1

समुच्चय सिद्धान्त
(Sets Theory)

1.01 प्रस्तावना (Introduction)

विश्व को भारतीय गणितज्ञों का सबसे बडा योगदान संख्याओं का आविष्कार, उनकी गणना तथा दशमलव पद्धति है। मूलतः संख्या ही गणित का आधार है। सबसे पहले गणना के अंक, जिसे प्राकृत संख्या कहते है, का आविष्कार हुआ। इसके क्रमित विस्तार से पूर्ण संख्याऐं, पूर्णांक, परिमेय एवं अपरिमेय संख्याऐं, वास्तविक संख्याऐं, संमिश्र संख्याऐं आयी। दशमलव पद्धति में भी सबसे अधिक महत्व शून्य का है। विज्ञान मे विशेषतः संगणक क्षेत्र में आज हो रही प्रगति की कल्पना भी शून्य के बिना नितान्त असम्भव है।

इस अध्याय की शुरूआत हम गणित की आधारभूत परिकल्पना, समुच्चय से करते है, जिसका प्रयोग गणित की प्रायः सभी शाखाओं में होता है। समुच्चय का प्रयोग हम आगे आने वाले अध्याय मे सम्बन्ध एवं फलन को परिभाषित करने के लिए भी करेंगे।

1.02 समुच्चय एवं उसका निरूपण (Set and its representation)

दैनिक जीवन में अनुभव किए जाने वाले कुछ संग्रहों पर विचार कीजिए–

(i) ताश की गड्डी।
(ii) क्रिकेट टीम।
(iii) भारत की नारियॉं।
(iv) कक्षा में लम्बे विद्यार्थी।
(v) प्राकृत संख्याओं का संग्रह।
(vi) वास्तविक संख्याओं का संग्रह।

इन संग्रहों मे (iv) को छोड कर अन्य सभी संग्रहों में हम निश्चित रूप से यह बताने में सक्षम है कि एक निश्चित वस्तु या अवयव इस संग्रह में हैं अथवा नहीं। परन्तु संग्रह (iv) में लम्बे होने का मापदण्ड अलग–अलग व्यक्तियों के लिए अलग–अलग हो सकता है। अतः यह संग्रह सुपरिभाषित नहीं है।

परिभाषा : वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते है।

यहां पर हमे निम्नलिखित बिन्दुओं पर ध्यान देना चाहिए–

(i) समुच्चय के लिए वस्तुऐं, अवयव तथा सदस्य पर्यायवाची शब्द है।
(ii) समुच्चय को प्रायः अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से निरूपित करते है, जैसे A,B,C,X,Y,Z इत्यादि।
(iii) समुच्चय के अवयवों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों द्वारा प्रदर्शित करते है, जैसे a,b,c,x,y,z इत्यादि।

यदि a समुच्चय A का सदस्य है, तो इसे प्रतीकात्मक रूप से $a \in A$ लिखते हैं तथा इसे 'a **सदस्य है** A **का**' पढ़ते है, यहॉं $\in$ (epsilon) यूनानी प्रतीक है। यदि b समुच्चय A का सदस्य नही है तो इसे $b \notin A$ लिखते है तथा 'b **सदस्य नहीं है** A **का**' पढ़ते है। उपरोक्त उदाहरणानुसार, $2 \in N,\ 1\cdot5 \notin N$.

समुच्चय का निरूपण (Representation of a set)

समुच्चय का निरूपण दो प्रकार से किया जाता है–

1. सारणीबद्ध या रोस्टर रूप (Tabular or Roster Form)
2. समुच्चय निर्माण रूप (Set Builder Form)

1. सारणीबद्ध या रोस्टर रूप

इस विधि में सभी अवयवों को अर्धविराम द्वारा पृथक करते हुए बिना पुनरावृति के, मझले कोष्टक के भीतर लिखते हैं। जैसे दस से छोटी विषम प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को A द्वारा प्रदर्शित किया जाय तो–

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ तथा यहॉं } 3 \in A \text{ परन्तु } 4 \notin A$$

इसी प्रकार $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ एवं $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

अन्य उदाहरण :

(i) 32 को विभाजित करने वाली सभी प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को $\{1,2,4,8,16,32\}$ से

(ii) सप्ताह के दिनों के समुच्चय को
{सोमवार, मंगलवार, बुधवार, गुरूवार, शुक्रवार, शनिवार, रविवार} से,

(iii) अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों के समुच्चय को {a,e,i,o,u} से

(iv) classroom में प्रयुक्त अक्षरों के समुच्चय को {c,l,a,s,r,o,m} से निरूपित करते हैं।

टिप्पणी : यह ध्यान रखना चाहिए कि समुच्चय के रोस्टर रूप में लिखते समय किसी अवयव को सामान्यतः दोबारा नहीं लिखते हैं जैसा की उदाहरण (iv) से स्पष्ट है।

2. समुच्चय निर्माण रूप

समुच्चय निर्माण रूप में मझले कोष्ठक के अन्दर अवयवों को सूचीबद्ध करने के बजाय उनके गुणधर्म को लिखा जाता है। उपरोक्त अन्य उदाहरण (i) के समुच्चय को निम्नानुसार निरूपित करेंगे–

{ x : x, 32 को विभाजित करने वाली प्राकृत संख्या है} यहाँ मझले कोष्ठक के अन्दर लिखें विवरण को 'x, **इस प्रकार है कि x, 32 को विभाजित करने वाली एक प्राकृत संख्या है**,' पढ़ते हैं।

