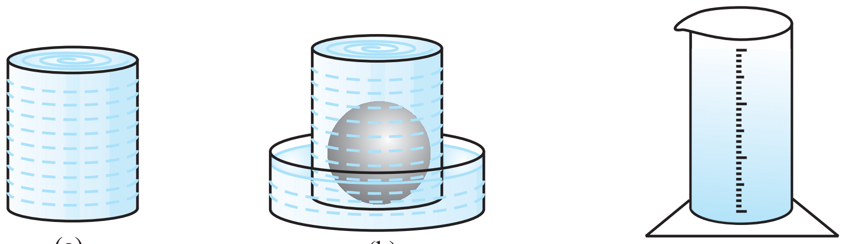
8. ઉપરનાં પ્રશ્ન 7 માં આપેલ ત્રિકોણ ABC નું 5 સેમી લંબાઈવાળી બાજુની આસપાસ પરિભ્રમણ કરવામાં આવે છે, તો આ રીતે બનતા ઘનનું ઘનફળ શોધો તથા પ્રશ્ન 7 અને 8 માં બનતા શંકુના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

9. એક શંકુ આકારના ઘઉંના ઢગલાના પાયાનો વ્યાસ 10.5 મી અને ઊંચાઈ 3 મી છે. તેનું ઘનફળ શોધો. આ ઢગલાને વરસાદથી બચાવવા કૅનવાસથી ઢાંકવામાં આવે છે, તો આ માટે જરૂરી કૅનવાસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

13.9 ગોળાનું ઘનફળ

હવે, આપણે ગોળાનું ઘનફળ કેવી રીતે માપવું તે જોઈએ. પહેલા બે કે ત્રણ જુદી જુદી ત્રિજ્યાવાળા ગોળા લો અને એક એવું મોટું પાત્ર લો કે જેમાં આ દરેક ગોળાઓ એકીસાથે સમાઈ જાય. હવે એક એવું મોટું જળપાત્ર લો કે જેમાં તમે ઉપરોક્ત પાત્રને મૂકી શકો. પછી, પાત્રને પૂરેપુરું પાણીથી ભરી દો. [આકૃતિ. 13.30(a).]

હવે કાળજીપૂર્વક એક ગોળાને પાણી ભરેલ પાત્રમાં મૂકો. આથી થોડું પાણી જળપાત્રમાં ઊભરાઈને આવશે. [આકૃતિ 13.30(b).] આ જળપાત્રમાં આવેલા પાણીને એક અંકિત નળાકારમાં કાળજીપૂર્વક લો અને તે પાણીનું કદ માપો, [આકૃતિ 13.30(c)]. ધારો કે પાણી ભરેલા પાત્રમાં મૂકેલ ગોળાની ત્રિજ્યા r છે. (તમે ગોળની ત્રિજ્યા તેનો વ્યાસ માપીને શોધી શકો.) ત્યાર બાદ $\frac{4}{3}\pi r^3$નું મૂલ્ય મેળવો. શું આ મૂલ્ય અંકિત નળાકારમાં રહેલા પાણીનાં કદ જેટલું છે?



આકૃતિ 13.30

ઉપર્યુક્ત પ્રક્રિયા બીજા કદના ગોળા માટે ફરીથી કરો. ગોળાની ત્રિજ્યા R માપો અને $\frac{4}{3}\pi R^3$ ની કિંમત શોધો. ફરી એક વખત આ કિંમત ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત કરેલા લગભગ પાણીના કદ (ઉભરાયેલા પાણીના કદ) જેટલી લગભગ થશે. આ શું દર્શાવે છે? આપણને ખબર છે કે ગોળાનું કદ, ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત પાણીના કદ જેટલું છે. આ પ્રયોગનું પુનરાવર્તન જુદી જુદી ત્રિજ્યાના ગોળા વાપરી કરતાં આ જ પરિણામ મળે છે. એટલે કે ગોળાનું કદ $\frac{4}{3}\pi$ × ત્રિજ્યાના ઘન જેટલું થાય છે. આ પરથી,

ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

r ગોળાની ત્રિજ્યા છે. ભવિષ્યમાં તમે ઉપરના વર્ગોમાં આ સૂત્ર સાબિત પણ કરી શકશો. પણ આ તબક્કે આપણે તેને સ્વીકારીને ચાલીશું.

હવે અર્ધગોળો ગોળાનો અડધો ભાગ છે. તો વિચારો કે અર્ધગોળાનું ઘનફળ કેટલું થાય?

હા, તે $\frac{4}{3}\pi r^3$ નો $\frac{1}{2}$ એટલે કે $\frac{2}{3}\pi r^3$ છે.

તેથી, અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \mathbf{\frac{2}{3}\pi r^3}$

અહીં, r અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા છે. હવે આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈશું.

ઉદાહરણ 17 : 11.2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ગોળાનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2$ સેમી^{3}

$= 5887.32$ સેમી^{3}

ઉદાહરણ 18 : ગોળાફેંકમાં વપરાતા ધાતુના ગોળાની ત્રિજ્યા 4.9 સેમી છે. જો વપરાયેલ ધાતુની ઘનતા 7.8 ગ્રામ/સેમી^{3}, હોય તો તેનું દળ શોધો.

ઉકેલ : ગોળાફેંકમાં વપરાતો ગોળો ધાતુનો નક્કર ગોળો હોવાથી, તેનું દળ એ તેના ઘનફળ અને ઘનતાનો ગુણાકાર થશે. તેથી આપણે ગોળાનું ઘનફળ શોધવું પડશે.

હવે, ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9$ સેમી^{3}

$= 493$ સેમી^{3} (આશરે)

વળી, 1 સેમી^{3} ધાતુની ઘનતા 7.8 ગ્રામ હોવાથી,

ગોળાનું દળ $= 7.8 \times 493$ ગ્રામ $= 3845.44$ ગ્રામ $= 3.85$ કિગ્રા (આશરે)

ઉદાહરણ 19 : એક અર્ધગોળાકાર વાસણની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે, તો તેમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : અર્ધગોળાકાર વાસણમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$ સેમી^{3} $= 89.8$ સેમી^{3}

સ્વાધ્યાય 13.8

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. આપેલ ત્રિજ્યા પરથી ગોળાનું ઘનફળ શોધો :

   (i) 7 સેમી (ii) 0.63 મી

2. આપેલ વ્યાસવાળા નક્કર ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત થતા પાણીનું કદ શોધો.

(i) 28 સેમી (ii) 0.21 મી

3. એક ધાતુના ગોળાનો વ્યાસ 4.2 સેમી છે. જો તેના દ્રવ્યની ઘનતા 8.9 ગ્રામ/સેમી^{3} હોય, તો તેનું દળ શોધો.

4. જો ચંદ્રનો વ્યાસ આશરે પૃથ્વીના વ્યાસના ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો પૃથ્વીના ઘનફળ અને ચંદ્રના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

5. 10.5 સેમી વ્યાસવાળા અર્ધગોળાકાર પાત્રમાં કેટલા લિટર દૂધ સમાવી શકાય?

6. એક અર્ધગોળાકાર ટાંકી 1 સેમી જાડા લોખંડના પતરામાંથી બનાવેલી છે. જો તેની અંદરની ત્રિજ્યા 1 મી હોય, તો આ ટાંકી બનાવવા વપરાયેલા લોખંડનું ઘનફળ શોધો.

7. એક ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી^{2} હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

8. એક મકાનનો ઘુમ્મટ અર્ધગોળાકાર છે. તેની અંદરની બાજુએ ચૂનો લગાવવાનો ખર્ચ ₹ 498.96 થાય છે. જો ચૂનો લગાવવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 2.00 હોય, તો

(i) ઘુમ્મટની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને

(ii) ઘુમ્મટની અંદર રહેલી હવાનું ઘનફળ શોધો.

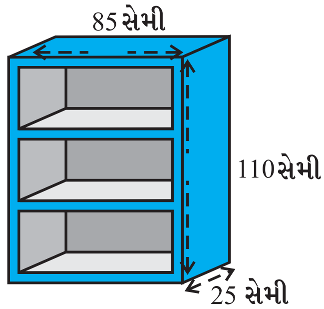
9. જેની ત્રિજ્યા r અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S હોય, તેવા 27 લોખંડના ગોળાને ઓગાળી તેમાંથી જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S' હોય તેવો એક લોખંડનો ગોળો બનાવવામાં આવે છે. તો

(i) નવા ગોળાની ત્રિજ્યા r' અને (ii) S અને S' ગુણોત્તર શોધો.

10. એક ગોળાકાર દવાની કેપ્સુલનો વ્યાસ 3.5 મિમી છે. તો આ કેપ્સુલને સંપૂર્ણ રીતે ભરવા કેટલી દવાની (મિમી^{3}) જરૂર પડશે ?

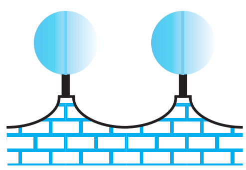
સ્વાધ્યાય 13.9 (પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય)*

1. પુસ્તક મૂકવાના લાકડાના એક કબાટના બહિર્પરિમાણો નીચે મુજબ છે: ઊંચાઈ 110 સેમી, ઊંડાઈ 25 સેમી અને પહોળાઈ 85 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.31) આ કબાટ બનાવવા 5 સેમી જાડા પાટિયાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. તેની બહારની સપાટી પૉલીશ કરવાની છે અને અંદરની સપાટીને રંગવાની છે. જો પૉલીશ કરવાનો ખર્ચ પ્રતિ સેમી^{2} 20 પૈસા અને રંગવાનો ખર્ચ પ્રતિ સેમી^{2} 10 પૈસા હોય, તો રંગકામ અને પૉલીશ કરવાનો ખર્ચ શોધો.



આકૃતિ 13.31

2. એક જમીનની બહાર આવેલ કોટ પર 21 સેમી વ્યાસવાળા લાકડાના ગોળાને નાના આધાર પર મૂકીને આકૃતિ 13.32. માં દર્શાવ્યા મુજબ શણગારવામાં આવે છે. એ હેતુ માટે આવા 8 ગોળાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ગોળાની નીચેનો નળાકાર આધાર 1.5 સેમી ત્રિજ્યા અને 7 સેમી ઊંચાઈવાળો છે. આ આધાર પર કાળો રંગ કરવાનો છે અને ગોળાને સિલ્વર રંગ કરવાનો છે. જો સિલ્વર


આકૃતિ 13.32

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાલક્ષી નથી.

રંગ કરવાનો ખર્ચ પ્રતિ સેમી^{2} 25 પૈસા અને કાળો રંગ કરવાનો ખર્ચ 5 પૈસા પ્રતિસેમી^{2} તો રંગ કરવાનો કુલ ખર્ચ શોધો.

3. એક ગોળાના વ્યાસમાં 25 %. ઘટાડો કરતાં તેની વક્રસપાટીમાં કેટલા ટકા ઘટાડો થશે?

13.10 સારાંશ

તમે આ પ્રકરણમાં નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ $= 2(lb + bh + hl)$
2. સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $= 6a^2$
3. નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi rh$
4. નળાકારની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r(r + h)$
5. લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$
6. લંબવૃત્તીય શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi rl + \pi r^2$, i.e., $\pi r(l + r)$
7. r ત્રિજ્યાવાળા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 4\pi r^2$
8. અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$
9. અર્ધગોળાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= 3\pi r^2$
10. લંબઘનનું ઘનફળ $= l \times b \times h$
11. સમઘનનું ઘનફળ $= a^3$
12. નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$
13. શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
14. ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$
15. અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

[અહીં, મૂળાક્ષરો l, b, h, a, r તેમના પ્રચલિત અર્થમાં વાપરવામાં આવ્યા છે. તેનું અર્થઘટન સંદર્ભ પ્રમાણે કરવું.]

પ્રકરણ 14

આંકડાશાસ્ત્ર

14.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણને હકીકતો, આંકડાકીય માહિતી, કોષ્ટક, આલેખો વગેરે સ્વરૂપમાં રોજ પુષ્કળ માહિતી મળતી રહે છે. આ બધી માહિતી દૈનિકપત્રો, ટેલિવિઝન, સામયિકો અને સંચારના બીજાં માધ્યમો દ્વારા પૂરી પાડવામાં આવે છે. આ માહિતી ક્રિકેટની બૅટીંગ અથવા બૉલીંગની સરેરાશ, કોઈ કંપનીનો નફો, શહેરોનું તાપમાન, પંચવર્ષીય યોજનાના જુદાજુદા વિભાગોના ખર્ચા, ચૂંટણીનાં પરિણામો વગેરે સાથે સંકળાયેલી હોઈ શકે. જે આંકડાકીય કે અન્ય રીતે ચોક્કસ હેતુસર એકત્રિત કરવામાં આવે છે તે હકીકતો અથવા આંકડાઓને ***માહિતી*** *(data)* કહે છે. *data* એ લેટિન શબ્દ *datum(ડેટમ્)*નું બહુવચન છે. હા, એ વાત ચોક્કસ છે કે તમારા માટે માહિતી એ નવો શબ્દ નથી. તમે અગાઉના ધોરણમાં માહિતી અને માહિતીની ગોઠવણી વિશે શીખી ગયાં છો.

આપણી દુનિયા વધુમાં વધુ માહિતીલક્ષી બની રહી છે. આપણી જિંદગીમાં દરેક ક્ષેત્રમાં એક યા બીજી રીતે માહિતીનો ઉપયોગ થઈ રહ્યો છે. તેથી આપણા માટે એ જાણવું આવશ્યક છે કે આવી માહિતી પરથી અર્થપૂર્ણ તારણ કેવી રીતે કાઢી શકાય. આમ, માહિતીનું અર્થપૂર્ણ તારણ કાઢવાની ગણિતની શાખાને આંકડાશાસ્ત્ર કહે છે.

મૂળ લેટિન શબ્દ *(status)* નો અર્થ રાજ્ય છે. તેના પરથી અંગ્રેજી શબ્દ *Statistics* ઊતરી આવ્યો હોય એવું લાગે છે. મૂળરૂપમાં આંકડાશાસ્ત્ર એટલે રાજ્યને માટે ઉપયોગી એવા, લોકોના જીવનને સ્પર્શતાં વિવિધ પાસાઓની માહિતીઓનો સરળ સંગ્રહ. સમયાંતરે તેનું કાર્યક્ષેત્ર વિસ્તૃત થતું ગયું અને આંકડાશાસ્ત્રનો સંબંધ હવે ફક્ત માહિતીનું એકત્રીકરણ અને રજૂઆત કરવા પૂરતો જ સીમિત ન રહેતાં માહિતી પરથી અર્થઘટન અને ચિત્રોના નિષ્કર્ષ મેળવવા સુધી વિસ્તર્યો છે.

આંકડાશાસ્ત્ર એ માહિતી એકત્રિત કરવી, વ્યવસ્થિત ગોઠવવી, તેનું વિશ્લેષણ કરવું અને અર્થપૂર્ણ તારણ મેળવવા સાથે સંકળાયેલ એક વિષય છે. આંકડાશાસ્ત્ર શબ્દ જુદાજુદા સંદર્ભ માટે જુદોજુદો અર્થ ધરાવે છે. તો ચાલો આપણે નીચેનાં વાક્યો પર ધ્યાન આપીએ :

1. શું મને ''ભારતનું શૈક્ષણિક આંકડાશાસ્ત્ર''ની તાજેતરની પ્રત મળશે ?

2. મને આંકડાશાસ્ત્રનો અભ્યાસ કરવો ગમે છે, કારણ કે તે રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગી છે.

પહેલાં વિધાનમાં આંકડાશાસ્ત્રનો ઉપયોગ બહુવચનમાં કરેલો છે અને તે આંકડાકીય માહિતીના અર્થમાં છે. તેમાં ભારતની વિવિધ શૈક્ષણિક સંસ્થાઓના જુદાજુદા રાજ્યોના સાક્ષરતા દર વગેરે જેવી બાબતોનો સમાવેશ હોઈ શકે. બીજા વિધાનમાં આંકડાશાસ્ત્ર શબ્દનો ઉપયોગ એકવચન તરીકે છે. તેનો અર્થ જેમાં માહિતીનું એકત્રીકરણ, રજૂઆત, માહિતીનું વિશ્લેષણ કરવાની સાથેસાથે માહિતીના અર્થપૂર્ણ તારણનું ચિત્રણ કરવા ઉપયોગી થાય તેવો વિષય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે માહિતીને લગતાં આ બધા પાસાઓની ટૂંકમાં ચર્ચા કરીએ.