इसी प्रकार N = {x : x एक प्राकृत संख्या है} एवं Z = { x : x एक पूर्णांक है}

निम्न सारणी में समुच्चयों को दोनो ही रूप में निरूपित किया गया है।

सारणीबद्ध या रोस्टर रूप	समुच्चय निर्माण रूप
{1,2,3,6,7,14,21,42}	{x : x, 42 को विभाजित करने वाली एक प्राकृत संख्या}
{1,4,9,16}	{x : x, 25 से छोटी एक पूर्ण वर्ग प्राकृत संख्या है}
{a,e,i,o,u}	{x : x अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है }
{s,c,h,o,l}	{x : x, school में प्रयुक्त एक अक्षर है }
{4,5,6,7,8,9}	{x : x एक प्राकृत संख्या है तथा $3 < x < 10$}

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: समुच्चय $A = \{x : x$ एक धन पूर्णांक हैं और $x^2 < 40\}$

हलः क्योंकि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 ऐसे पूर्णांक हैं जिनका वर्ग 40 से कम है। अतः अभीष्ट समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

उदाहरण 2: समुच्चय A = { 1, 4, 9, 16, 25, ... } को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

हलः यहाँ समुच्चय के अवयव सभी प्राकृत संख्याओं के वर्ग हैं अतः समुच्चय निर्माण रूप में निम्नानुसार लिखेंगे

A = {x : x एक प्राकृत संख्या का वर्ग है}

या $A = \{x : x = n^2, n \in N\}$

उदाहरण 3: समुच्चय $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$ को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

हलः यहाँ अंश एक प्राकृत संख्या है जो 1 से प्रारम्भ होकर उत्तरोत्तर 5 तक बढ़ती है तथा हर अंश से 1 अधिक है। अतः समुच्चय निर्माण रूप में निम्नानुसार लिखेंगे–

$$\left\{ x : x = \frac{n}{n+1}, n \in N \text{ तथा } 1 \le n \le 5 \right\}$$

1.03 विभिन्न प्रकार के समुच्चय (Different types of sets)

रिक्त समुच्चय (Empty or Null Set)

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए–

(i) A = {x : x एक प्राकृत संख्या इस प्रकार है कि $2 < x < 3$ }

(ii) B = {x : x एक प्राकृत संख्या इस प्रकार है कि $x^2 - 2 = 0$ }

(iii) C = {x : x एक 2 से अधिक अभाज्य सम संख्या है}

(iv) D = {x : x एक प्राकृत संख्या जिसका वर्ग 3 है}

ध्यानपूर्वक विचार करने पर हम देखते है कि वास्तविक रूप में इन समुच्चयों में कोई अवयव नहीं है। अतः इन्हें रिक्त समुच्चय कहते हैं।

परिभाषा : वह समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं हो, रिक्त समुच्चय कहलाता है। इसे **शून्य समुच्चय** भी कहते हैं क्योंकि इसमें अवयवों की संख्या शून्य होती है। रोस्टर रूप में इसे { } से दर्शाते हैं अर्थात मझले कोष्ठक में कुछ नहीं लिखते हैं तो वह रिक्त समुच्चय को प्रदर्शित करता है तथा अधिकांश लेखक इसे प्रतीक ϕ (फाई) से दर्शाते है।

एकल समुच्चय (Singleton set)

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए–

$A=\{2\}$, B = { x : x एक प्राकृत संख्या इस प्रकार है कि $x-5=0$ }, $C=\{\phi\}$, $D=\{x:3<x<5,\ x\in N\}$

उपरोक्त सभी समुच्चयो में अवयवों की संख्या 1 है, इस प्रकार के समुच्चय एकल समुच्चय कहलाते हैं।

परिभाषा : ऐसे समुच्चय जिनमें एक ही अवयव हो एकल समुच्चय कहलाते हैं।

परिमित और अपरिमित समुच्चय (Finite and infinite Sets)

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए–

A = {a, e, i, o, u},   B = {1, 4, 9, 16},   C = { } या ϕ

D= {मैदान में खेल रही आपके विद्यालय की फुटबाल टीम के सदस्य } तथा E= { x : x एक प्राकृत संख्या है }

यहाँ समुच्चय A, B, D मे अवयवों की संख्या परिमित है तथा C मे एक भी अवयव नहीं है अर्थात शून्य अवयव है, परन्तु E मे अवयवों की संख्या परिमित नहीं है।

परिभाषाः समुच्चय में यदि अवयवों की संख्या परिमित हों, तो वह समुच्चय,परिमित समुच्चय कहलाता है अन्यथा उसे अपरिमित समुच्चय कहते हैं।

किसी अपरिमित समुच्चय के सभी अवयवों को { } के भीतर लिखना संभव नहीं है। अपरिमित समुच्चय को रोस्टर रूप में प्रकट करने के लिए उसके कम से कम इतने अवयवों को लिखते है जिससे उस समुच्चय की संरचना स्पष्ट हो सके और इसके पश्चात् तीन क्रमवार बिन्दु लगाते हैं। सभी अपरिमित समुच्चयों का वर्णन रोस्टर रूप में नहीं किया जा सकता है। उदाहरण के लिए वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।

उपर्युक्त समुच्चयों में A, B, C तथा D परिमित समुच्चय है तथा E एक अपरिमित समुच्चय है। किसी समुच्चय A के लिए प्रतीक $n(A)$ समुच्चय A के कुल अवयवों की संख्या को दर्शाता है। उदाहरण के लिए–

$$n(A)=5,\ n(B)=4,\ n(C)=0,\ n(D)=11$$

क्योंकि E समुच्चय में अवयवों की संख्या अनन्त है अतः E एक अपरिमित समुच्चय है।

समान समुच्चय (Equal Sets)

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए –

A = { 0},   B = { $x : x-5=0$ },   C = { $x : x^2-25=0$ },

D = { x : x <5 तथा $x>15$ },   E = {–5, 5 } तथा   F = { } या ϕ

यहाँ A व B में अवयवों की संख्या समान है परन्तु अवयव अलग–अलग है। अतः समुच्चय A व B समान नहीं है, समुच्चय C को रोस्टर रूप में लिखने पर C = {–5,5 } प्राप्त होता है, अतः C तथा E के सभी अवयव समान है। अतः समुच्चय C एवं E समान है। पुनः D मे कोई अवयव नहीं होगा, क्योकि कोई भी संख्या x जो 5 से छोटी हो वह 15 से बड़ी नहीं हो सकती है अर्थात D एक रिक्त समुच्चय है अतः समुच्चय D एवं F समान है।

परिभाषाः दो समुच्चय A तथा B समान कहलाते हैं यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B में तथा समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A में हो।

यदि A व B समान समुच्चय हो तो इसे **A=B** से दर्शाते है तथा '**A समान है B के**' पढ़ते है। वस्तुतः यदि A=B हैं तो A व B के अवयव अक्षरशः समान होंगे। यदि A व B समान नहीं है तो इन्हें **असमान समुच्चय** कहते हैं जिसे $A\neq B$ से दर्शाते हैं।

टिप्पणीः यदि किसी समुच्चय के एक अथवा एक से अधिक अवयवों की पुनरावृत्ती होती है, तो समुच्चय बदलता नहीं है।

1.04 उपसमुच्चय (Subset)

निम्नलिखित समुच्चयो पर विचार कीजिए–

A = आपके विद्यालय के विज्ञान संकाय के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय।

B = आप विज्ञान के विद्यार्थी हैं तथा आपकी कक्षा के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय।

इसमें समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A का भी अवयव है। अतः कहा जा सकता है कि समुच्चय B, समुच्चय A का उपसमुच्चय है।

परिभाषाः यदि समुच्चय B का प्रत्येक अवयव, समुच्चय A का भी अवयव हैं, तो समुच्चय B, समुच्चय A का उपसमुच्चय कहलाता है। प्रतीकात्मक रूप से इसे $B \subset A$ से प्रकट किया जाता है तथा **'B उपसमुच्चय है A का'** पढ़ा जाता है।

(i) परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q , वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का एक उपसमुच्चय है और इसे $Q \subset R$ लिखा जाता है।

(ii) माना कि A = { 1, 3, 5} तथा B = {$x : x$ संख्या 6 से कम एक विषम प्राकृत संख्या है} तो $B \subset A$ तथा $A \subset B$, अतः A = B.

(iii) माना कि A = { a,e,i,o,u} तथा B = { a,b,c,d} तो A, B का उपसमुच्चय नहीं है तथा B भी A का उपसमुच्चय नहीं है।

(iv) सामान्य संकेतानुसार $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

अतः यदि $B \subset A$ तो $a \in B \Rightarrow a \in A$ अर्थात् उपसमुच्चय B का प्रत्येक अवयव निश्चित रूप से समुच्चय A का अवयव होता है। उदाहरण (i).

यदि $B \subset A$ तथा $A \subset B$ अर्थात् समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A का अवयव हो तथा समुच्चय A का भी प्रत्येक अवयव समुच्चय B का अवयव हो तो दोनों समुच्चय A तथा B समान समुच्चय होते है। उदाहरण (ii).

उपरोक्त परिभाषाओं तथा तथ्यों से निष्कर्ष निकलता हैं कि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय है अर्थात् $A \subset A$ क्योंकि रिक्त समुच्चय ϕ में कोई अवयव नहीं होता है अतः ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है। हम यह भी कह सकते हैं कि ϕ में ऐसा कोई अवयव नहीं है जो किसी समुच्चय A में नहीं है।

यदि A और B दो समुच्चय है तथा $A \subset B$ एवं $A \neq B$ तो A, B का **उचित उपसमुच्चय** कहलाता है और B, A का **अधिसमुच्चय** कहलाता है जैसे Q, R का उचित उपसमुच्चय है तथा R, Q का अधिसमुच्चय है।

अन्तराल के रूप में *R* के उपसमुच्चय (Subset of *R* as an interval)

यदि $a, b \in R$ और $a < b$, तब वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{x : a < x < b\}$ एक विवृत अन्तराल कहलाता है और प्रतीक के रूप में इसे (a, b) द्वारा निरूपित किया जाता है तथा a और b के मध्य स्थित सभी वास्तविक संख्याएँ इस अन्तराल में होती हैं परन्तु a और b स्वयं इस अन्तराल में नहीं होते हैं। इसी प्रकार वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{x : a \leq x \leq b\}$ एक संवृत अन्तराल कहलाता है और प्रतीकात्मक रूप में इसे $[a, b]$ द्वारा निरूपित किया जाता है। a से लगाकर b तक की सभी वास्तविक संख्याएँ इस अन्तराल में होती है। इसी तरह निम्न अन्तराल भी परिभाषित किए जा सकते हैं। अतः

$(a, b) = \{x : a < x < b\}$

$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$

$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$

सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set)

संख्या प्रणाली का अध्ययन करते समय हमें प्राकृत संख्याओं, परिमेय संख्याओं, अपरिमेय संख्याओं, सम प्राकृत संख्याओ या भाज्य प्राकृत संख्याओं में रूचि होती है तथा ये सभी समुच्चय वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय होते हैं।