14.2 માહિતીનું એકત્રીકરણ

ચાલો આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ દ્વારા માહિતી એકત્રિત કરવાનો અભ્યાસ શરૂ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : તમારા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને ચાર જૂથમાં વહેંચો. દરેક જૂથને નીચેનામાંથી કોઈ એક પ્રકારની માહિતી એકત્ર કરવાનું કાર્ય સોંપો :

(i) તમારા વર્ગના 20 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ

(ii) એક મહિનામાં દરેક દિવસે ગેરહાજર રહેતા તમારા વર્ગના વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા

(iii) તમારા સહાધ્યાયીઓના કુટુંબની સભ્ય-સંખ્યા

(iv) તમારી શાળામાં અથવા એની આસપાસના વિસ્તારમાં 15 છોડની ઊંચાઈ

ચાલો હવે આપણે વિદ્યાર્થીઓએ એકત્રિત કરેલાં પરિણામો જોઈશું. દરેક જૂથમાં તેઓએ માહિતી કેવી રીતે મેળવી ?

(i) શું તેમણે આ માહિતી દરેક વિદ્યાર્થી પાસેથી તેના ઘરની કે વ્યક્તિગત મુલાકાત લઈને મેળવી હતી ?

(ii) શું તેમણે આ માહિતી શાળાના પ્રાપ્ય દફતરી સ્રોતમાંથી મેળવી ?

પ્રથમ કિસ્સા માટે જ્યારે તપાસકર્તાએ કોઈ ચોક્કસ હેતુ ધ્યાનમાં રાખીને તેણે જાતે માહિતી મેળવી છે તે માહિતીને ***પ્રાથમિક માહિતી*** *(primary data)* કહે છે.

બીજા કિસ્સામાં પહેલાંથી એકત્રિત થયેલી માહિતીના સ્રોતમાંથી માહિતી મેળવી છે. આ રીતે મેળવેલી માહિતીને ***ગૌણ માહિતી*** *(secondary data)* કહે છે. આવી માહિતી જે બીજા દ્વારા અન્ય કોઈ વિષયના સંદર્ભમાં મેળવેલી હોય ત્યારે સ્રોતની વિશ્વસનીયતાની ખાતરી કર્યા બાદ તેનો ખૂબ જ કાળજીપૂર્વક ઉપયોગ કરવો જોઈએ.

હવે તમે સમજી ગયા હશો કે માહિતી કેવી રીતે એકત્રિત કરી શકાય છે અને પ્રાથમિક માહિતી તથા ગૌણ માહિતી વચ્ચેનો તફાવત શું છે.

સ્વાધ્યાય 14.1

1. તમે રોજિંદા જીવનમાંથી એકત્ર કરી શકો તેવી માહિતીનાં પાંચ ઉદાહરણ આપો.

2. ઉપરના પ્રશ્નની માહિતીનું પ્રાથમિક માહિતી અને ગૌણ માહિતીમાં વર્ગીકરણ કરો.

14.3 માહિતીની રજૂઆત

જેવું માહિતી એકત્રિત કરવાનું કાર્ય પૂર્ણ થાય તેવું તપાસકર્તાએ આ માહિતીની રજૂઆત જે અર્થપૂર્ણ હોય, સરળતાથી સમજી શકાય અને પહેલી નજરે તેના મુખ્ય ઉદ્દેશો જાણી શકાય એવા સ્વરૂપમાં કરવી જોઈએ.

ચાલો કેટલાંક ઉદાહરણ દ્વારા માહિતીને વિવિધ રીતે રજૂઆત કરવાનું યાદ કરીએ.

ઉદાહરણ 1 : ગણિતની એક કસોટીમાં 10 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે આપેલા છે :

55 36 95 73 60 42 25 78 75 62

આ સ્વરૂપની માહિતીને *કાચી માહિતી (raw data)* કહે છે.

આ સ્વરૂપમાં તમે માહિતીને જુઓ તો શું તમે સૌથી વધુ અને સૌથી ઓછા ગુણ શોધી શકશો ? સૌથી વધુ અને સૌથી ઓછા ગુણ શોધવામાં તમને કેટલો સમય લાગ્યો ? જો આ ગુણને ચઢતા કે ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવ્યા હોત તો શું ઓછો સમય ન લાગે ? તો ચાલો આપણે ગુણને ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવીએ.

25 36 42 55 60 62 73 75 78 95

હવે આપણે સ્પષ્ટ જોઈ શકીએ છીએ કે સૌથી ઓછા ગુણ 25 અને સૌથી વધુ ગુણ 95 છે.

માહિતીનાં મહત્તમ અને ન્યૂનતમ મૂલ્યોના તફાવતને માહિતીનો વિસ્તાર કહે છે. તેથી આ કિસ્સામાં માહિતીનો વિસ્તાર $95 - 25 = 70$ છે.

ખાસ કરીને જ્યારે પ્રયોગમાં અવલોકનોની સંખ્યા વધુ હોય ત્યારે તે માહિતીને ચઢતાં કે ઊતરતાં ક્રમમાં ગોઠવવામાં વધુ સમય માંગી લે છે. તે આપણે હવે પછીના ઉદાહરણમાં જોઈશું.

ઉદાહરણ 2 : એક શાળાના ધોરણ 9 ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણ (100 માંથી) નીચે મુજબ છે :

10	20	36	92	95	40	50	56	60	70
92	88	80	70	72	70	36	40	36	40
92	40	50	50	56	60	70	60	60	88

યાદ કરો કે ચોક્કસ ગુણ મેળવનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાને તે ગુણની આવૃત્તિ કહે છે. ઉદાહરણમાં 4 વિદ્યાર્થીઓએ 70 ગુણ મેળવ્યા છે તેથી 70 ગુણની આવૃત્તિ 4 છે. માહિતીને વધુ સરળ સમજાય તે માટે તેને આપણે આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોષ્ટકમાં લખીશું :

કોષ્ટક 14.1

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (એટલે કે આવૃત્તિ)
10	1
20	1
36	3
40	4
50	3
56	2
60	4
70	4
72	1
80	1
88	2
92	3
95	1
કુલ	30

કોષ્ટક 14.1 ને અવર્ગીકૃત માહિતીનું ***આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક*** *(frequency distribution table)* કહે છે અથવા ફક્ત *આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક* કહે છે.

તમે કોષ્ટક તૈયાર કરવા માટે આવૃત્તિ-ચિહ્નોનો પણ ઉપયોગ કરી શકો છો. તે હવે પછીના ઉદાહરણમાં જોઈશું.

ઉદાહરણ 3 : વન મહોત્સવ દરમિયાન 100 શાળા પૈકી પ્રત્યેક શાળામાં 100 છોડ ઉગાડવામાં આવ્યા હતા. તેમાંથી એક મહિના પછી બચી ગયેલા છોડની સંખ્યાની નોંધ આ પ્રમાણે હતી.

95	67	28	32	65	65	69	33	98	96
76	42	32	38	42	40	40	69	95	92
75	83	76	83	85	62	37	65	63	42
89	65	73	81	49	52	64	76	83	92
93	68	52	79	81	83	59	82	75	82
86	90	44	62	31	36	38	42	39	83
87	56	58	23	35	76	83	85	30	68
69	83	86	43	45	39	83	75	66	83
92	75	89	66	91	27	88	89	93	42
53	69	90	55	66	49	52	83	34	36

આવી મોટી સંખ્યાની માહિતી રજૂ કરવા માટે વાંચક સરળતાથી સમજી શકે તે માટે આપણે તેને 20-29, 30-39, . . ., 90-99 (આપણી માહિતી 23 થી 98 હોવાથી). જેવાં જૂથમાં ગોઠવી શકીએ. આ જૂથોને ***વર્ગો*** *(classes)* અથવા ***વર્ગ-અંતરાલ*** *(class-intervals)* અને તેની *લંબાઈને* ***વર્ગલંબાઈ*** *(class-size)* અથવા ***વર્ગની પહોળાઈને*** *(class width)* કહે છે. અહીં આ કિસ્સામાં તે 10 છે. દરેક વર્ગની નાનામા નાની સંખ્યાને ***અધ:વર્ગસીમા*** *(lower class limit)* અને મોટામાં મોટી સંખ્યાને ***ઊર્ધ્વવર્ગસીમા***

(upper class limit) કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે વર્ગ 20-29 માં 20 અધઃવર્ગસીમા અને 29 એ ઊર્ધ્વવર્ગસીમા છે.

ઉપરાંત યાદ રાખો કે, આવૃત્તિ-ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરીને ઉપરની માહિતીને સંક્ષિપ્ત રૂપે કોષ્ટકમાં નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકાય :

કોષ્ટક 14.2

બચી ગયેલા છોડની સંખ્યા	આવૃત્તિ ચિહ્ન	શાળાઓની સંખ્યા (આવૃત્તિ)
20 - 29	|||	3
30 - 39	𝍸 𝍸 ||||	14
40 - 49	𝍸 𝍸 ||	12
50 - 59	𝍸 |||	8
60 - 69	𝍸 𝍸 𝍸 |||	18
70 - 79	𝍸 𝍸	10
80 - 89	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	23
90 - 99	𝍸 𝍸 ||	12
	કુલ	**100**

આ સ્વરૂપમાં માહિતીને રજૂ કરતાં માહિતી સરળ અને સંક્ષિપ્ત બને છે અને તેનાથી આપણને પહેલી નજરે તેનાં ચોક્કસ અને અગત્યનાં લક્ષણો ધ્યાનમાં આવે છે. આ પ્રકારના કોષ્ટકને **વર્ગીકૃત માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક** (*grouped frequency distribution table*) કહે છે. અહીં આપણે સરળતાથી જોઈ શકીએ છીએ કે 8 + 18 + 10 + 23 + 12 = 71 શાળામાં 50 % કે તેથી વધુ છોડ બચી ગયા હતા.

આપણે જોયું કે ઉપર્યુક્ત કોષ્ટકમાં વર્ગો પરસ્પર અનાચ્છાદિત*(non-overlapping)* છે. હવે નોંધો કે આપણે ઓછી વર્ગલંબાઈવાળા વધારે વર્ગો બનાવી શક્યા હોત અથવા વધુ વર્ગલંબાઈવાળા ઓછા વર્ગો બનાવી શક્યા હોત. ઉદાહરણ તરીકે 22-26, 27-31 વગેરે વર્ગ લઈ શકીએ. વર્ગો આચ્છાદિત(છેદતાં) ન હોવા જોઈએ એ સિવાય કોઈ સખત અને તીવ્ર નિયમ હોતો નથી.

ઉદાહરણ 4 : હવે આપણે જેમાં એક વર્ગના 38 વિદ્યાર્થીઓના વજન આપેલા હોય તેવું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક લઈએ.

કોષ્ટક 14.3

વજન (કિગ્રામાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
31 - 35	9
36 - 40	5
41 - 45	14
46 - 50	3
51 - 55	1
56 - 60	2
61 - 65	2
66 - 70	1
71 - 75	1
કુલ	**38**

હવે ધારો કે 35.5 કિગ્રા અને 40.5 કિગ્રા વજનવાળા બે નવા વિદ્યાર્થીઓ વર્ગમાં દાખલ થાય તો તેમને આપણે કયા વર્ગમાં મૂકીશું ? ન તો તેમને એવા વર્ગમાં મૂકીએ કે જેની ઊર્ધ્વસીમા 35 અથવા 40 હોય અને ન તો જે તેના પછીના હોય એવા વર્ગોમાં મૂકી શકીએ, કારણ કે બે ક્રમિક વર્ગોની ઊર્ધ્વસીમા અને અધઃસીમા વચ્ચે અવકાશ છે. આપણે આવી સ્થિતિમાં વર્ગને એવી રીતે વિભાજિત કરવા જોઈએ કે જેથી ક્રમિક બે વર્ગોની અનુક્રમે એકની ઊર્ધ્વસીમા અને પછીના વર્ગની અધઃસીમા સમાન થાય. તે માટે આપણે એક વર્ગની ઊર્ધ્વસીમા અને તેની પછીના વર્ગની અધઃસીમા વચ્ચેનું અંતર શોધવું પડે. આપણે આ અંતરનો અડધો ભાગ દરેક વર્ગની ઊર્ધ્વસીમામાં ઉમેરીએ અને અધઃસીમામાંથી બાદ કરીએ.

ઉદાહરણ તરીકે વર્ગ 31 - 35 અને 36 - 40 લઈએ.

36 - 40 ની અધઃસીમા 36

31 - 35 ની ઊર્ધ્વસીમા 35

અંતર $36 - 35 = 1$

અડધું અંતર $\frac{1}{2} = 0.5$

તેથી વર્ગ 31 - 35 થી બનતો નવો વર્ગ $(31 - 0.5) - (35 + 0.5) = 30.5 - 35.5$.

તેવી રીતે વર્ગ 36 - 40 થી બનતો નવો વર્ગ $(36 - 0.5) - (40 + 0.5) = 35.5 - 40.5$.

આ પ્રક્રિયામાં આગળ વધતા જઈએ તો નીચેના સતત વર્ગો મળશે :

30.5 - 35.5, 35.5 - 40.5, 40.5 - 45.5, 45.5 - 50.5, 50.5 - 55.5, 55.5 - 60.5, 60.5 - 65.5, 65.5 - 70.5, 70.5 - 75.5.

હવે આ વર્ગોમાં પેલા નવા વિદ્યાર્થીઓનાં વજનનો સમાવેશ કરવો આપણા માટે શક્ય છે. પરંતુ આવું કરવામાં બીજી એક સમસ્યા છે કે 35.5 કિગ્રા બંને વર્ગો 30.5 - 35.5 અને 35.5 - 40.5 માં આવી શકે. તમારા વિચારથી આ વજન કયા વર્ગમાં રાખવું જોઈએ ?

જો બંને વર્ગોમાં રાખવામાં આવે તો તેની બે વખત ગણતરી થાય છે. તેથી એક રૂઢિ પ્રમાણે 35.5 ને વર્ગ 35.5 - 40.5 માં સમાવેશ કરીશું,પરંતુ 30.5 - 35.5 વર્ગમાં નહિ. તેવી જ રીતે 40.5 ને 40.5 - 45.5 વર્ગમાં મૂકીશું. 35.5 - 40.5 માં નહિ.

આમ, નવા વજન 35.5 કિગ્રા અને 40.5 કિગ્રાનો અનુક્રમે 35.5 - 40.5 અને 40.5 - 45.5 માં સમાવેશ કરીશું. આ પ્રમાણે ગોઠવતાં આપણને નવું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક મળશે, જે નીચે દર્શાવેલું છે :

કોષ્ટક 14.4

વજન (કિગ્રા માં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
30.5-35.5	9
35.5-40.5	6
40.5-45.5	15
45.5-50.5	3
50.5-55.5	1
55.5-60.5	2
60.5-65.5	2
65.5-70.5	1
70.5-75.5	1
કુલ	**40**

હવે આપણે પ્રવૃત્તિ 1 માં તમારા દ્વારા એકત્રિત થયેલી માહિતી તરફ જોઈએ. હવે અમે તમને કહીશું કે તમે તેને આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકમાં દર્શાવો.

પ્રવૃત્તિ 2 : આ જ ચાર જૂથોને લઈ તમારી માહિતી આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકમાં ગોઠવો. માહિતીનો વિસ્તાર અને માહિતીના પ્રકારને ધ્યાનમાં રાખી યોગ્ય વર્ગલંબાઈવાળા અનુકૂળ વર્ગો લો.

સ્વાધ્યાય 14.2

1. ધોરણ 8 ના 30 વિદ્યાર્થીઓના રૂધિર-જૂથ(*Blood group*) ની વિગત નીચે મુજબ છે :

A, B, O, O, AB, O, A, O, B, A, O, B, A, O, O,

A, AB, O, A, A, O, O, AB, B, A, O, B, A, B, O.

આ માહિતીને આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટકના સ્વરૂપમાં દર્શાવો. આ વિદ્યાર્થીઓના રૂધિર-જૂથમાં કયું રૂધિર-જૂથ સૌથી વધુ સામાન્ય છે અને કયું રૂધિર-જૂથ સૌથી વધુ અસામાન્ય છે ?

2. 40 ઈજનેરોનું ઘરથી નોકરીના સ્થાનનું અંતર(કિમીમાં) નીચે મુજબ છે :

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12

ઉપર્યુક્ત માહિતીને 0-5 નો (જેમાં 5 આવેલો નથી) પહેલો વર્ગ લઈ, 5 ની વર્ગલંબાઈ લઈ એક વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક બનાવો. આ કોષ્ટકની રજૂઆત પરથી તમે કઈ મુખ્ય બાબતો તારવશો ?

3. 30 દિવસના એક મહિનામાં એક શહેરનો સાપેક્ષ ભેજ (% માં) નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

98.1	98.6	99.2	90.3	86.5	95.3	92.9	96.3	94.2	95.1
89.2	92.3	97.1	93.5	92.7	95.1	97.2	93.3	95.2	97.3
96.2	92.1	84.9	90.2	95.7	98.3	97.3	96.1	92.1	89

(i) બે વર્ગ 84 - 86, 86 - 88 વગેરે બને તે પ્રમાણે એક વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક બનાવો.

(ii) તમે કલ્પી શકો છો કે આ માહિતી કયા મહિનાની અથવા કઈ ઋતુની છે ?

(iii) આ માહિતીનો વિસ્તાર શું છે ?

4. 50 વિદ્યાર્થીઓની પૂર્ણાંક સેન્ટિમીટરમાં માપવામાં આવેલી ઊંચાઈ નીચે પ્રમાણે જોવા મળી :

161	150	154	165	168	161	154	162	150	151
162	164	171	165	158	154	156	172	160	170
153	159	161	170	162	165	166	168	165	164
154	152	153	156	158	162	160	161	173	166
161	159	162	167	168	159	158	153	154	159

(i) ઉપર્યુક્ત માહિતીને 160 - 165, 165 - 170 વગેરે વર્ગો લઈને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક રૂપે રજૂ કરો.

(ii) ઉપરના કોષ્ટક પરથી ઊંચાઈ વિશે તમે શું તારવી શકો ?

5. કોઈ શહેરના વાતાવરણમાં *સલ્ફર ડાયૉક્સાઈડની સાંદ્રતા ppm(parts per million)*માં શોધવા માટેનો અભ્યાસ કરવામાં આવ્યો. તેની 30 દિવસમાં મળેલી માહિતી આ પ્રમાણે છે :

0.03	0.08	0.08	0.09	0.04	0.17
0.16	0.05	0.02	0.06	0.18	0.20
0.11	0.08	0.12	0.13	0.22	0.07
0.08	0.01	0.10	0.06	0.09	0.18
0.11	0.07	0.05	0.07	0.01	0.04

(i) માહિતીને 0.00 - 0.04, 0.04 - 0.08..... વગેરે વર્ગો લઈ વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો.

(ii) કેટલા દિવસ સલ્ફર ડાયૉક્સાઈડની સાંદ્રતા 0.11 *ppm* કરતાં વધુ રહી હશે ?

6. ત્રણ સિક્કાઓને વારાફરતી 30 વખત ઉછાળવામાં આવતા દરેક વખત છાપ મળે તેની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે નોંધાયેલી હતી :

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

ઉપર્યુક્ત માહિતી માટેનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો.

7. π નું 50 દશાંશ-સ્થાન સુધી મૂલ્ય નીચે મુજબ છે :

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) દશાંશ-ચિહ્ન પછી 0 થી 9 સુધી આવતા અંકોનું આવૃત્તિ-વિતરણ બનાવો.

(ii) સૌથી વધુ વખત અને સૌથી ઓછી વખત કયો અંક આવે છે.

8. 30 બાળકોને પૂછવામાં આવ્યું કે ગયા અઠવાડિયામાં તેમણે કેટલા કલાક ટીવીના કાર્યક્રમ જોયા ? તેનાથી મળતાં પરિણામો નીચે પ્રમાણે હતાં :

1	6	2	3	5	12	5	8	4	8
10	3	4	12	2	8	15	1	17	6
3	2	8	5	9	6	8	7	14	12

(i) આ માહિતીનું 5 વર્ગલંબાઈ લઈને અને એક વર્ગ 5 - 10 લઈને વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક તૈયાર કરો.

(ii) કેટલાં બાળકો અઠવાડિયામાં 15 કલાક કે તેથી વધુ કલાક ટેલિવિઝન જોતા હતા ?

9. એક કંપની એક વિશિષ્ટ પ્રકારની કાર-બેટરી બનાવે છે. 40 બૅટરીના આયુષ્યની વર્ષમાં માહિતી નીચે મુજબ છેઃ

2.6	3.0	3.7	3.2	2.2	4.1	3.5	4.5
3.5	2.3	3.2	3.4	3.8	3.2	4.6	3.7
2.5	4.4	3.4	3.3	2.9	3.0	4.3	2.8
3.5	3.2	3.9	3.2	3.2	3.1	3.7	3.4
4.6	3.8	3.2	2.6	3.5	4.2	2.9	3.6

આ માહિતીનું 0.5 વર્ગલંબાઈ લઈ અને 2 - 2.5 વર્ગથી શરૂઆત કરીને એક વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક બનાવો.

14.4 માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત

માહિતીને કોષ્ટક દ્વારા દર્શાવવાની ચર્ચા આપણે કરી લીધી છે. ચાલો આપણે માહિતીની બીજી રીતે રજૂઆત એટલે કે ***આલેખાત્મક રજૂઆત*** *(graphical representation)* તરફ ધ્યાન આપીએ. તે સાચું જ કહેવાયું છે કે ''હજાર શબ્દો કરતાં એક ચિત્ર વધુ શ્રેષ્ઠ છે'' સામાન્ય રીતે વ્યક્તિગત માહિતીની તુલના આલેખ દ્વારા વધુ સારી રીતે થઈ શકે છે. વાસ્તવિક માહિતી કરતાં આ રજૂઆત સમજવામાં વધુ સરળ છે. આ વિભાગમાં આપણે નીચે દર્શાવેલ આલેખાત્મક રજૂઆતોનો અભ્યાસ કરીશું.

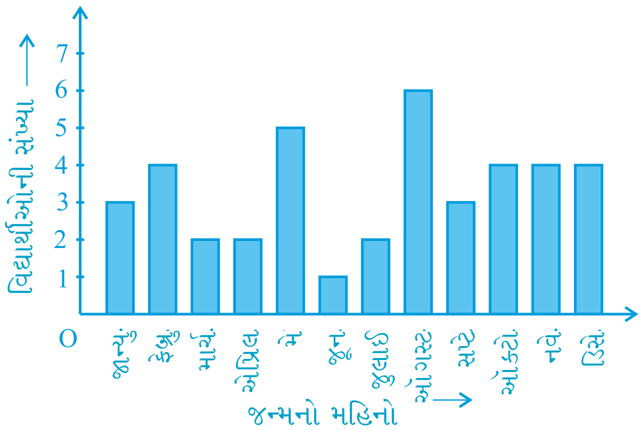
(A) ***લંબાલેખ*** *(Bar Graphs)*

(B) ***સમાન પહોળાઈ અને અસમાન પહોળાઈના સ્તંભાલેખ*** *(histograms of uniform width and of varying widths)*

(C) ***આવૃત્તિ બહુકોણો*** *(frequency polygons)*

(A) લંબાલેખ : અગાઉના ધોરણમાં તમે લંબાલેખ વિશે શીખી ગયા છો અને તેની ચિત્રાત્મક રજૂઆત પણ કરી છે. અહીં, આપણે વધારે ઔપચારિક અભિગમથી તેની ચર્ચા કરીશું. યાદ કરો કે જેમાં સામાન્ય રીતે સમાન પહોળાઈવાળા લંબચોરસ દ્વારા જુદાજુદા ચલો દર્શાવી તેને એક અક્ષ પર (ધારો કે x-અક્ષ) સમાન અંતરે દોરવામાં આવે છે એવી માહિતીની ચિત્રાત્મક રજૂઆત એ લંબાલેખ છે. બીજા અક્ષ (ધારો કે y-અક્ષ) પર ચલનું મૂલ્ય દર્શાવવામાં આવે છે. લંબચોરસની ઊંચાઈ તેના ચલની કિંમત પર આધારિત છે.

ઉદાહરણ 5 : ધોરણ 9 ના એક ચોક્કસ વિભાગના 40 વિદ્યાર્થીઓને તેમના જન્મનો મહિનો જણાવવાનું કહેવામાં આવ્યું અને તેથી મળેલી માહિતીને આધારે નીચેનો આલેખ તૈયાર કરવામાં આવ્યો હતો :



આકૃતિ 14.1

ઉપરના લંબાલેખને ધ્યાનથી જોઈને નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) નવેમ્બર મહિનામાં કેટલા વિદ્યાર્થીઓ જન્મ્યા હતા ?

(ii) કયા મહિનામાં સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓ જન્મ્યા હતા ?

ઉકેલ : નોંધો કે 'જન્મનો મહિનો' એક ચલ છે અને 'વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા' એ ચલનું મૂલ્ય છે.

(i) નવેમ્બર મહિનામાં 4 વિદ્યાર્થીઓનો જન્મ થયો હતો.

(ii) ઑગષ્ટ મહિનામાં સૌથી વધુ વિદ્યાર્થીઓનો જન્મ થયો હતો.

ચાલો હવે નીચે દર્શાવેલ ઉદાહરણ માટે લંબાલેખ કેવી રીતે દોરી શકાય તે જોઈએ.

ઉદાહરણ 6 : ₹ 20,000 માસિક આવક ધરાવતા એક કુટુંબે જુદાજુદા શીર્ષક હેઠળ થતાં માસિક ખર્ચનું નીચે પ્રમાણે આયોજન કર્યું હતું.

કોષ્ટક 14.5

સૂચિ(બજેટ-હેડ)	ખર્ચ (હજાર રૂપિયામાં)
કરિયાણું	4
ભાડું	5
બાળકોનું શિક્ષણ	5
દવાઓ	2
બળતણ	2
મનોરંજન	1
પ્રકીર્ણ	1

ઉપર્યુક્ત માહિતીના આધારે લંબાલેખ દોરો.

ઉકેલ : આપણે આ માહિતીના આધારે નીચે આપેલ સોપાન પ્રમાણે લંબાલેખ દોરીશું. આપણે નોંધીએ કે બીજી હરોળમાં એકમ 'હજાર રૂપિયામાં' છે, એટલે કે કરિયાણા સામે '4' અંક છે. તેનો અર્થ ₹ 4000 થશે.

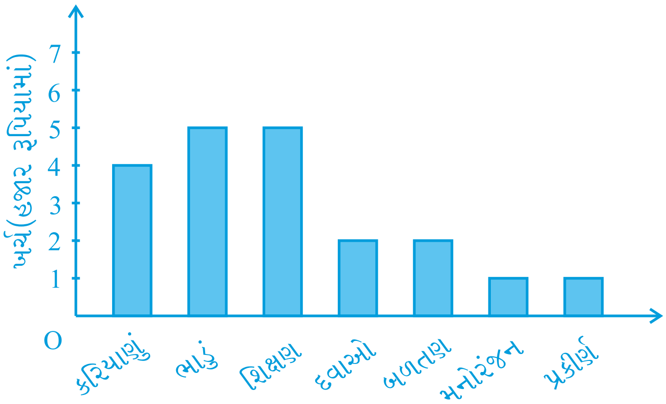
1. અહીં લંબચોરસની પહોળાઈનું કોઈ મહત્ત્વ નથી. તેથી કોઈ પણ માપ પસંદ કરીને સમક્ષિતિજ અક્ષ પર ચલ 'સૂચિ' લઈશું. પરંતુ ચોકસાઈ રાખી દરેક લંબચોરસની પહોળાઈ સરખી રાખીશું અને બે લંબચોરસ વચ્ચેનું અંતર પણ સમાન રાખીશું. એક સૂચિને એક એકમ તરીકે લો.

2. ખર્ચ શિરોલંબ અક્ષ પર નિર્દેશિત કરીએ છીએ. હવે વધુમાં વધુ ખર્ચ ₹ 5000 હોવાથી આપણે 1 એકમ = ₹ 1000 માપ લઈ શકીએ.

3. પહેલા ચલ કરિયાણાને દર્શાવવા 1 એકમની પહોળાઈ અને 4 એકમની ઊંચાઈવાળો લંબચોરસ બનાવીશું.

4. આ પ્રમાણે બે ક્રમિક લંબચોરસ વચ્ચે 1 એકમનું અંતર છોડીને બીજા અન્ય ચલને દર્શાવીશું.

લંબાલેખ આકૃતિ 14.2 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 14.2

અહીં તમે પહેલી નજરે માહિતીને સાપેક્ષ લક્ષણો સરળતાથી જોઈ શકો છો. ઉદાહરણ તરીકે શૈક્ષણિક ખર્ચ એ દવાઓના ખર્ચના બમણાં કરતા વધારે છે. તેથી કેટલીક બાબતોમાં કોષ્ટક સ્વરૂપ કરતાં આ રીતે માહિતીને ઉત્તમ રીતે રજૂ કરી શકાય છે.

પ્રવૃત્તિ 3 : પ્રવૃત્તિ 1 નાં આ જ ચાર જૂથો દ્વારા મળેલી માહિતીને યોગ્ય લંબાલેખ દ્વારા રજૂઆત કરો.

હવે ચાલો જોઈએ કે સતત વર્ગોના વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણની આલેખાત્મક રજૂઆત કેવી રીતે કરી શકાય તે જોઈએ.

(B) સ્તંભાલેખ

આ આલેખ એ લંબાલેખની આલેખાત્મક રજૂઆતનું જ સ્વરૂપ છે. પરંતુ તે સતત વર્ગો માટે વપરાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક 14.6 લઈએ. તેમાં એક વર્ગના 36 વિદ્યાર્થીઓનું વજન આપેલું છે.

કોષ્ટક 14.6

વજન (કિગ્રામાં)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
30.5 - 35.5	9
35.5 - 40.5	6
40.5 - 45.5	15
45.5 - 50.5	3
50.5 - 55.5	1
55.5 - 60.5	2
કુલ	36

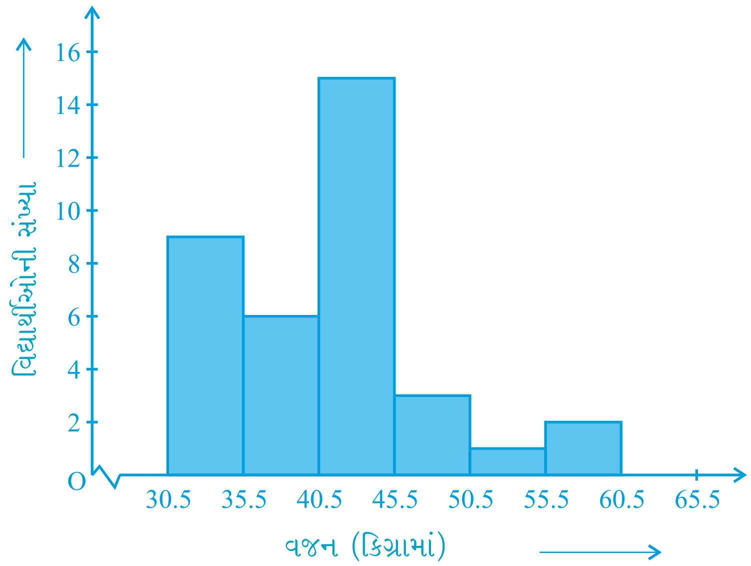
ચાલો આપણે ઉપર્યુક્ત માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે કરીએ :

(i) આપણે સમક્ષિતિજ અક્ષ પર યોગ્ય માપ લઈને વજનને દર્શાવીશું. આપણે 1 સેમી = 5 કિગ્રા પસંદ કરી શકીએ. પરંતુ પહેલો વર્ગ શૂન્યને બદલે 30.5 થી શરૂ થતો હોવાથી અક્ષ પર કાપ *(kink)* નું ચિહ્ન બનાવીને દર્શાવીશું.

(ii) વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાને (આવૃત્તિ)શિરોલંબ અક્ષ પર યોગ્ય માપ દ્વારા દર્શાવીશું. સૌથી મોટી આવૃત્તિ 15 હોવાથી 15 નો સમાવેશ થઈ શકે તેવી રીતે તેને અનુરૂપ હોય તેવું માપ લઈશું.