परिभाषाः जब विचाराधीन सभी समुच्चय किसी एक ही समुच्चय के उपसमुच्चय होते हैं तो उस समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय कहते हैं।

सार्वत्रिक समुच्चय को U से दर्शाते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि सार्वत्रिक समुच्चय के अन्य सभी विचाराधीन समुच्चय, उपसमुच्चय होते हैं।

घात समुच्चय (Power set)

यदि A = {a,b} हो, ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$ सभी समुच्चय A के उपसमुच्चय होंगे तथा $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय होगा जिसे हम A का घात समुच्चय कहेंगे।

परिभाषा : किसी समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय कहते हैं।

A के घात समुच्चय को **P(A)** से निरूपित करते है। अतः उपरोक्त उदाहरण में

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

पुनः यदि $n(A) = m$ हो, तो $n(P(A)) = 2^m$ होगा। उपरोक्त समुच्चय A के लिये, n(A) = 2 अतः $n(P(A)) = 2^2 = 4$ हैं।

प्रश्नमाला 1.1

1. निम्न स्थानों मे $\in$ या $\notin$ को भर कर सही कथन बनाइए–

   (i) $3 \ldots \{1,2,3,4,5\}$ (ii) $2 \cdot 5 \ldots N$ (iii) $0 \ldots Q$

2. निम्न स्थानों में $\subset$ या $\not\subset$ को भर कर सही कथन बनाइए–

   (i) $\{2,3,4\} \ldots \{1,2,3,4,5\}$

   (ii) $\{a,e,o\} \ldots \{a,b,c\}$

   (iii) $\{x : x$ किसी समतल मे स्थित एक समबाहु त्रिभुज है $\} \ldots \{x : x$ किसी समतल मे स्थित एक त्रिभुज है $\}$

   (iv) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है $\} \ldots \{x : x$ एक विषम पूर्णांक है $\}$

3. निम्नलिखित कथनों की सत्यता की जाँच कीजिए–

   (i) $\{a, b\} \subset \{b, a, c\}$

   (ii) $\{a, e\} \subset \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$

   (iii) $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1,3,2,5\}$

   (iv) $\{x : x$ संख्या 6 से कम एक सम प्राकृत संख्या है $\} \not\subset \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है जो 36 को विभाजित करती है $\}$

4. निम्नलिखित समुच्चयों के घात समुच्चय लिखिए–

   (i) $\{a\}$ (iii) $\{1,2,3\}$ (ii) $\{a,b\}$ (iv) ϕ

5. निम्नलिखित को अन्तराल के रूप में लिखिए–

   (i) $\{x : x \in R, -3 < x < 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -4 \le x \le 8\}$

   (iii) $\{x : x \in R, 4 < x \le 9\}$ (iv) $\{x : x \in R, -6 \le x < -1\}$

6. निम्नलिखित अन्तरालों को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए–

   (i) $(-4,0)$ (iii) $[6,8]$ (ii) $[-3, 7)$ (iv) $(3, 10]$

7. यदि $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ और $C = \{2, 4, 6, 8\}$ हो, तो निम्नलिखित में से किस–किस समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय लिया जा सकता है–

   (i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

   (iii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (iv) ϕ

1.05 समुच्चयों पर संक्रियाएें (Operations on sets)

संख्याओं पर योग, अन्तर, गुणा और भाग की संकियाओं से हम परिचित हैं। दो संख्याओं पर इन संक्रियाओं से एक नयी संख्या प्राप्त होती है। अब हम दो समुच्चयों पर होने वाली निम्न संक्रियाओं का अध्ययन करेंगें

(i) समुच्चयों का संघ या सम्मिलन (ii) समुच्चयों का सर्वनिष्ठ

(iii) समुच्चयों का अन्तर (iv) समुच्चय का पूरक

(i) समुच्चयों का संघ या सम्मिलन (Union of sets)

समुच्चयों $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ **तथा** $B = \{3,5,7,9,11\}$ पर विचार कीजिए। यहाँ हम देखते हैं कि कुछ अवयव समान है तथा कुछ अलग–अलग है। यदि हम समुच्चय $C = \{1,2,3,4,5,6,7,9,11\}$ का निर्माण करे तो यह स्पष्ट होता है कि यह समुच्चय A तथा B दोनों के सभी अवयवों के सम्मिलन से निर्मित है तथा A व B का कोई भी अवयव इसके बाहर नहीं हैं। अतः यह एक विशेष प्रकार का समुच्चय है जिसे हम समुच्चयों का संघ कहते हैं इसे निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है।

परिभाषाः समुच्चय A तथा समुच्चय B का संघ समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें A तथा B के सभी अवयवों को सम्मिलित रूप से लेकर बनाया जाता हैं।

समुच्चय A तथा समुच्चय B के संघ समुच्चय को $A \cup B$ से निरूपित करते हैं तथा '**A संघ B'** पढ़ते हैं। अतः

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ या } x \in B\}$$

उदाहरणः यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ तथा $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ हो, तो

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$$

संघ की संक्रियाओं के गुणधर्मः

(i) $A \cup \phi = A$ (तत्समक नियम, ϕ संक्रिया $\cup$ का तत्समक अवयव है)

(ii) $A \cup B = B \cup A$ (क्रम विनिमय नियम)

(iii) $A \cup A = A$ (वर्गसम नियम)

(iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (साहचर्य नियम)

(v) $U \cup A = U$

(ii) समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of sets)

समुच्चयों के संघ में दिये समुच्चयों A तथा B पर विचार करने पर हमें ध्यान में आता है कि इन दोनों समुच्चयों में अवयव 3 तथा 5 दोनों समुच्चयों के सदस्य हैं अतः इनसे एक समुच्चय $D = \{3,5\}$ का निर्माण किया जा सकता है इस प्रकार के समुच्चय को हम उपरोक्त समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय कहते हैं। इसको निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता हैं।

परिभाषाः समुच्चय A तथा समुच्चय B का सर्वनिष्ठ समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें A तथा B के सभी उभयनिष्ठ अवयव उपस्थित हों।

समुच्चय A तथा समुच्चय B के सर्वनिष्ठ समुच्चय को $A \cap B$ से निरूपित करते हैं तथा

इसे **'A सर्वनिष्ठ B'** पढ़ते हैं। अतः

$A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$

उपरोक्त उदाहरण से $A \cap B = \{3, 5\}$, दोनो समुच्चयों में 3 एवं 5 उभयनिष्ठ अवयव हैं।

यदि दो समुच्चयों A तथा B में एक भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं हो, तो ऐसे समुच्चयों को **असंयुक्त समुच्चय** कहते हैं। अर्थात् यदि A तथा B असंयुक्त समुच्चय हों, तो–

$A \cap B = \{ \}$ या ϕ

सर्वनिष्ठ की संक्रियाओं के गुणधर्मः

(i) $A \cap \phi = \phi,\ U \cap A = A$ (ϕ व U के नियम से)

(ii) $A \cap B = B \cap A$ (क्रम विनिमय नियम)

(iii) $A \cap A = A$ (वर्गसम नियम)

(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (साहचर्य नियम)

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (बंटन नियम)

(iii) समुच्चयों का अन्तर (Difference of sets)

समुच्चयों $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ तथा $B = \{3,5,7,9,11\}$ पर विचार करने पर हम देखते हैं कि 1,2,4,6 समुच्चय A के ऐसे अवयव हैं जो समुच्चय B में नहीं हैं इन्हे $A - B = \{1, 2, 4, 6\}$ से प्रदर्शित करते है इसी प्रकार $B - A = \{7, 9, 11\}$ प्राप्त होता हैं।

परिभाषाः समुच्चय A का समुच्चय B से अन्तर, उन अवयवों का समुच्चय है जो समुच्चय A में है किन्तु समुच्चय B में नहीं है।

समुच्चय A का समुच्चय B से अन्तर प्रतिकात्मक रूप में **'A–B'** से दर्शाया जाता है तथा इसे **'A से B का अन्तर'** पढ़ते है। अर्थात A – B, A के अवयवों में से B के अवयवों को हटाने से प्राप्त होता है। अतः

$A - B = \{ x : x \in A$ और $x \notin B \}$

उपरोक्त समुच्चयों से स्पष्ट है कि $A - B \neq B - A$, जो दर्शाती है कि समुच्चयों मे अन्तर की संक्रिया क्रमविनिमय के नियम का पालन नहीं करती है।

(iv) समुच्चय का पूरक समुच्चय (Complement of a set)

यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ एक सार्वत्रिक समुच्चय को निरूपित करें तथा $A = \{2, 4, 6\}$ हो, तो A के अवयवों को छोड़ने के पश्चात् शेष सभी अवयवों का एक समुच्चय प्राप्त होता हैं जिसे U – A लिखते हैं, क्योंकि इसमें A का कोई भी अवयव नहीं है अतः इसे U के सापेक्ष A का पूरक समुच्चय कहते हैं।

परिभाषाः किसी समुच्चय का पूरक समुच्चय, सार्वत्रिक समुच्चय के अवयवों में से उस समुच्चय के अवयवों को हटाने पर प्राप्त समुच्चय को कहते हैं।

A के पूरक समुच्चय को $\mathbf{A^c}$ या $\mathbf{A'}$ से दर्शाते हैं तथा **पूरक A** पढ़ते हैं। अतः $A' = U - A$

यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ तथा $A = \{2, 4, 6\}$ हो, तो $A' = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

1.06 समुच्चयों पर प्रारंभिक संक्रियाओं का वेन आरेख द्वारा निरूपण

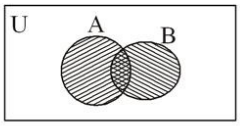
(Representation of initial operations on sets by venn diagram)

समुच्चयों पर प्रारंभिक संक्रियाओं को आरेख द्वारा सरलता से समझा जा सकता है जिन्हे **वेन आरेख** कहते हैं। इस विधि मे सार्वत्रिक समुच्चय को एक आयत के रूप में तथा अन्य समुच्चयों को वृतों के रूप मे दर्शाते हैं।

अनेक प्रश्नों को तार्किक रूप से हल करने में वेन आरेख काफी उपयोगी सिद्ध होते हैं। इन्हे समुच्चयों की संकियाओं के पश्चात् विस्तृत रूप से समझाया गया हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

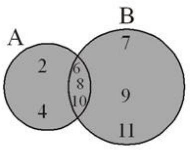
उदाहरण 4: यदि U, A, B निम्नानुसार प्रदर्शित हो, तो तथा विभिन्न आकारों के अनुसार बनने वाले समुच्चयों को