(iii) હવે આપણે વર્ગલંબાઈ જેટલી પહોળાઈ અને વર્ગની સામે આપેલી આવૃત્તિને અનુરૂપ ઊંચાઈવાળો લંબચોરસ અથવા લંબચોરસ સ્તંભ દોરીશું. ઉદાહરણ તરીકે વર્ગ 30.5 - 35.5 ના લંબચોરસની પહોળાઈ 1 સેમી અને ઊંચાઈ 9 સેમી થશે.

(iv) આ પ્રમાણે આપણને આકૃતિ 14.3 માં બતાવ્યા પ્રમાણેનો આલેખ મળશે.



આકૃતિ 14.3

જુઓ કે ક્રમિક લંબચોરસ વચ્ચે કોઈ અંતર નથી. તેથી પરિણામી આલેખ એક ઘન આકૃતિ જેવો દેખાય છે. આ આલેખને ***સ્તંભાલેખ*** *(histogram)* કહે છે. તેમાં સતત વર્ગવાળા વર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણની એક આલેખાત્મક રજૂઆત છે. ઊપરાંત જે લંબાલેખમાં ન હતી તે લંબચોરસની પહોળાઈ પણ આ આલેખની પ્રસ્તુતિમાં મહત્વપૂર્ણ ભાગ ભજવે છે.

અહીં, ખરેખર તો ઉભા કરેલા લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેને સંગત આવૃત્તિઓના સમપ્રમાણમાં હોય છે. જો કે બધા લંબચોરસની પહોળાઈ સમાન છે, પરંતુ ઊંચાઈ આવૃત્તિના સપ્રમાણમાં છે. આ કારણથી આપણે લંબાઈઓ ઉપર (iii) માં બતાવ્યા પ્રમાણે લીધી છે.

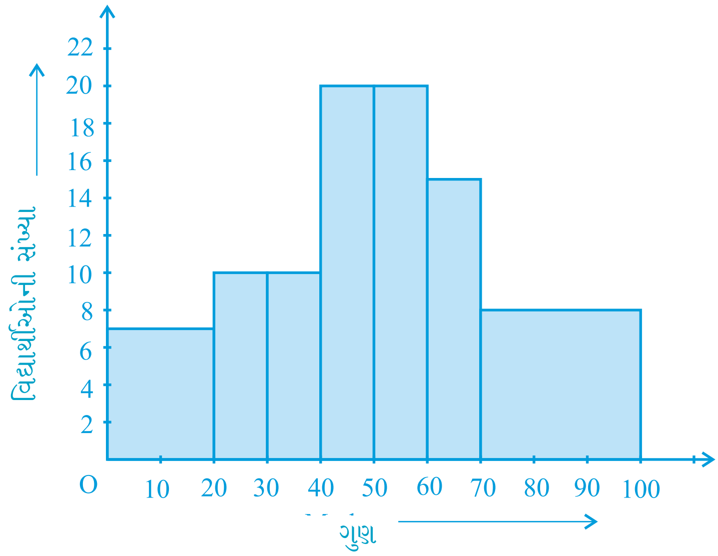
હવે ઉપરના કિસ્સા કરતા જુદી પરિસ્થિતિ ધ્યાનમાં લઈએ.

ઉદાહરણ7 : એક શિક્ષિકા ગણિતની 100 ગુણની પરીક્ષા લઈને બે વિભાગના વિદ્યાર્થીઓના દેખાવનું વિશ્લેષણ કરવા માગે છે. તેમનું કાર્ય જોઈને તેને જણાય છે કે ફક્ત થોડા જ વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 20 થી ઓછા છે અને થોડા વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 70 કે તેથી વધુ છે. તેથી તેમણે વિદ્યાર્થીઓને 0 - 20, 20 - 30, . . ., 60 - 70, 70 - 100 જેવા જુદીજુદી વર્ગલંબાઈવાળા વર્ગોમાં વર્ગીકૃત કરવાનો નિર્ણય લેતાં, પૃષ્ઠ 223 પર બતાવ્યા પ્રમાણેનું કોષ્ટક મળશે :

કોષ્ટક 14.7

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 - 20	7
20 - 30	10
30 - 40	10
40 - 50	20
50 - 60	20
60 - 70	15
70 - થી વધુ	8
કુલ	90

આકૃતિ 14.4 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક વિદ્યાર્થી દ્વારા આ કોષ્ટકનો સ્તંભાલેખ તૈયાર કરવામાં આવ્યો હતો.



આકૃતિ 14.4

આલેખાત્મક રજૂઆતને બરાબર ચકાસો. શું તમે વિચારી શકો છો કે માહિતીનું આ સાચું નિર્દેશન છે? ના, આ આલેખ આપણને ગેરમાર્ગે દોરે છે. અગાઉ જણાવ્યા પ્રમાણે સ્તંભાલેખમાં લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ આવૃત્તિના સમપ્રમાણમાં હોય છે. અગાઉના આલેખમાં આ પ્રશ્ન ઉપસ્થિત થતો ન હતો, કારણ કે બધા જ લંબચોરસની પહોળાઈ સમાન હતી. પરંતુ અહીં લંબચોરસની પહોળાઈ બદલાય છે, આથી ઉપર જે સ્તંભાલેખ છે તે સાચું ચિત્ર રજુ કરતો નથી. ઉદાહરણ તરીકે, વર્ગ 60 - 70 કરતાં વર્ગ 70 - 100 ની આવૃત્તિ વધુ હોવી જોઈએ, પરંતુ તે હકીકતમાં નથી.

તેથી લંબચોરસની લંબાઈમાં થોડું પરિવર્તન કરવાની જરૂર પડશે, જેથી કરીને ફરીને ક્ષેત્રફળ એ આવૃત્તિને સપ્રમાણ થાય.

આપણે નીચે પ્રમાણેનાં સોપાન અનુસરીએ :

1. સૌથી નાની વર્ગલંબાઈવાળો વર્ગ લો. ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં સૌથી નાની વર્ગલંબાઈ 10 છે.
2. લંબચોરસની લંબાઈ એવી રીતે બદલો કે જેથી દરેક લંબચોરસની વર્ગલંબાઈ 10 ને સપ્રમાણ થાય.

ઉદાહરણ તરીકે જ્યારે વર્ગલંબાઈ 20 હોય ત્યારે લંબચોરસની લંબાઈ 7 છે, તો વર્ગલંબાઈ 10 હોય, તો લંબચોરસની લંબાઈ $\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$ થાય.

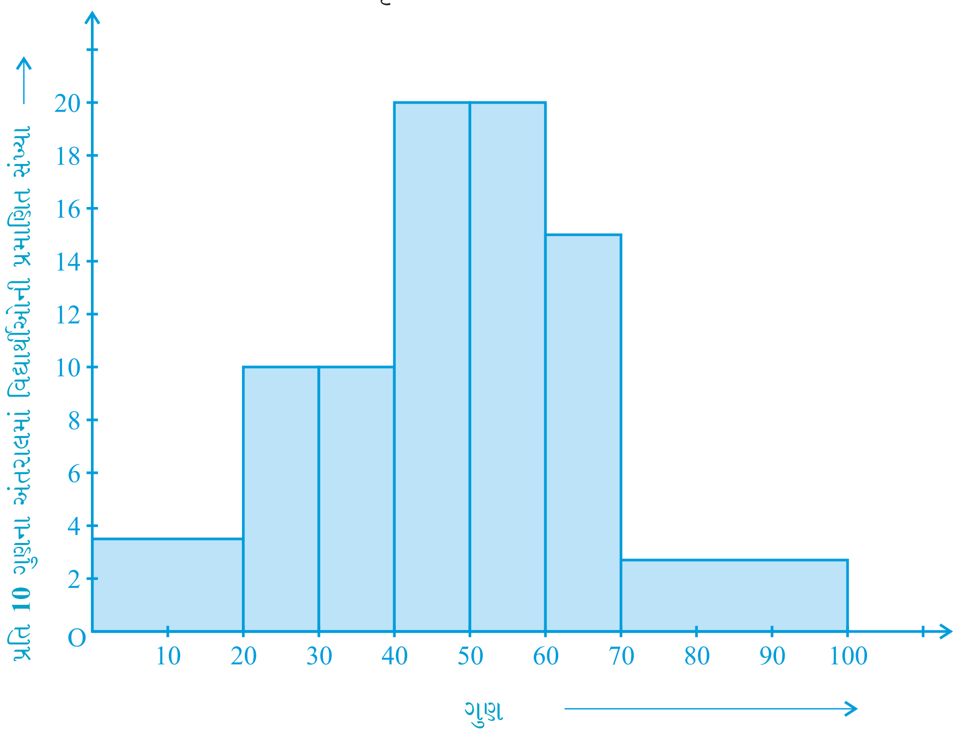
આ પ્રમાણે આગળ પ્રક્રિયા કરતાં આપણને નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક 14.8 મળશે :

કોષ્ટક 14.8

ગુણ	આવૃત્તિ	વર્ગલંબાઈ	લંબચોરસની લંબાઈ
0 - 20	7	20	$\frac{7}{20} \times 10 = 3.5$
20 - 30	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
30 - 40	10	10	$\frac{10}{10} \times 10 = 10$
40 - 50	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
50 - 60	20	10	$\frac{20}{10} \times 10 = 20$
60 - 70	15	10	$\frac{15}{10} \times 10 = 15$
70 - 100	8	30	$\frac{8}{30} \times 10 = 2.67$

આપણે આ દરેક વર્ગમાં વર્ગલંબાઈની ગણતરી 10 ગુણ પ્રમાણે કરેલી છે. તેથી આ લંબાઈઓને ''10 ગુણની વર્ગલંબાઈને અનુરૂપ વિદ્યાર્થીઓની સપ્રમાણ આવૃત્તિ'' (*proportional frequency*) કહીશું.

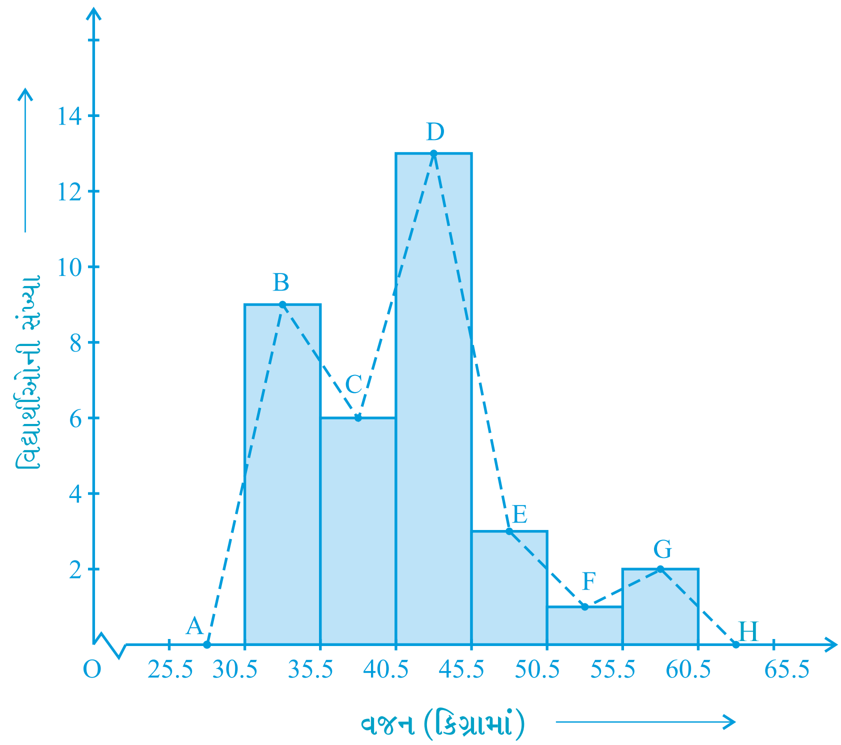
તેથી વિવિધ વર્ગલંબાઈવાળો સાચો સ્તંભાલેખ આકૃતિ 14.5 માં આપેલ છે.



આકૃતિ **14.5**

(C) આવૃત્તિ બહુકોણ

સંખ્યાત્મક માહિતી અને તેની આવૃત્તિને રજૂ કરવાની હજુ પણ એક અન્ય પદ્ધતિ છે. તે પદ્ધતિ આવૃત્તિ બહુકોણ છે. તેનો અર્થ સમજવા માટે ચાલો આપણે આકૃતિ 14.3 માં દર્શાવેલ સ્તંભાલેખને ધ્યાનમાં લઈએ. આ સ્તંભાલેખમાં પરસ્પર જોડાયેલા લંબચોરસની ઉપરની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને રેખાખંડ વડે જોડી દઈએ. તેને આપણે અનુક્રમે B, C, D, E, F અને G કહીએ. જ્યારે રેખાખંડોને આપણે જોડીએ ત્યારે આકૃતિ BCDEFG (જુઓ આકૃતિ 14.6.) મળે છે. આ આવૃત્તિ બહુકોણ પૂર્ણ કરવા માટે આપણે 30.5 - 35.5 નો પહેલાના સૈદ્ધાંતિક વર્ગ અને 55.5 - 60.5 ના પછીના સૈદ્ધાંતિક વર્ગની આવૃત્તિ શૂન્ય માની લઈએ અને તેમના મધ્યબિંદુને અનુક્રમે A અને H લઈએ. આકૃતિ 14.3 માં બતાવ્યા મુજબ આવૃત્તિને સંગત આવૃત્તિ બહુકોણ ABCDEFGH મળશે. તે આપણે આકૃતિ 14.6 માં બતાવ્યું છે.



આકૃતિ 14.6

જો કે સૌથી નાના વર્ગ પહેલાં અને સૌથી મોટા વર્ગ પછી કોઈ વર્ગ નથી. પરંતુ શૂન્ય આવૃત્તિવાળા બંને વર્ગને ઉમેરવાથી મળતા આવૃત્તિ બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ એ સ્તંભાલેખના ક્ષેત્રફળ જેટલું જ હોય છે. તમે તે બતાવી શકશો કે આવું કેમ બને ?

(**સૂચન :** એકરૂપ ત્રિકોણોની શરતોનો ઉપયોગ કરો.)

હવે એક પ્રશ્ન ઊભો થાય છે કે જ્યારે પ્રથમ વર્ગ પહેલાં કોઈ વર્ગ ન હોય તો આવૃત્તિ બહુકોણ કેવી રીતે પૂર્ણ કરીશું ? તે સમજવા માટે એક ઉદાહરણને જોઈએ.

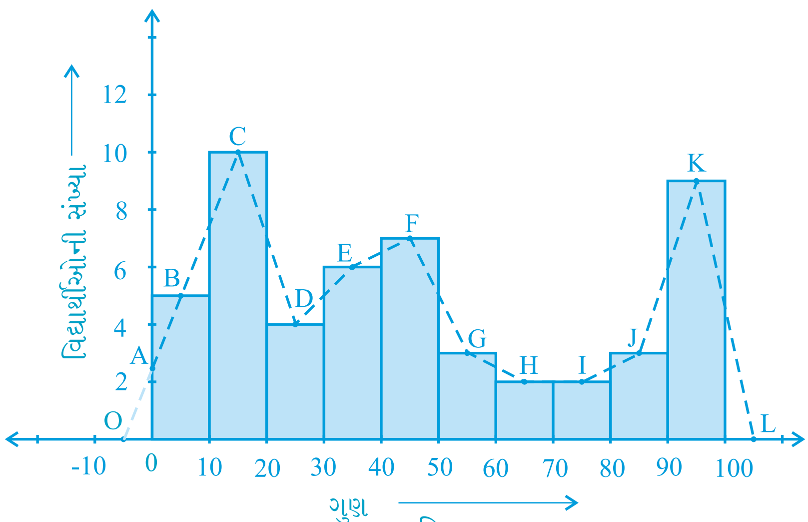
ઉદાહરણ 8 : કોઈ એક વર્ગના 51 વિદ્યાર્થીઓના 100 ગુણની કસોટીમાં મેળવેલા ગુણ આગળ પ્રમાણે કોષ્ટક 14.9 માં આપ્યા છે :

કોષ્ટક 14.9

ગુણ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	4
30 - 40	6
40 - 50	7
50 - 60	3
60 - 70	2
70 - 80	2
80 - 90	3
90 - 100	9
કુલ	**51**

ઉપર્યુક્ત આવૃત્તિ-વિતરણના કોષ્ટકને અનુરૂપ આવૃત્તિ બહુકોણ દોરો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી સ્તંભાલેખ દોરીએ અને લંબચોરસના ઉપરની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને અનુક્રમે B, C, D, E, F, G, H, I, J, K વડે દર્શાવીએ. અહીં પહેલો વર્ગ 0-10 છે. તેની આગળનો વર્ગ મેળવવા માટે સમક્ષિતિજ અક્ષને ઋણ દિશામાં લંબાવીને અને કાલ્પનિક વર્ગ (–10) - 0 નું મધ્યબિંદુ શોધો. પ્રથમ અંત્યબિંદુ એટલે કે B ને સમક્ષિતિજ અક્ષની ઋણ દિશામાં શૂન્ય આવૃત્તિવાળા વર્ગના મધ્યબિંદુ સાથે જોડવામાં આવે છે. તે શિરોલંબ અક્ષને જે બિંદુમાં છેદે તેને A વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ માહિતીના અંતિમ વર્ગની પછીના વર્ગનું મધ્યબિંદુ L માનીએ. આમ, આકૃતિ 4.7 માં દર્શાવ્યા મુજબ OABCDEFGHIJKL એ આવૃત્તિ બહુકોણ છે. તે આકૃતિ 14.7 માં દર્શાવાયો છે.



આકૃતિ 14.7

આવૃત્તિ બહુકોણને સ્તંભાલેખ દોર્યા સિવાય પણ સ્વતંત્ર રીતે દોરી શકાય છે. આ માટે માહિતીના દરેક વર્ગનાં મધ્યબિંદુઓની જરૂર

પડે છે. આ વર્ગોનાં મધ્યબિંદુઓને વર્ગની ***મધ્યકિંમત*** *(class-marks)* કહે છે.

વર્ગની મધ્યકિંમત શોધવા માટે વર્ગની અધ:સીમા અને ઊર્ધ્વસીમાનો સરવાળો કરી 2 વડે ભાગવામાં આવે છે.

$$\text{વર્ગની મધ્યકિંમત} = \frac{\text{ઊર્ધ્વસીમા} + \text{અધ:સીમા}}{2}$$

ચાલો એક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 9 : એક શહેરમાં જીવનનિર્વાહ-અંક (*cost of living index*) નો અભ્યાસ કરવા માટેનાં સાપ્તાહિક અવલોકનો નીચે કોષ્ટકમાં આપેલાં છે :

કોષ્ટક 14.10

જીવન નિર્વાહ અંક	સાપ્તાહિક સંખ્યા
140 - 150	5
150 - 160	10
160 - 170	20
170 - 180	9
180 - 190	6
190 - 200	2
કુલ	52

ઉપર્યુક્ત માહિતી માટે આવૃત્તિ બહુકોણ (સ્તંભાલેખ દોર્યા વગર) તૈયાર કરો.

ઉકેલ : સ્તંભાલેખ દોર્યા સિવાય આપણે આવૃત્તિ બહુકોણ દોરવા માટે ઉપર્યુક્ત વર્ગો 140 - 150, 150 - 160,.... ની મધ્યકિંમતો શોધીએ.

વર્ગ 140 - 150 માટે ઊર્ધ્વસીમા = 150 અને અધ:સીમા = 140

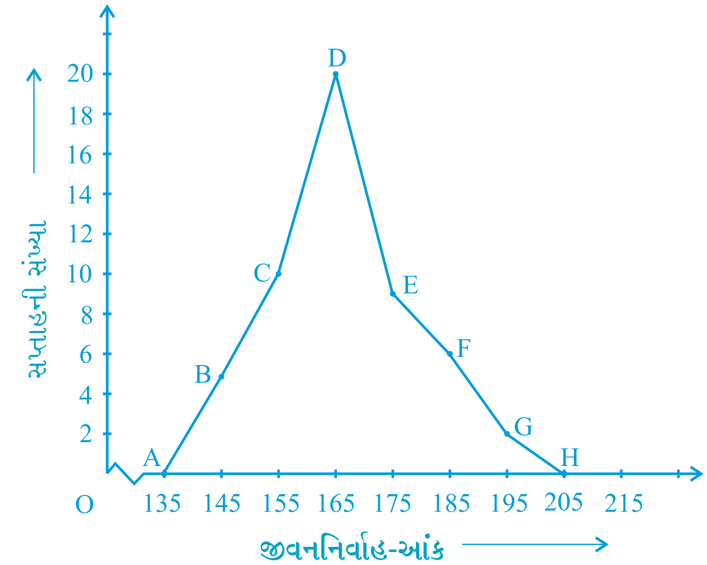
$$\text{વર્ગ મધ્યકિંમત} = \frac{150 + 140}{2} = \frac{290}{2} = 145.$$

આ રીતે આપણે બીજા વર્ગોની મધ્યકિંમતો શોધીએ. આમ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે નવું કોષ્ટક મળશે :

કોષ્ટક 14.11

વર્ગ	મધ્યકિંમત	આવૃત્તિ
140 - 150	145	5
150 - 160	155	10
160 - 170	165	20
170 - 180	175	9
180 - 190	185	6
190 - 200	195	2
કુલ		52

હવે આપણે મધ્યકિંમતોને સમક્ષિતિજ અક્ષ પર અને આવૃત્તિઓને શિરોલંબ અક્ષ પર મૂકીએ અને પછી તે બિંદુઓ B(145, 5), C(155, 10), D(165, 20), E(175, 9), F(185, 6) અને G(195, 2) ને આલેખી તેમને રેખાખંડથી જોડીએ. વર્ગ 130 - 140 (જે સૌથી નાના વર્ગ 140 - 150 ની બરાબર આગળનો વર્ગ) ના મધ્યબિંદુને સંગત શૂન્ય આવૃત્તિ એટલે કે A(135, 0) અને G(195, 2) ના તરત પછી આવતાં વર્ગ માટે બિંદુ H (205, 0) લેવાનું આપણે ભૂલીશું નહિ. તેના પરિણામે આવૃત્તિ બહુકોણ ABCDEFGH મળશે. (જુઓ આકૃતિ 14.8.)



આકૃતિ 14.8

જ્યારે માહિતી સતત અને ખૂબ જ મોટી હોય ત્યારે આવૃત્તિ બહુકોણનો ઉપયોગ થાય છે. એક જ લાક્ષણિકતા ધરાવતી બે જુદીજુદી માહિતીના સમૂહની સરખામણી કરવા માટે આ ખૂબ જ ઉપયોગી છે. ઉદાહરણ તરીકે એક જ વર્ગના બે જુદાજુદા વિભાગોના પ્રદર્શનની તુલના કરવા માટે આ આલેખ વધુ ઉપયોગી છે.

સ્વાધ્યાય 14.3

1. કોઈ એક સંસ્થા દ્વારા 15 થી 44 (વર્ષોમાં) વચ્ચેની વયવાળી સ્ત્રીની માંદગી અને મૃત્યુનાં કારણો શોધવા માટે કરવામાં આવેલ વિશ્વવ્યાપી સર્વેક્ષણના નીચે પ્રમાણેના આંકડા(% માં) મળ્યા હતા :

અ.નં.	કારણો	સ્ત્રી મૃત્યુદર (%)
1.	પ્રજનન સ્વાસ્થ્ય સ્થિતિ	31.8
2.	જ્ઞાનતંતુ સંગત મનોવિકાર	25.4
3.	ઈજાઓ	12.4
4.	હૃદય અને રક્તવાહિકા તંત્રની સ્થિતિ	4.3
5.	શ્વસનતંત્રની સ્થિતિ	4.1
6.	અન્ય કારણો	22.0

(i) ઉપર આપેલી માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત કરો.

(ii) વિશ્વમાં સ્ત્રીઓની માંદગી અને મૃત્યુ માટે કયું પરિબળ સૌથી વધુ કારણભૂત છે ?

(iii) તમારા શિક્ષકની મદદથી ઉપર (ii) માં દર્શાવ્યા સિવાયના અન્ય બે મુખ્ય પરિબળો શોધવાનો પ્રયત્ન કરો.

2. ભારતીય સમાજના વિવિધ વિભાગોમાં હજાર છોકરાઓ દીઠ છોકરીઓની સંખ્યાઓની (લગભગ 10 ના ગુણિતની નજીક) માહિતી નીચે પ્રમાણે છે :

વિભાગ	હજાર છોકરાઓ દીઠ છોકરીઓની સંખ્યા
અનુસૂચિત જાતિ (SC)	940
અનુસૂચિત જનજાતિ (ST)	970
બિન અનુસૂચિત જાતિ/અનુસૂચિત જનજાતિ	920
પછાત જિલ્લાઓ	950
બિન પછાત જિલ્લાઓ	920
ગ્રામ્ય	930
શહેર	910

(i) ઉપર્યુક્ત માહિતીને આધારે લંબાલેખ દોરો.

(ii) આલેખ પરથી કયા તારણ કાઢી શકાય તેની વર્ગમાં ચર્ચા કરો

3. એક રાજ્યની વિધાનસભાની ચૂંટણીમાં જુદાજુદા રાજકીય પક્ષોએ જીતેલી બેઠકો માટે મતદાનનું પરિણામ નીચે પ્રમાણે છે :

રાજકીય પક્ષો	A	B	C	D	E	F
જીતેલી બેઠકો	75	55	37	29	10	37

(i) મતદાનનાં પરિણામોને દર્શાવતો એક લંબાલેખ દોરો.

(ii) કયો રાજકીય પક્ષ સૌથી વધુ બેઠકો જીત્યો ?

4. એક છોડનાં 40 પાંદડાંની લંબાઈ મિલિમીટરમાં આપવામાં આવી છે અને તેનાથી મળતી માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે:

લંબાઈ (મિમી માં)	પાંદડાંની સંખ્યા
118 - 126	3
127 - 135	5
136 - 144	9
145 - 153	12
154 - 162	5
163 - 171	4
172 - 180	2

(i) આપેલી માહિતીનું નિરૂપણ કરતો એક સ્તંભાલેખ દોરો. [**સૂચન:** સૌપ્રથમ વર્ગોને સતત બનાવો.]

(ii) શું અન્ય રીતે આ માહિતીની આલેખાત્મક રજૂઆત થઈ શકે ?

(iii) 153 મિલિમીટર લંબાઈના પાંદડાની સંખ્યા સૌથી વધુ છે. શું આ તારણ સાચું છે ? કેમ ?

5. નીચેના કોષ્ટકમાં 400 નિયોન બલ્બનું આયુષ્ય આપેલું છે :

આયુષ્ય (કલાકમાં)	બલ્બની સંખ્યા
300 - 400	14
400 - 500	56
500 - 600	60
600 - 700	86
700 - 800	74
800 - 900	62
900 - 1000	48

(i) આપેલી માહિતીને સ્તંભાલેખની મદદથી દર્શાવો.

(ii) કેટલા બલ્બનું આયુષ્ય 700 કલાકથી વધુ છે ?

6. નીચેના કોષ્ટકમાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ અનુસાર તેમને બે વિભાગમાં વહેંચવામાં આવ્યા છે :

વિભાગ A		વિભાગ B	
ગુણ	આવૃત્તિ	ગુણ	આવૃત્તિ
0 - 10	3	0 - 10	5
10 - 20	9	10 - 20	19
20 - 30	17	20 - 30	15
30 - 40	12	30 - 40	10
40 - 50	9	40 - 50	1

બંને વિભાગોના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ એક જ આલેખમાં જુદાજુદા આવૃત્તિ બહુકોણ દ્વારા દર્શાવો. બંને આવૃત્તિ બહુકોણનો અભ્યાસ કરી બંને વિભાગના વિદ્યાર્થીના દેખાવની તુલના કરો.

7. એક ક્રિકેટ મૅચમાં બે ટીમો A અને B દ્વારા પ્રથમ 60 બૉલમાં કરેલા રનની માહિતી નીચે નોંધવામાં આવી છે :

બૉલની સંખ્યા	ટીમ A	ટીમ B
1 - 6	2	5
7 - 12	1	6
13 - 18	8	2
19 - 24	9	10
25 - 30	4	5
31 - 36	5	6
37 - 42	6	3
43 - 48	10	4
49 - 54	6	8
55 - 60	2	10

એક જ આલેખપત્ર પર બંને ટીમોની માહિતીને આવૃત્તિ બહુકોણની મદદથી દર્શાવો.

[**સૂચન :** સૌપ્રથમ વર્ગોને સતત બનાવો.]

8. એક બગીચામાં રમતાં જુદા-જુદા વય-જૂથનાં બાળકોની સંખ્યાનું યાદચ્છિક સર્વેક્ષણ કરવાથી નીચે પ્રમાણેની માહિતી પ્રાપ્ત થઈ.

ઉંમર (વર્ષમાં)	બાળકોની સંખ્યા
1 - 2	5
2 - 3	3
3 - 5	6
5 - 7	12
7 - 10	9
10 - 15	10
15 - 17	4

ઉપર્યુક્ત માહિતીને દર્શાવતો એક સ્તંભાલેખ દોરો.

9. એક સ્થાનિક ટેલિફોન ડિરેક્ટરીમાંથી યાદચ્છિક રીતે 100 અટક પસંદ કરવામાં આવી. તેમાંથી અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે પ્રમાણે પ્રાપ્ત થયું.

મૂળાક્ષરોની સંખ્યા	અટકની સંખ્યા
1 - 4	6
4 - 6	30
6 - 8	44
8 - 12	16
12 - 20	4

(i) આપેલી માહિતીનું નિરૂપણ કરતો સ્તંભાલેખ દોરો.

(ii) જે વર્ગમાં સૌથી વધુ સંખ્યામાં અટક છે તે વર્ગ શોધીને લખો.

14.5 મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપ *(Measures of Central Tendency)*

અત્યાર સુધીમાં આપણે આ પ્રકરણમાં આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક, લંબાલેખ, સ્તંભાલેખ અને આવૃત્તિ બહુકોણની મદદથી માહિતીને વિવિધ સ્વરૂપે રજૂ કરી છે. હવે એ પ્રશ્ન થાય કે શું માહિતીને અર્થપૂર્ણ બનાવવા માટે આપણે હંમેશાં બધી જ માહિતીનો અભ્યાસ કરવાની જરૂરિયાત પડે છે અથવા આ માહિતીનું ચોક્કસ પ્રતિનિધિત્વ કરે તેવી કેટલીક વિશેષતા શોધી શકીએ. મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપ (*measures of central tendency*) અથવા સરેરાશની મદદથી આ શક્ય છે.

જ્યારે બે વિદ્યાર્થીઓ મેરી અને હરિને તેમની ઉત્તરવહી આપવામાં આવી. ત્યારની પરિસ્થિતિને ધ્યાનમાં લઈએ. કસોટીમાં

દસ-દસ ગુણના પાંચ પ્રશ્નો હતા. તેમણે મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે હતા :

પ્રશ્નનો ક્રમ	1	2	3	4	5
મેરીના ગુણ	10	8	9	8	7
હરિના પ્રાપ્તાંક	4	7	10	10	10

મેળવેલી કસોટીની ઉત્તરવહીમાં બંનેના સરેરાશ ગુણ આ પ્રમાણે હતા.

$$\text{મેરીના સરેરાશ ગુણ} = \frac{42}{5} = 8.4$$

$$\text{હરિના સરેરાશ ગુણ} = \frac{41}{5} = 8.2$$

હરિના સરેરાશ ગુણ કરતાં મેરીના સરેરાશ ગુણ વધારે હોવાથી મેરીએ દાવો કર્યો કે હરિ કરતા તેનો દેખાવ સારો છે. પરંતુ હરિ તેનાથી સહમત ન થયો. તેણે બંનેના ગુણ ચઢતાં ક્રમમાં નીચે પ્રમાણે ગોઠવ્યા અને તેનાથી મધ્યના ગુણ શોધ્યા તે નીચે પ્રમાણે છે :

મેરીના સરેરાશ ગુણ	7	8	(8)	9	10
હરિના સરેરાશ ગુણ	4	7	(10)	10	10

હરિનું કહેવું છે કે તેના બરાબર મધ્યના ગુણ 10 હતા. તે મેરીના મધ્યના ગુણ 8 કરતાં વધારે છે. તેથી કસોટીમાં તેનો દેખાવ વધુ સારો ગણાવો જોઈએ.