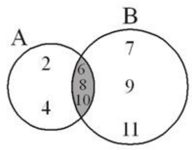
निम्नानुसार प्रदशित करेंगे–

□ $(A \cup B)'$ ▨ $A - B$ ▧ $B - A$ ▩ $A \cap B$

उदाहरण 5: यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ हो, तो $A \cup B$ तथा $A \cap B$ को वेन आरेख द्वारा निम्न प्रकार दर्शायेंगे



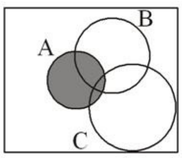
$A \cup B = \{2,4,6,7,8,9,10,11\}$



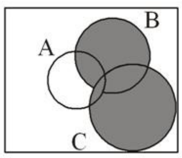
$A \cap B = \{6,8,10\}$

उदाहरण 6: यदि A, B तथा C कोई तीन समुच्चय हों, तो वेन आरेख द्वारा सिद्ध कीजिए कि –

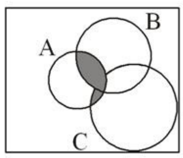
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



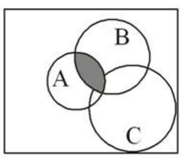
A



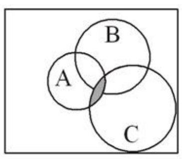
$B \cup C$



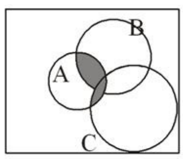
$A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$



$A \cap C$



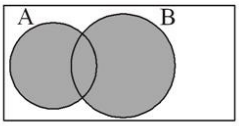
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

अतः चित्रानुसार यह सिद्ध होता है कि, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

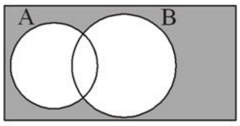
उदाहरण 7: यदि U सार्वत्रिक समुच्चय, A तथा B कोई दो समुच्चय हों, तो वेन आरेख द्वारा निम्न समुच्चयों को प्रदर्शित कीजिए–

(i) $(A \cup B)'$ (ii) $A' \cup B'$

हल: (i) $(A \cup B)'$

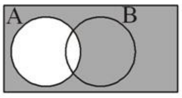


$(A \cup B)$

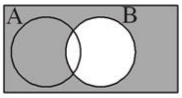


$(A \cup B)'$

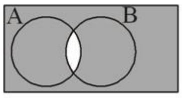
(ii) $A' \cup B'$



A'



B'



$A' \cup B'$

विविध प्रश्नमाला–1

1. समीकरण $x^2 + x - 2 = 0$ का हल समुच्चय रोस्टर रूप में है–

   (A) $\{1,2\}$ (C) $\{-1,2\}$ (B) $\{-1,-2\}$ (D) $\{1,-2\}$

2. B = $\{y : y$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$ का रोस्टर रूप है–

   (A) {a,e,i,o} (C) {a, e, o,u} (B) {a,o,u} (D) {a,e,i,o,u}

3. समुच्चय A = {1, 4, 9, 16, 25, . . . } का समुच्चय निर्माण रूप होगा–

   (A) $\{x : x$ एक विषम प्राकृत संख्या है $\}$ (B) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है $\}$

   (C) $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या का वर्ग है $\}$ (D) $\{x : x$ एक अभाज्य प्राकृत संख्या है $\}$

4. निम्नलिखित समुच्चयों में कौनसा अपरिमित है–

   (A) $\{x : x \in$ N और $(x-1)(x-2) = 0\}$ (B) $\{x : x \in$ N और $x^2 = 4\}$

   (C) $\{x : x \in$ N और $2x - 1 = 0\}$ (D) $\{x : x \in$ N और x एक अभाज्य संख्या है$\}$

5. यदि A = {0}, B = $\{x : x > 15$ और $x < 5\}$, C = $\{x : x - 5 = 0\}$, D = $\{x : x^2 = 25\}$,

   E = $\{x : x$ समीकरण $x^2 - 2x - 15 = 0$ का एक धन पूर्णांक मूल है$\}$ हो, तो समान समुच्चयों का युग्म है

   (A) A, B (C) B, C (B) C,D (D) C,E

6. समुच्चयों ϕ, A = { 1, 3 }, B = {1, 5, 9}, C = {1, 5, 7, 9} के लिए निम्न में से सत्य है–

   (A) $A \subset B$ (B) $B \subset C$ (C) $C \subset B$ (D) $A \subset C$

7. यदि A = { 2,4,6,8} और B = {1,4,7,8} तो A – B तथा B – A क्रमशः होंगे–

   (A) {2,6}; {1,7} (B) {1,7}; {4,8} (C) {1,7}; {2,6} (D) {4,8} ; {1,7}

8. निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है?

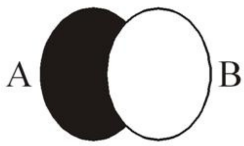
   (A) $A \cap B = \phi \Rightarrow A = \phi$ या $B = \phi$ (B) $A - B = \phi \Rightarrow A \subset B$

   (C) $A \cup B = \phi \Rightarrow A \subset B$ (D) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $A \cap B = \phi$ तो

   (A) $A - B = \phi$ (B) $A - B = A$ (C) $A \cup B = \phi$ (D) A – B = B

10. निम्न वेन आरेख का छायांकित क्षेत्र निरूपित करता है–



(A) $A \cup B$ (B) $A \cap B$ (C) $A - B$ (D) $B - A$

11. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ हो, तो $A - B$ का मान होगा–

(A) $\{1,3,5,8\}$ (B) $\{1,3,5\}$ (C) $\{1,2,3,4,5,6,8\}$ (D) $\{\ \ \}$

12. निम्नलिखित कथनों में से सत्य कथन है–

(A) $\{2, 3, 4, 5\}$ तथा $\{3, 6\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(B) $\{a, e, i, o, u\}$ तथा $\{a, b, c, d\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(C) $\{2, 6, 10, 14\}$ तथा $\{3, 7, 11, 15\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

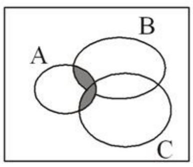
(D) $\{2, 7, 10\}$ तथा $\{3, 7, 11\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

13. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3\}$ और $B = \{3, 4, 5\}$ हो, तो सत्य है–

(A) $(A \cup B)' = \{2, 3, 4, 5\}$ (B) $B - A = \{4,5\}$

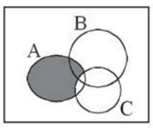
(C) $A - B = \{2,4,5\}$ (D) $(A \cup B) = \{3\}$

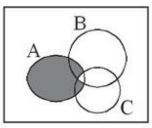
14. निम्न प्रदर्शित वेन आरेख का छायांकित क्षेत्र निरूपित करता है–

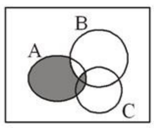


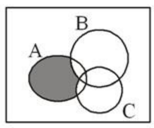
(A) $(A \cap B) \cap C$ (B) $(A \cup B) \cap C$ (C) $(A \cap B) \cup C$ (D) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

15. समुच्चय $A - (B \cap C)$ को निरूपित करने वाला वेन आरेख है–

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

16. निम्नलिखित में कौन से संग्रह समुच्चय है ? समझाइये।

(i) 8 से कम सम प्राकृत संख्याओं का संग्रह

(ii) भारत के बड़े नगरों का संग्रह

(iii) विभिन्न प्रकार की ज्यामितीय आकृतियों का संग्रह

(iv) संख्या 46 को विभाजित करने वाले सभी पूर्ण संख्याओं का संग्रह

(v) विश्व के सर्वश्रेष्ठ 20 क्रिकेट के बल्लेबाजों का संग्रह

(vi) सभी सम पूर्णांको का संग्रह

(vii) कवि कालिदास द्वारा रचित काव्यों का संग्रह

(viii) भारतीय संस्कृति में योगदान देने वाले महापुरूषों का संग्रह

17. निम्नलिखित समुच्चयों को रोष्टर रूप में लिखिए।

(i) $A = \{x : x \in N,\ 2 \le x \le 9\}$

(ii) $B = \{ x : x$ दो अंको की प्राकृत संख्या जिसके अंकों का योगफल 6 है}

(iii) C = MATHEMATICS शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय

(iv) D = { $x : x$ एक अभाज्य संख्या है जो 50 से छोटी है }

18. यदि A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {2, 3, 4} तथा C = { 4, 6, 8, 10} हो, तो रिक्त स्थानों में उपयुक्त चिह्न लगाइए।

(i) 4…A , 5…B (ii) 2…A, 3…B, 4…C (iii) B…A, A…C (iv) A – B …C

(v) A…B = B (vi) B – C … {2} (vii) $B \cap C = \{\ldots\}$ (viii) $B \cup C - A = \{\ldots\}$

19. प्रत्येक के दो–दो उदाहरण बताइए।

(i) रिक्त समुच्चय (ii) परिमित समुच्चय (iii) अपरिमित समुच्चय (iv) सार्वत्रिक समुच्चय

20. यदि A = {a, b, c, d}, B = {p, q, r} तथा C = { a, b, p, q} हो, तो निम्नलिखित की सत्यता की जॉच कीजिए।

(i) A – B = C (ii) $B - C \neq A$ (iii) $B - A = \phi$

(iv) $(A \cup B) - C = \{c, d, r\}$ (v) $(A \cup B) \cap C = C$

21. यदि $A = \phi$ हो, तो P(A) में कितने अवयव होंगे?

22. निम्नलिखित समुच्चयों को अन्तराल के रूप में लिखिए।

(i) $\{x : x \in R, a < x < b\}$ (ii) $\{x : x \in R, 3 < x \le 5\}$ (iii) $\{x : x \in R, 0 \le x < 8\}$ (iv) $\{x : x \in R, -1 \le x \le 5\}$

23. निम्नलिखित अन्तराल को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

(i) (2, 5) (ii) [0, 7) (iii) [2, 10] (iv) (–5, 0]

24. यदि $A = \{x : x \in N,\ 2 \le x \le 9\}$ तथा B = { $x : x$ दो अंको की प्राकृत संख्या जिसके अंकों का योगफल 8 है} तो निम्न समुच्चय ज्ञात कीजिए।

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $A - B$ (iv) $(A - B) \cup (B - A)$

25. यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {2, 3, 4} तथा C = { 4, 6, 8, 10} हो, तो निम्न समुच्चयों का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(A \cup B) \cap B$ (ii) $(A \cap B) \cup C$ (iii) $A' \cup B'$ (iv) $(A \cup B)'$

26. यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, तथा B = {2, 3, 4} हो, तो सिद्ध कीजिए कि–

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

27. वेन आरेख की सहायता से निम्न समुच्चयों को प्रदर्शित कीजिए।

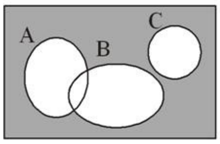
(i) $(A \cup B) \cap C$ (ii) $(A \cap B) \cup C$ (iii) $A' \cup B'$ (iv) $(A \cup B)'$