પરંતુ મેરી તેમાં સહમત ન હતી. મેરીને મનાવવા હરિએ બીજી યુક્તિ અપનાવી. તેણે કહ્યું કે મેરીના ગુણ સાથે સરખાવતાં તેણે 10 ગુણ વધુ વખત (ત્રણ વખત) મેળવ્યા છે. જ્યારે મેરીએ 10 ગુણ એક જ વાર મેળવ્યા છે. તેથી તેનું પ્રદર્શન વધુ સારું ગણાય છે.

હવે હરિ અને મેરીના આ વિવાદને ઉકેલવા તેમના દ્વારા વપરાયેલા ત્રણે ય માપની પદ્ધતિ જોઈએ.

પ્રથમ કિસ્સામાં મેરીએ જે સરાસરી ગુણ મેળવ્યા તેને ***મધ્યક*** *(mean)* કહેવાય છે. હરિએ પોતાની દલીલમાં ઉપયોગ કર્યો અને મધ્યના ગુણ શોધ્યા, તે ***મધ્યસ્થ*** *(median)* છે અને પોતાની બીજી દલીલમાં હરિએ વધુ વખત મેળવેલા જે ગુણની વાત કહી છે તે ***બહુલક*** *(mode)* છે.

હવે આપણે પહેલા મધ્યક વિશે વિસ્તારથી ચર્ચા કરીએ.

બધાં જ અવલોકનોની કિંમતના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગતાં જે કિંમત મળે તેને અવલોકનોનો ***મધ્યક*** *(mean)* અથવા **સરેરાશ** કહે છે અને તેને સંકેતમાં $\overline{x}$ વડે દર્શાવાય છે અને તે 'x બાર' એમ વંચાય છે.

ચાલો આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 10 : 5 વ્યક્તિઓને પૂછવામાં આવ્યું કે તેમના સમાજમાં સામાજિક કાર્ય કરવા માટે એક અઠવાડિયામાં કેટલો સમય તેમણે ફાળવ્યો હતો. તેમણે કહ્યું અનુક્રમે 10, 7, 13, 20 અને 15 કલાક. તો એક અઠવાડિયામાં તેમના દ્વારા સામાજિક કાર્યમાં ફાળવેલા સમયનો મધ્યક શોધો.

ઉકેલ : આપણે અગાઉના ધોરણમાં અભ્યાસ કરી ગયા કે,

$$\text{મધ્યક} = \frac{\text{બધાં અવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની કુલ સંખ્યા}}$$

મધ્યક શોધવા માટેની પદ્ધતિ સરળ કરવા માટે ચાલો આપણે એક ચલ x_i લઈએ. અહીં, i એ અવલોકનનો ક્રમ છે. અહીં $i = 1$ થી 5 માંથી કોઈ પણ એક એટલે કે આપણું પહેલું અવલોકન x_1 બીજું અવલોકન x_2 અને તે રીતે પાંચમું અવલોકન x_5 થશે.

ઉપરાંત $x_1 = 10$ નો અર્થ એ થાય છે કે પહેલા અવલોકનનું મૂલ્ય 10 છે અને તેને x_1 વડે દર્શાવવામાં આવે છે. તેવી જ રીતે $x_2 = 7$, $x_3 = 13$, $x_4 = 20$ અને $x_5 = 15$ દર્શાવેલ છે.

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = \frac{\text{બધાં અવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$$

$$= \frac{10 + 7 + 13 + 20 + 15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

આથી 5 વ્યક્તિઓ દ્વારા સામાજિક કાર્ય કરવા માટે એક અઠવાડિયામાં ફાળવેલ સમયનો મધ્યક 13 કલાકનો હતો.

હવે 30 વ્યક્તિઓ દ્વારા સામાજિક કાર્યમાં ફાળવેલ સમયનો મધ્યક શોધવો છે તો આપણે $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ લખવું પડે. આ તો કઠિન કાર્ય છે. તેથી તે સરવાળાને સંક્ષિપ્તમાં દર્શાવવા ગ્રીક સંકેત Σ (સરવાળાનો સંકેત સીગ્મા) નો ઉપયોગ કરીએ છીએ. તેથી $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{30}$ને બદલે આપણે $\sum_{i=1}^{30} x_i$ લખીએ છીએ, જ્યાં i ની કિંમત 1 થી 30 સુધી વિસ્તરી છે, તેવો x_i નો સરવાળો છે એમ વાંચવામાં આવે છે.

તેથી,
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_i}{30}$$

આ પ્રમાણે n અવલોકનો માટે
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ઉદાહરણ 11 : એક શાળાના ધોરણ 9 ના 30 વિદ્યાર્થીઓએ ઉદાહરણ 2 માં આપેલા ગુણ પ્રમાણે મેળવેલા ગુણનો મધ્યક શોધો.

ઉકેલ :
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{30}}{30}$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 10 + 20 + 36 + 92 + 95 + 40 + 50 + 56 + 60 + 70 + 92 + 88$$

$$80 + 70 + 72 + 70 + 36 + 40 + 36 + 40 + 92 + 40 + 50 + 50$$

$$56 + 60 + 70 + 60 + 60 + 88 = 1779$$

$$\bar{x} = \frac{1779}{30} = 59.3$$

શું આ પ્રક્રિયા વધુ સમય નથી માંગી લેતી ? શું આ પ્રક્રિયાને સહેલી બનાવી શકાય ? નોંધો કે આપણી પાસે માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ કોષ્ટક છે. (જુઓ કોષ્ટક 14.1.)

આ કોષ્ટક દર્શાવે છે કે 1 વિદ્યાર્થીએ 10 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 1 વિદ્યાર્થીએ 20 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 3 વિદ્યાર્થીઓએ 36 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 4 વિદ્યાર્થીઓએ 40 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 3 વિદ્યાર્થીઓએ 50 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 2 વિદ્યાર્થીઓએ 56 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 4 વિદ્યાર્થીઓએ 60 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 4 વિદ્યાર્થીઓએ 70 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 1 વિદ્યાર્થીએ 72 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 1 વિદ્યાર્થીએ 80 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 2 વિદ્યાર્થીઓએ 88 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 3 વિદ્યાર્થીઓએ 92 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા. 1 વિદ્યાર્થીએ 95 ગુણ પ્રાપ્ત કર્યા હતા.

આથી મેળવેલા કુલ ગુણ $= (1 \times 10) + (1 \times 20) + (3 \times 36) + (4 \times 40) + (3 \times 50) + (2 \times 56)$
$+ (4 \times 60) + (4 \times 70) + (1 \times 72) + (1 \times 80) + (2 \times 88) + (3 \times 92)$
$+ (1 \times 95)$

$= f_1x_1 + \ldots + f_{13}x_{13}$, અહીં f_i એ કોષ્ટક 14.1 માં અવલોકનોની આવૃત્તિ છે.

ટૂંકમાં તેને $\sum_{i=1}^{13} f_ix_i$ રીતે લખી શકાય છે.

તેથી મેળવેલા કુલ ગુણ $= \sum_{i=1}^{13} f_ix_i$

$= 10 + 20 + 108 + 160 + 150 + 112 + 240 + 280 + 72 + 80 + 176 + 276 + 95$

$= 1779$

અવલોકનોની કુલ સંખ્યા $= \sum_{i=1}^{13} f_i$

$= f_1 + f_2 + \ldots + f_{13}$

$= 1 + 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 + 4 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1$

$= 30$

તેથી ,

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = \frac{\text{બધાં અવલોકનોનો સરવાળો}}{\text{અવલોકનોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{13} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{13} f_i} \right)$$

$$= \frac{1779}{30} = 59.3$$

આ પ્રક્રિયા નીચે બતાવેલા કોષ્ટકની રીતે દર્શાવી શકાય છે. તે કોષ્ટક 14.1 નું સુધારેલું સ્વરૂપ છે.

કોષ્ટક 14.12

ગુણ (x_i)	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા (f_i)	f_ix_i
10	1	10
20	1	20
36	3	108
40	4	160
50	3	150
56	2	112
60	4	240
70	4	280
72	1	72
80	1	80
88	2	176
92	3	276
95	1	95
	$\sum_{i=1}^{13} f_i = 30$	$\sum_{i=1}^{13} f_ix_i = 1779$

આમ અવર્ગીકૃત આવૃત્તિ-વિતરણમાં તમે મધ્યક શોધવા માટે નીચે આપેલા સૂત્રનો ઉપયોગ કરી શકો :

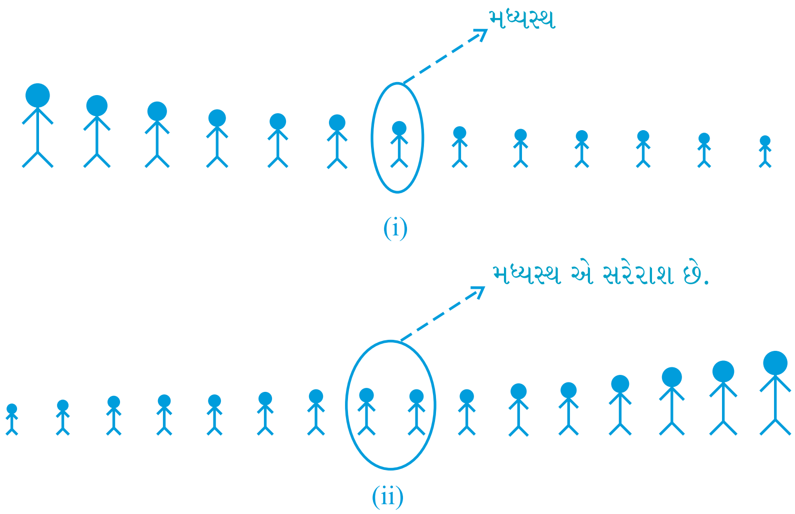
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

ચાલો હવે આપણે હરિ અને મેરીની વચ્ચે થયેલી દલીલ પર પાછા ફરીએ અને બીજી સ્થિતિ પર વિચાર કરીએ. તેમાં હરિએ મધ્યનું મૂલ્ય વધુ મેળવી તેનો શ્રેષ્ઠ દેખાવ બતાવવાનો પ્રયત્ન કર્યો હતો. અગાઉ કહેવામાં આવ્યું છે કે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના આ માપને ***મધ્યસ્થ*** કહેવામાં આવે છે.

જે આપેલ અવલોકનોનું બરાબર બે સમાન ભાગોમાં વિભાજન કરે તેવા અવલોકનનું મૂલ્ય મધ્યસ્થ છે. તેથી જ્યારે માહિતીને ચઢતા કે ઊતરતાં ક્રમમાં લખવામાં આવે ત્યારે અવર્ગીકૃત માહિતીના મધ્યસ્થની ગણતરી નીચે પ્રમાણે કરી શકાય છે :

(i) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા (n) અયુગ્મ હોય છે ત્યારે મધ્યસ્થ એ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ માં અવલોકનનું મૂલ્ય છે. ઉદાહરણ તરીકે, જો $n = 13$ હોય, તો મધ્યસ્થ મૂલ્ય $\left(\frac{13+1}{2}\right)$ થાય એટલે કે, 7 મું અવલોકન મધ્યસ્થ થશે. [જુઓ આકૃતિ 14.9 (i).]

(ii) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા (n) યુગ્મ હોય છે ત્યારે મધ્યસ્થ એ $\left(\frac{n}{2}\right)$ માં અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ માં અવલોકનોનાં મૂલ્યની સરેરાશ છે. ઉદાહરણ તરીકે, જો $n = 16$ હોય, તો મધ્યસ્થ $\left(\frac{16}{2}\right)$ માં અને $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ માં અવલોકનોના મૂલ્યની સરેરાશ થાય છે. એટલે કે 8 માં અને 9 માં અવલોકનનાં મૂલ્યની સરેરાશ એ મધ્યસ્થ થશે.[જુઓ આકૃતિ 14.9 (ii).]



આકૃતિ 14.9

ચાલો હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણની મદદથી તેને સમજીએ.

ઉદાહરણ 12 : એક વર્ગના 9 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ (સેમીમાં) આ પ્રમાણે છે :

155 160 145 149 150 147 152 144 148

આ માહિતીનો મધ્યસ્થ શોધો.

ઉકેલ : સૌપ્રથમ આપણે માહિતીને ચઢતા ક્રમમાં આ પ્રમાણે ગોઠવીએ :

144 145 147 148 149 150 152 155 160

વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 9 છે એટલે કે અયુગ્મ સંખ્યા છે. તેથી ઊંચાઈનો મધ્યસ્થ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ મું અવલોકન

$= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ મું અવલોકન

$= 5$ મું અવલોકન

$= 149$ સેમી

તેથી ઊંચાઈનો મધ્યસ્થ 149 સેમી છે.

ઉદાહરણ 13 : કબડ્ડીની એક ટીમ દ્વારા મૅચની શૃંખલામાં મળેલા અંક આ પ્રમાણે છે :

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

આ ટીમ દ્વારા મેળવેલા અંકોનો મધ્યસ્થ શોધો.

ઉકેલ : ટીમ દ્વારા મેળવેલા અંકોને ચઢતાં ક્રમમાં ગોઠવવાથી આ પ્રમાણે મળશે :

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

અહીં અવલોકનોની સંખ્યા 16 છે. તેથી બે મધ્યમ પદ છે. તે $\frac{16}{2}$ મું પદ અને $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ મું પદ એટલે કે, 8 મું પદ અને 9 મું પદ છે.

હવે 8 માં પદ અને 9 માં પદની સરેરાશ જ મધ્યસ્થ થશે.

$$\text{મધ્યસ્થ} = \frac{10+14}{2} = 12$$

આમ કબડ્ડીની ટીમ દ્વારા મેળવેલા અંકોનો મધ્યસ્થ 12 થશે.

હવે ફરીથી હરિ અને મેરીની વચ્ચેના વણઉકલ્યા પ્રશ્ન પર પાછા જઈએ. સરાસરી મેળવવા હરિએ લીધેલું ત્રીજું મૂલ્ય ***બહુલક** (mode)* હતું.

મહત્તમ વખત પુનરાવર્તિત થતાં અવલોકનોનું મૂલ્ય એ બહુલક છે એટલે કે સૌથી વધુ આવૃત્તિ ધરાવતાં અવલોકનોને બહુલક કહે છે.

તૈયાર વસ્ત્રોના ઉદ્યોગ અને પગરખા ઉદ્યોગ આ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનના માપનો ખૂબ જ ઉપયોગ કરે છે. બહુલક વિશેના જ્ઞાનની મદદથી ઉદ્યોગો નિર્ણય લઈ શકે છે કે કયાં માપનું ઉત્પાદન વધુ સંખ્યામાં કરવું જોઈએ.

તો ચાલો આપણે બહુલકને એક ઉદાહરણ દ્વારા સમજીએ.

ઉદાહરણ14 : 20 વિદ્યાર્થીઓએ 10 માંથી મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે છે. તો બહુલક શોધો :

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

ઉકેલ : આપણે માહિતીને નીચે પ્રમાણે ગોઠવીએ :

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10

અહીં 9 સૌથી વધુ વખત એટલે કે 4 વખત પુનરાવર્તન પામે છે તેથી બહુલક 9 છે.

ઉદાહરણ 15 : એક કારખાનાનાં એક એકમમાં 1 સુપરવાઈઝર અને 4 મજૂરો એમ 5 વ્યક્તિ કામ કરે છે. દરેક મજૂરને માસિક પગાર ₹ 5000, સુપરવાઈઝરનો માસિક પગાર ₹ 15,000 મળે છે, તો કારખાનાના આ એકમના પગારનો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

ઉકેલ : $\text{મધ્યક} = \frac{5000+5000+5000+5000+15000}{5} = \frac{35000}{5} = 7000$

તેથી પગારનો મધ્યક ₹ 7000 પ્રતિમાસ થશે.

મધ્યસ્થ શોધવા માટે પગારને આપણ ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવતા :

5000, 5000, 5000, 5000, 15000

કારખાનાના એકમમાં કામ કરતા સભ્યો 5 છે,

મધ્યસ્થ $= \left(\frac{5+1}{2}\right)$ મું અવલોકન

$= \frac{6}{2}$ મું અવલોકન

= 3 જું અવલોકન

= ₹ 5000 પ્રતિમાસ

તેથી પગારનો મધ્યસ્થ ₹ 5000 પ્રતિમાસ થાય. પગારનો બહુલક શોધવા એટલે કે બહુલકીય પગાર શોધવા આપણે જોઈએ છીએ કે આપેલી માહિતી 5000, 5000, 5000, 5000, 15000 માં સૌથી વધુ વખત 5000 પુનરાવર્તન થાય છે. તેથી બહુલકીય પગાર ₹ 5000 પ્રતિમાસ છે.

હવે ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં માહિતીના શોધેલા મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં ત્રણ મૂલ્યોની તુલના કરો. તો તમે જોઈ શકો છો કે મધ્યક ₹ 7000 એ પગારનો કોઈ યોગ્ય અંદાજ દર્શાવતો નથી. જ્યારે મધ્યસ્થ અને બહુલક ₹ 5000 એ માહિતીનું વધુ અસરકારક રીતે નિરૂપણ કરે છે.

માહિતીના સૌથી મોટા તથા નાના અવલોકનની અસર મધ્યક પર ખૂબ જ પ્રબળ હોય છે. તેથી જો માહિતીમાં કેટલાંક અવલોકનો વચ્ચેનું અંતર વધારે હોય (જેમ કે 1,7,8,9,9) તો આ સ્થિતિમાં માહિતીનો મધ્યક તે સારી રજૂઆત નથી. જ્યારે સૌથી મોટા તથા નાના અવલોકનની મધ્યસ્થ અને બહુલક પર અસર થતી નથી. તેથી આ પરિસ્થિતિમાં તે માહિતીની મધ્યવર્તી સ્થિતીનો વધુ સારો અંદાજ આપી શકે છે.

ચાલો ફરીથી હરિ અને મેરીનાં ઉદાહરણો લઈએ અને મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપની તુલના કરીએ.

મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં માપ	હરિ	મેરી
મધ્યક	8.2	8.4
મધ્યસ્થ	10	8
બહુલક	10	8

આ સરખામણી દર્શાવે છે કે, મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં આ ત્રણ માપ દ્વારા કયો વિદ્યાર્થી વધુ સારો છે તે દર્શાવવા માટે પૂરતા નથી. તારણ કાઢવા માટે આપણે કેટલીક વધુ જાણકારી મેળવવી જરૂરી છે. તેનો અભ્યાસ તમે ઉપલા ધોરણમાં કરશો.

સ્વાધ્યાય 14.4

1. એક ટીમે એક શ્રેણીની 10 મૅચમાં કરેલા ગોલની સંખ્યા નીચે મુજબ છે :

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3

તો ગોલનો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

2. ગણિતની કસોટીમાં 15 વિદ્યાર્થીઓએ 100 માંથી મેળવેલા ગુણ નીચે પ્રમાણે નોંધાયેલા છે :

41, 39, 48, 52, 46, 62, 54, 40, 96, 52, 98, 40, 42, 52, 60

આ માહિતીનો મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.

3. નીચેનાં અવલોકનો ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવેલા છે. જો માહિતીનો મધ્યસ્થ 63 હોય, તો x નું મૂલ્ય શોધો.

$$29, \quad 32, \quad 48, \quad 50, \quad x, \quad x+2, \quad 72, \quad 78, \quad 84, \quad 95$$

4. માહિતી 14, 25, 14, 28, 18, 17, 18, 14, 23, 22, 14, 18 નો બહુલક શોધો.

5. નીચેના કોષ્ટકમાંથી એક ફેક્ટરીમાં કામ કરતા 60 કર્મીઓના પગારનો મધ્યક શોધો.

પગાર (₹ માં)	કર્મીઓની સંખ્યા
3000	16
4000	12
5000	10
6000	8
7000	6
8000	4
9000	3
10000	1
કુલ	**60**

6. નીચે આપેલી માહિતી આધારિત એક ઉદાહરણ આપો :

(i) મધ્યક જ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું યોગ્ય માપ છે.

(ii) મધ્યક એ મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનું યોગ્ય માપ નથી. પરંતુ મધ્યસ્થ જ એક યોગ્ય માપ છે.

14.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દા શીખ્યા :

1. જો કોઈ ચોક્કસ હેતુ માટે હકીકતો અથવા આંકડાઓ એકત્ર કરવામાં આવે તો તેને માહિતી કહે છે.

2. આંકડાશાસ્ત્ર એ માહિતીની રજૂઆત, વિશ્લેષણ અને તેના અર્થઘટન સાથે સંકળાયેલા અભ્યાસનું ક્ષેત્ર છે.

3. માહિતીની લંબાલેખ, સ્તંભાલેખ કે આવૃત્તિ બહુકોણના સ્વરૂપમાં આલેખાત્મક રજૂઆત કેવી રીતે થાય.

4. અવર્ગીકૃત માહિતી માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનનાં ત્રણ માપ છે :

(i) મધ્યક : બધાં જ અવલોકનોની કિંમતના સરવાળાને અવલોકનોની કુલ સંખ્યા વડે ભાગતાં મળે તે સંખ્યાને $\overline{x}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

અવર્ગીકૃત માહિતી માટે $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}.$$

(ii) મધ્યસ્થ : તે બરાબર મધ્યમાં આવતાં અવલોકનનું મૂલ્ય છે.

જો n અયુગ્મ સંખ્યા હોય, તો મધ્યસ્થ = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$માં અવલોકનનું મૂલ્ય.

જો n યુગ્મ સંખ્યા હોય તો મધ્યસ્થ = $\left(\frac{n}{2}\right)$ માં અને $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ માં અવલોકનોની કિંમતની સરેરાશ

(iii) બહુલક : સૌથી વધુ વખત પુનરાવર્તન પામતું અવલોકન માહિતીનો બહુલક છે.

પ્રકરણ 15

સંભાવના

It is remarkable that a science, which began with the consideration of games of chance, should be elevated to the rank of the most important subject of human knowledge.—***Pierre Simon Laplace***

15.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે રોજબરોજના જીવનમાં નીચેનાં જેવાં વાક્યોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ :

(1) આજે વરસાદ આવવાની સંભાવના છે.

(2) તે પરીક્ષામાં પાસ થશે તેની મને શંકા છે.

(3) વાર્ષિક પરીક્ષામાં કવિતા પ્રથમ આવે તેવી પ્રબળ સંભાવના છે.

(4) ડીઝલના ભાવ વધે તેવી શક્યતા વધારે છે.

(5) આજની મૅચમાં ભારત ટૉસ જીતે તેવી શક્યતા 50-50 છે.

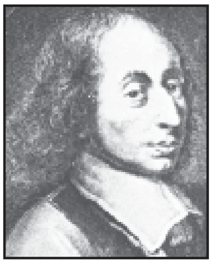
ઉપરનાં વાક્યોમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલા શબ્દો સંભાવના, શંકા, શક્યતા વગેરે અચોક્કસતાનાં પરિમાણ દર્શાવે છે. ઉદાહરણ તરીકે (1) માં 'વરસાદ આવવાની સંભાવના' નો અર્થ આજે વરસાદ આવે પણ ખરો અને વરસાદ ન પણ આવે. આ વરસાદ આવવાનું પૂર્વાનુમાન એ આપણા ભૂતકાળના અનુભવોમાં આવી પરિસ્થિતિમાં વરસાદ પડ્યો હતો, તેને ધ્યાનમાં લઈને કરવામાં આવેલ છે. તેવાં જ અનુમાન (2) થી (5) માં દર્શાવેલા છે.

શક્યતાઓની અચોક્કસતાનું માપ ઘણીબધી સ્થિતિમાં માપી શકાય છે.

રમતના સિદ્ધાંતોમાંથી શરૂ થયેલું સંભાવનાશાસ્ત્ર, ભૌતિકવિજ્ઞાન, વિનયન, જીવવિજ્ઞાન, તબીબીવિજ્ઞાન, હવામાનની આગાહી કરનાર ખાતા વગેરે શાખાઓમાં વિસ્તરેલું છે અને દરેક શાખામાં ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

15.2 સંભાવના - એક પ્રાયોગિક અભિગમ

અગાઉના ધોરણમાં આપણે સિક્કો ઉછાળવાની રમત, પાસો ફેંકવાની રમત વગેરેમાં શક્યતા(સંભાવના)ની કલ્પના તો કરી જ છે અને તેનાં પરિણામો જોયાં છે. હવે આપણે પ્રયોગમાં કોઈ ચોક્કસ પરિણામની શક્યતા કેટલી છે તે શીખીશું.



Blaise Pascal
(1623–1662)
આકૃતિ 15.1

The concept of probability was developed in a very strange manner. In 1654, a gambler Chevalier de Mere, approached the well-known 17th century French philosopher and mathematician Blaise Pascal regarding certain dice problems. Pascal became interested in these problems, studied them and discussed them with another French mathematician, Pierre de Fermat. Both Pascal and Fermat solved the problems independently. This work was the beginning of Probability Theory.

Pierre de Fermat
(1601–1665)
આકૃતિ 15.2

The first book on the subject was written by the Italian mathematician, J.Cardan (1501–1576). The title of the book was 'Book on Games of Chance' (Liber de Ludo Aleae), published in 1663. Notable contributions were also made by mathematicians J. Bernoulli (1654–1705), P. Laplace (1749–1827), A.A. Markov (1856–1922) and A.N. Kolmogorov (1903-1987).

પ્રવૃત્તિ 1 : (i) કોઈ એક સિક્કો લો. તેને દસ વખત ઉછાળો અને તેની ઉપર ***છાપ*** *(head)* અને ***કાંટો*** *(tail)* કેટલી વખત આવે છે તે નોંધો. નીચેના કોષ્ટકમાં અવલોકનો નોંધો :

કોષ્ટક 15.1

સિક્કો ઉછાળવાના કુલ પ્રયત્નો	સિક્કાની ઉપરની બાજુ છાપ (H) આવે તે પ્રયત્નોની સંખ્યા	સિક્કાની ઉપરની બાજુ કાંટો (T) આવે તે પ્રયત્નોની સંખ્યા
10	—	—

ઉપરનાં અવલોકનો પરથી નીચે આપેલ સૂત્ર પ્રમાણે ગણતરી કરો :

$$\frac{\text{સિક્કાની ઉપરની બાજુ છાપ આવે તે સંખ્યા}}{\text{સિક્કાને ઉછાળવાના કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

અને

$$\frac{\text{સિક્કાની ઉપરની બાજુ કાંટો આવે તે સંખ્યા}}{\text{સિક્કાને ઉછાળવાના કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

(ii) હવે સિક્કો વીસ વખત ઉછાળો અને ઉપરની રીતે જ અવલોકનોની નોંધ કરો અને ફરીથી ઉપરના અવલોકનોના સમૂહ માટે ગુણોત્તરની કિંમતો શોધો.

(iii) આ જ રીતે સિક્કાને વધુ વખત ઉછાળવાના પ્રયોગનું પુનરાવર્તન કરો. સિક્કાની ઉપરની બાજુ આવતી છાપ અને કાંટાની સંખ્યા નોંધો અને તેમના આનુષંગિક ગુણોત્તર શોધો.

તમે નોંધશો કે જેમ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયત્નો વધુ તેમ ગુણોત્તરની કિંમત 0.5 ની નજીક અને નજીક આવતી જશે. સિક્કાને વધુ વખત ઉછાળવાના પ્રયોગોની નોંધ કરતાં જાવ. નીચેની પ્રવૃત્તિ પણ જૂથમાં કરી શકાય તેવી છે.

પ્રવૃત્તિ 2 : વર્ગમાં 2 અથવા 3 વિદ્યાર્થીઓના જૂથ પાડો. દરેક જૂથમાં એક વિદ્યાર્થી 15 વખત સિક્કો ઉછાળે છે. જૂથના બીજા વિદ્યાર્થી સિક્કા પર છાપ કે કાંટો આવે તે અવલોકનો નોંધશે. [યાદ રાખો કે દરેક જૂથમાં સિક્કો સમતોલ હોવો જોઈએ. દરેક જૂથમાં એક જ સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે તેમ માનો.]

હવે પાટિયા પર કોષ્ટક 15.2 તૈયાર કરો. પહેલું જૂથ-1 તેમનાં અવલોકનો લખશે અને ગુણોત્તરની કિંમત શોધી કાઢશે. પછી જૂથ-2 તેમનાં અવલોકનો લખશે. તેઓ જૂથ-1 અને જૂથ-2 નો સંયુક્ત ગુણોત્તર શોધશે. આ જ રીતે પુનરાવર્તન થતું રહેશે. [આપણે આ ગુણોત્તરને ***સંચયી*** ગુણોત્તર *(cumulative fractions)* કહીશું.] આપણે નોંધીએ કે પ્રથમ ત્રણ હાર એ આ જૂથે આપેલ અવલોકનોના આધારે છે.

કોષ્ટક 15.2

જૂથ (1)	છાપની સંખ્યા (2)	કાંટાની સંખ્યા (3)	$\frac{\text{છાપની સંચયી સંખ્યા}}{\text{સિક્કો ઉછાળવાની કુલ સંખ્યા}}$ (4)	$\frac{\text{કાંટાની સંચયી સંખ્યા}}{\text{સિક્કો ઉછાળવાની કુલ સંખ્યા}}$ (5)
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15} = \frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15} = \frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30} = \frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30} = \frac{28}{45}$
4	⋮	⋮	⋮	⋮

આ કોષ્ટકમાં આપણે શું જોયું ? આપણે શોધી કાઢ્યું કે જેમજેમ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા વધે છે તેમ તેમ સ્તંભ (4) અને સ્તંભ (5) માં આવેલ ગુણોત્તર 0.5 ની નજીક અને વધુ નજીક આવે છે.

પ્રવૃત્તિ 3 : (i) એક પાસો 20 વખત ફેંકો અને અંક 1, 2, 3, 4, 5, 6 કેટલી વખત ઉપર દેખાય છે તે નોંધો. આ અવલોકનો કોષ્ટક 15.3 માં દર્શાવો :

કોષ્ટક 15.3

પાસો ફેંકવાની સંખ્યા	પાસા પર મળતા અંકોની સંખ્યા					
	1	2	3	4	5	6
20						

નીચેના ગુણોત્તરની કિંમત શોધો :

* એક સમતોલ પાસાને છ બાજુઓ હોય અને દરેક બાજુ પર 1 થી 6 અંક લખેલા હોય. એક બાજુ પર એક જ અંક હોય. કેટલાંક પાસામાં નંબરના બદલે ટપકાં કરેલાં હોય છે.

$$\frac{\text{પાસા પર અંક 1 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\frac{\text{પાસા પર અંક 2 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

⋮

$$\frac{\text{પાસા પર અંક 6 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

(ii) હવે સમતોલ પાસો 40 વખત ફેંકો અને અવલોકન નોંધો અને ઉપર પ્રમાણે ગુણોત્તર શોધો.

ઉપરની પ્રવૃત્તિમાં જેમ પાસો ફેંકવાની સંખ્યા વધશે તેમ આપણે દરેક ગુણોત્તરની કિંમત શોધીશું, તો તે $\frac{1}{6}$ ની નજીક અને નજીક આવતી જશે.

આ ચકાસવા માટે આપણે વર્ગમાં એક પ્રવૃત્તિ-2 જેવી જૂથ-પ્રવૃત્તિ કરીશું. વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને નાનાં નાનાં જૂથમાં વહેંચો. દરેક જૂથમાં એક વિદ્યાર્થી 10 વખત પાસો ઉછાળશે. અવલોકનો નોંધશે અને સંચયી ગુણોત્તરની ગણતરી થશે.

આપણે અંક 1 માટે ગુણોત્તરની કિંમત કોષ્ટક 15.4 માં નોંધીશું. આ કોષ્ટક બીજા પૂર્ણાંકો માટે પણ વિસ્તારી શકાય અથવા બીજા અંકો માટે આ જ પ્રકારના કોષ્ટક બનાવી શકાય.

કોષ્ટક 15.4

જૂથ (1)	પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા (2)	$\frac{\text{પાસા પર 1 આવે તે સંચયી સંખ્યા}}{\text{પાસા ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$ (3)
1	—	—
2	—	—
3	—	—
4	—	—

દરેક જૂથમાં ઉપયોગમાં લેવાતો પાસો એ સમાન કદ અને દેખાવનો હોય તે જરૂરી છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે દરેક જૂથમાં ફેંકાયેલો પાસો એ એકનો એક જ છે.

આ કોષ્ટકમાં આપણે શું જોયું ?

જેમ પાસો ફેંકવાની સંખ્યા વધુ ને વધુ, તેમ સ્તંભ (3) માંનો ગુણોત્તર $\frac{1}{6}$ ની નજીક અને નજીક જશે.