28. वेन आरेख की सहायता से सिद्ध कीजिए कि–

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते है।
2. समुच्चय को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षर एवं इसके सदस्य या अवयव को वर्णमाला के छोटे अक्षर से दर्शाते हैं। यदि a समुच्चय A का अवयव है, तो इसे $a \in A$ तथा a समुच्चय A का अवयव नहीं होने पर $a \notin A$ से लिखते हैं।
3. समुच्चय को निम्न विधियों द्वारा निरूपित किया जाता है–
   (i) सारणीबद्ध या रोस्टर रूप : अवयवों को अर्ध विराम द्वारा पृथक करते हुए बिना पुनरावृति के मझले कोष्ठक में लिखकर।
   (ii) समुच्चय निर्माण रूप : अवयवों के गुणधर्म को मझले कोष्टक में लिखकर।
4. विभिन्न प्रकार के समुच्चय :
   (i) रिक्त समुच्चय : वह समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं हो।
   (ii) परिमित और अपरिमित समुच्चय : जिस समुच्चय मे अवयवों की संख्या परिमित हो वह परिमित समुच्चय कहलाता है अन्यथा उसे अपरिमित समुच्चय कहेंगे। $n(A) = A$ में कुल अवयवों की संख्या।
   (iii) सार्वत्रिक समुच्चय (U) : जब विचाराधीन समुच्चय किसी एक ही समुच्चय के उपसमुच्चय हो तो वह समुच्चय, सार्वत्रिक समुच्चय कहलाता हैं।
5. समुच्चयों में क्रियाएँ :
   (i) समुच्चय A तथा B का **संघ** या सम्मिलन समुच्चय$(A \cup B)$: $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$
   (ii) समुच्चय A तथा B का **सर्वनिष्ठ समुच्चय** $(A \cap B)$: $A \cap B = \{x : x \in A$ तथा $x \in B\}$
   (iii) समुच्चय A का B से **अन्तर समुच्चय** $(A - B)$: $A - B = \{ x : x \in A$ और $x \notin B \}$
   (iv) समुच्चय A का **पूरक समुच्चय** (A') : $A' = U - A$
6. समुच्चय A, समुच्चय B का **उपसमुच्चय** $(A \subset B)$ कहलाता है यदि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $a \in B$
7. **A का घात समुच्चय P(A) :** $P(A) = \{S : S \subset A\}$ अर्थात A के सभी उपसमुच्चयों का संग्रह।
8. **वेन आरेख द्वारा समुच्चयों का प्रदर्शन :** सार्वत्रिक समुच्चय को एक बड़े आयत से दर्शाते हैं तथा अन्य समुच्चयों को उस आयत के अन्दर वृतों से,तथा यदि दो समुच्चयों में कोई अवयव उभयनिष्ठ है तो उन द्वारा प्रदर्शित वृतों को, प्रतिच्छेदित वृतों से दर्शाते हैं। निम्न वेन आरेख पर विचार कीजिए–



यहाँ आयत सार्वत्रिक समुच्चय दर्शाता है जिसके अन्य अवयव उपसमुच्चय हैं। समुच्चय A व B प्रतिच्छेदी वृतों से दर्शाए गए हैं स्पष्टतः दोनों मे कुछ अवयव उभयनिष्ठ है तथा समुच्चय C अलग से है अतः C का कोई भी अवयव A या B में नहीं है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 1.1

1.	(i) $\in$	(ii) $\notin$	(iii) $\in$	
2.	(i) $\subset$	(ii) $\not\subset$	(iii) $\subset$	(iv) $\not\subset$
3.	(i) सत्य	(ii) सत्य	(iii) असत्य	(iv) सत्य

4. (i) $\{\phi, \{a\}\}$ (ii) $\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
(iii) $\{\phi, \{a\}, \{a,b\}\}$ (iv) ϕ

5. (i) $(-3, 6)$ (ii) $[-4, 8]$ (iii) $(4, 9]$ (iv) $[-6, -1)$

6. (i) $\{x : x \in R,\ -4 < x < 0\}$ (ii) $\{x : x \in R,\ 6 \le x \le 8\}$
(iii) $\{x : x \in R,\ -3 \le x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R,\ 3 < x \le 10\}$

7. (ii) एवं (iii)

विविध प्रश्नमाला–1

1. D	**2.** D	**3.** C	**4.** D	**5.** D	**6.** B
7. A	**8.** B	**9.** B	**10.** C	**11.** B	**12.** C
13. B	**14.** D	**15.** B	**16.** (i), (iv), (vi), (vii)		

17. A = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), B = (15, 24, 33, 42, 51), C = (M, A, T, H, E, I, C, S)
D = (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47)

18. (i) $\in, \notin$ (ii) $\in, \in, \in$ (iii) $\in, \notin$ (iv) $\ne$ (v) $\cap$
(vi) $\ne$ (vii) 4 (viii) $\{8, 10\}$

19. उदाहरण पुस्तक में दी गई परिभाषाओं के अनुसार

20. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य

21. 1

22. (i) (a, b) (ii) (3, 5] (iii) [0, 8) (iv) [–1, 5]

23. (i) $\{x : x \in R,\ 2 < x < 5\}$ (ii) $\{x : x \in R,\ 0 \le x < 7\}$
(iii) $\{x : x \in R,\ z \le x \le 10\}$ (iv) $\{x : x \in R,\ -5 < x \le 0\}$

24. (i) {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71}
(ii) ϕ (iii) A (iv) $A \cup B$

25. (i) B (ii) {2, 3, 4, 6, 8, 10} (iii) {1, 5, 7, 8, 9, 10} (iv) {7, 8, 9, 10}