પ્રવૃત્તિ 4 : (i) બે સિક્કાઓ એક સાથે દસ વખત ઉછાળો અને નીચે આપેલ કોષ્ટકના સ્વરૂપમાં અવલોકનોની નોંધ કરો :

કોષ્ટક 15.5

બે સિક્કાઓ ઉછાળવાની સંખ્યા	સિક્કા પર છાપ ન આવવાની સંખ્યા	સિક્કા પર એક છાપ આવવાની સંખ્યા	સિક્કા પર બે છાપ આવવાની સંખ્યા
10	—	—	—

નીચેના ગુણોત્તરો લખો :

$$A = \frac{\text{સિક્કા પર છાપ ન આવવાની સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

$$B = \frac{\text{સિક્કા પર એક છાપ આવવાની સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

$$C = \frac{\text{સિક્કા પર બે છાપ આવવાની સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

આ ગુણોત્તરની કિંમતો શોધો.

જો સિક્કા ઉછાળવાની સંખ્યા (પ્રવૃત્તિ 2 પ્રમાણે) તમે વધારતાં જશો તો, જેમ સિક્કો ઉછાળવાની સંખ્યા વધે છે તેમ તમે A, B અને C ની કિંમતો અનુક્રમે 0.25, 0.5, 0.25 ની વધુ ને વધુ નજીક જતાં જશો.

પ્રવૃત્તિ 1 માં, સિક્કાને ઉછાળવાના દરેક પ્રયોગને ***પ્રયત્ન** (trial)* કહે છે. તે જ પ્રમાણે પ્રવૃત્તિ 3 માં પાસા ઉછાળવાના દરેક પ્રયોગને પ્રયત્ન કહે છે અને પ્રવૃત્તિ 4 માં બે સિક્કાને ઉછાળવા તે પણ પ્રયત્ન છે.

આમ, જેમાં એક કે તેથી વધુ પરિણામ મળી શકે એવી દરેક ક્રિયા પ્રયત્ન છે. તેવી પ્રવૃત્તિ 1 માં શક્ય પરિણામો છાપ અને કાંટો હતા, જ્યારે પ્રવૃત્તિ 3 માં શક્ય પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 હતાં.

પ્રવૃત્તિ 1 માં સિક્કાને ઉછાળતાં છાપ આવવી એ ઘટનામાં છાપ એ પરિણામ છે. તે જ પ્રમાણે કાંટો મેળવવાની ઘટનામાં કાંટો એ પરિણામ છે. પ્રવૃત્તિ 2 માં કોઈ એક ચોક્કસ અંક મેળવવો જેમકે 1. તે ઘટનામાં અંક 1 એ પરિણામ છે.

આપણા પ્રયોગમાં યુગ્મ સંખ્યા મેળવવાની ઘટનામાં પાસાને ઉછાળતાં મળતાં પરિણામો 2, 4 અને 6 છે.

તેથી પ્રયોગ માટેની ***ઘટના*** *(event)* એ પ્રયોગનાં કેટલાંક પરિણામોનું એકત્રીકરણ છે. ધોરણ 10 માં તમે ઘટનાની વધુ સારી વિસ્તૃત વ્યાખ્યા સમજશો.

હવે તમે પ્રવૃત્તિ 4 માં ઘટના કઈ છે તે કહી શકશો ?

ઉપરની આ પૂર્વ ભૂમિકા સાથે આપણે જોઈએ કે સંભાવના શું છે ? અહીં આપણે પ્રયત્નોનાં પરિણામ સીધા જોઈ શકીએ છીએ.

આપણે *પ્રાયોગિક અથવા આનુભાવિક* સંભાવના શોધીશું.

ધારો કે કુલ પ્રયત્નો n છે. ઘટના E ઉદ્‌ભવે તેની પ્રાયોગિક સંભાવના P(E) વડે દર્શાવાય છે અને તે આ મુજબ છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના ઉદ્‌ભવે તે ઘટના માટેના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

આ પ્રકરણમાં આપણે પ્રાયોગિક સંભાવનાને બદલે સરળતા ખાતર ફક્ત ***સંભાવના*** *(probability)* જ લખીશું.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ચાલો પ્રવૃત્તિ 2 માં પાછા જઈને શરૂઆત કરીએ. કોષ્ટક 15.2 ના ચોથા સ્તંભમાં તમે ગણતરી દ્વારા કયો અપૂર્ણાંક શોધ્યો ? એ બીજુ કાંઈ નહિ પણ છાપ મેળવવાની પ્રાયોગિક સંભાવના છે. નોંધી રાખો કે પ્રયોગમાં કરવામાં આવતા કુલ પ્રયત્નો અને છાપ આવે તે પરિણામો પર સંભાવનાનું મૂલ્ય બદલાતું રહે છે. તે જ પ્રમાણે કાંટો મેળવવાની સંભાવનામાં કોષ્ટક 15.2 ના સ્તંભ (5) માં $\frac{12}{15}$ થી શરૂ થાય અને તે $\frac{2}{3}$, પછી $\frac{28}{45}$, અને આ રીતે આગળ વધશે.

આમ, પ્રાયોગિક સંભાવના એ તમે કરેલા પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા અને તમને તેના તે પ્રયત્નોમાં જે પરિણામ જોઈએ તેની સંખ્યા પર આધારિત છે.

પ્રવૃત્તિ 5 : આગળ વધતાં પહેલાં પ્રવૃત્તિ 3 કરતી વખતે તમે જે કોષ્ટક બનાવ્યું હતું તેની સામે નજર કરો. કેટલીક ચોક્કસ વખત પાસાને ઉછાળતાં પાસા પર અંક 3 મેળવવાની સંભાવના શોધો. જેમ તમે પ્રયત્નોની સંખ્યા વધારો છો તેમ તે સંભાવના કઈ રીતે બદલાય છે તે પણ જુઓ.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળતાં નીચેની આવૃત્તિઓ મળે છે :

છાપ : 455, કાંટો : 545

દરેક ઘટના માટે સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : અહીં સિક્કો 1000 વખત ઉછાળવામાં આવે છે માટે પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા 1000 થાય. સિક્કા પર છાપ મળે અને સિક્કા પર કાંટો મળે તે ઘટનાઓને અનુક્રમે E અને F કહીશું. ઘટના E ઉદ્‌ભવવાની સંખ્યા એટલે કે સિક્કા પર છાપ આવવાની સંખ્યા 455 છે.

$$\therefore \text{ E ની સંભાવના } = \frac{\text{સિક્કા પર છાપ આવવાની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\therefore \; P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

એ જ રીતે, સિક્કા પર કાંટો આવે તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{\text{સિક્કા પર કાંટો આવવાની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$

$$\therefore \; P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545$$

નોંધીએ કે ઉપરના દાખલામાં $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$, અહીં દરેક પ્રયત્નનાં શક્ય પરિણામો E અને F જ છે.

ઉદાહરણ 2 : બે સિક્કાઓ 500 વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને આપણને

બે વાર છાપ : 105 વખત મળે છે.

એક વાર છાપ : 275 વખત મળે છે.

એક પણ વાર છાપ ન મળે : 120 વખત બને છે.

આ દરેક ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : આપણે બે વખત છાપ મળે, એક વખત છાપ મળે અને એક પણ વખત છાપ ન મળે તે ઘટનાઓને અનુક્રમે E_1, E_2 અને E_3 વડે દર્શાવીએ. આમ,

$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$

$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$

$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

અહીં નોંધીએ કે $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$.

વળી, પ્રયત્નનાં શક્ય પરિણામો E_1, E_2 અને E_3 જ છે.

ઉદાહરણ 3 : એક પાસો 1000 વખત ફેંકવામાં આવે છે. પાસા પર 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 ની આવૃત્તિઓ કોષ્ટક 15.6 માં દર્શાવેલ છે :

કોષ્ટક 15.6

પરિણામ	1	2	3	4	5	6
આવૃત્તિ	179	150	157	149	175	190

દરેક પરિણામ આવવાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે E_i એ પરિણામ i આવવાની ઘટના છે, જ્યાં $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$$\text{પરિણામ } i \text{ મેળવવાની સંભાવના} = P(E_i) = \frac{i \text{ ની આવૃત્તિ}}{\text{પાસો ફેંકવાની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\therefore\ P(E_1) = \frac{179}{1000} = 0.179$$

તે જ રીતે $P(E_2) = \frac{150}{1000} = 0.15$, $P(E_3) = \frac{157}{1000} = 0.157$,

$P(E_4) = \frac{149}{1000} = 0.149$, $P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$

અને $P(E_6) = \frac{190}{1000} = 0.19$.

નોંધીએ કે $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$

એ પણ નોંધો કે :

(i) પ્રત્યેક ઘટનાની સંભાવના 0 અને 1 ની વચ્ચે આવેલી હોય છે.

(ii) બધી જ સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે.

(iii) ફક્ત $E_1, E_2, \ldots, E_6$ એ પ્રયત્નનાં શક્ય તેટલાં પરિણામ છે.

ઉદાહરણ 4 : ટેલિફોન ડિરેક્ટરીના એક પાના પર 200 ટેલિફોન નંબર હતા. તે નંબરમાં એકમના સ્થાનના અંકના આવૃત્તિ-વિતરણ (દાખલા તરીકે ટેલિફોન નંબર 25828573 નો એકમનો અંક 3 છે) માટેનું કોષ્ટક 15.7 આપેલ છે.

કોષ્ટક 15.7

એકમનો અંક	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
આવૃત્તિ	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

પાના પર જોયા સિવાય, કોઈ એક નંબર પસંદ કરવામાં આવે છે. એકમના સ્થાન પરનો અંક 6 હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ :

$$\text{એકમના સ્થાને અંક 6 હોય તે ઘટનાની સંભાવના} = \frac{\text{6 આવવાની આવૃત્તિ}}{\text{પસંદ કરેલ કુલ ટેલિફોન નંબરની સંખ્યા}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

તેવી જ રીતે તમે એકમના સ્થાને બીજા અંકો આવે તેની પ્રાયોગિક સંભાવના શોધી શકો.

ઉદાહરણ 5 : હવામાન ખાતાની કચેરી બતાવે છે કે છેલ્લા સળંગ 250 દિવસના તેમના હવામાનની આગાહી પૈકી 175 દિવસ તે સાચી પડી.

(i) તો આપેલ કોઈ એક દિવસે હવામાનની આગાહી સાચી પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) આપેલ કોઈ એક દિવસે હવામાનની આગાહી સાચી ન પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : હવામાનની આગાહી કરી હોય તે માટેના દિવસોની સંખ્યા = 250

(i) P(હવામાનની આગાહી સાચી પડી હોય તે દિવસોની સંખ્યા)

$$= \frac{\text{હવામાનની આગાહી સાચી પડી હોય તેવા દિવસોની કુલ સંખ્યા}}{\text{હવામાનની આગાહી કરેલ કુલ દિવસોની સંખ્યા}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) હવામાનની આગાહી સાચી પડી ન હોય તે દિવસોની સંખ્યા = 250 – 175 = 75

તેથી, P(હવામાનની આગાહી સાચી પડી ન હોય તે દિવસ) = $\frac{75}{250}$ = 0.3

નોંધો કે :

P(આગાહી સાચી પડી હોય) + P(આગાહી સાચી ન પડી હોય) = 0.7 + 0.3 = 1

ઉદાહરણ 6 : ટાયર બનાવતી એક કંપનીએ પોતાનું ટાયર બદલાવવાનું થાય તે પહેલાં કેટલું અંતર કાપે છે તેની નોંધ કરી છે. નીચેનું કોષ્ટક 1000 ટાયર વિશે પરિણામ દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 15.8

અંતર (કિમીમાં)	4000 કરતાં ઓછું	4000 થી 9000	9001 થી 14000	14000 થી વધુ
આવૃત્તિ	20	210	325	445

જો તમે આ કંપનીનું ટાયર ખરીદો તો :

(i) 4000 કિમી અંતર કાપતા પહેલાં ટાયર બદલવાની જરૂર પડી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) ટાયરે 9000 કિમીથી વધુ અંતર કાપ્યું હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(iii) ટાયર બદલવાની જરૂર 4000 કિમી અને 14,000 કિમી અંતર કાપ્યાની વચ્ચે પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : (i) પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા = 1000.

4000 કિમી અંતર કાપતાં પહેલાં ટાયર બદલવું પડે તેવા પ્રયત્નોની સંખ્યા = 20.

તેથી, P(4000 કિમી અંતર કાપ્યા પહેલાં ટાયર બદલવું પડે) = $\frac{20}{1000}$ = 0.02

(ii) 9000 કિમી અંતર કાપ્યા પછી ટાયર બદલવું પડે તેની આવૃત્તિ = 325 + 445 = 770

આથી, P(9000 કિમીથી વધુ અંતર ટાયરે કાપ્યું હોય) = $\frac{770}{1000}$ = 0.77

(iii) કાપેલ અંતર 4000 કિમી અને 14,000 કિમીની વચ્ચે હોય ત્યારે ટાયર બદલવું પડે તેની આવૃત્તિ = 210 + 325 = 535.

તેથી, P(4000 કિમીથી 14,000 કિમીની વચ્ચે ટાયર બદલવું પડે) = $\frac{535}{1000}$ = 0.535

ઉદાહરણ 7 : માસિક એકમ કસોટીમાં વિદ્યાર્થીએ મેળવેલ ગુણ ટકામાં નીચે મુજબ છે :

કોષ્ટક 15.9

એકમ કસોટી	I	II	III	IV	V
મેળવેલ ગુણ ટકામાં	69	71	73	68	74

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીએ એકમ કસોટીમાં 70 ટકાથી વધુ ટકા મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : અહીં વિદ્યાર્થીએ આપેલી એકમ કસોટીની કુલ સંખ્યા = 5

વિદ્યાર્થીએ 70 ટકાથી વધુ ટકા એકમ કસોટીમાં મેળવ્યા હોય તે કસોટીની સંખ્યા = 3.

તેથી, P(70 ટકાથી વધુ ગુણ મેળવ્યા હોય) = $\frac{3}{5}$ = 0.6

ઉદાહરણ 8 : કોઈ એક શહેરમાં કોઈ વીમા કંપનીએ યાદચ્છિક રીતે 2000 ડ્રાઈવરની પસંદગી કરી. તેમની ઉંમર અને તેમણે કરેલ અકસ્માત વચ્ચેનો સંબંધ શોધ્યો. તે માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

કોષ્ટક 15.10

ડ્રાઈવરની ઉંમર (વર્ષમાં)	એક વર્ષમાં કરેલ અકસ્માત				
	0	**1**	**2**	**3**	**3** થી વધુ
18 - 29	440	160	110	61	35
30 - 50	505	125	60	22	18
50 થી વધુ	360	45	35	15	9

શહેરમાં યાદ્ચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કોઈ એક ડ્રાઈવર માટે નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(i) ઉંમર 18-29 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં બરાબર 3 અકસ્માત કર્યા હોય.

(ii) ઉંમર 30-50 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં 1 કે તેથી વધુ અકસ્માત કર્યા હોય.

(iii) 1 વર્ષમાં એક પણ અકસ્માત ન કર્યા હોય.

ઉકેલ : ડ્રાઈવરની કુલ સંખ્યા = 2000.

(i) ઉંમર 18-29 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં બરાબર 3 અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવરોની સંખ્યા = 61.

તેથી, P (18-29 વર્ષની ઉંમર હોય અને 3 અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવર) = $\frac{61}{2000}$

$= 0.0305 \approx 0.031$

(ii) ડ્રાઈવરની ઉંમર 30-50 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં 1 કે તેથી વધુ અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવરોની સંખ્યા

$= 125 + 60 + 22 + 18 = 225$

માટે, P(30-50 વર્ષની ઉંમર અને 1 કે તેથી વધુ અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવર)

$= \frac{225}{2000} = 0.1125 \approx 0.113$

(iii) 1 વર્ષમાં એક પણ અકસ્માત ન કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવરોની સંખ્યા $= 440 + 505 + 360$

$= 1305$

તેથી, P(અકસ્માત ન કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવર) = $\frac{1305}{2000}$ = 0.653

ઉદાહરણ 9 : (કોષ્ટક 14.3, ઉદાહરણ 4, પ્રકરણ 14), આવૃત્તિ-વિતરણનું કોષ્ટક ધ્યાનમાં લો. તે 38 વિદ્યાર્થીઓનું વજન દર્શાવે છે.