1. **જો કોઈપણ ચોરસ શ્રેણિકો માટે A · B = B · A હોય તો ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંતથી બતાવો કે $(AB)^n = A^n \cdot B^n$.**

➥ $P(n) : (A \cdot B)^n = A^n \cdot B^n,\ n \in N$

હવે $n = 1$ માટે સાબિત કરતાં,

$P(1)$: ડા.બા. $= (A \cdot B)^1$

$= A \cdot B$

જ.બા. $= A^1 \cdot B^1$

$= A \cdot B$

∴ ડા.બા. = જ.બા.

∴ આપેલ વિધાન $n = 1$ માટે સત્ય છે.

ધારો કે વિધાન $n = k \in N$ માટે સત્ય છે.

અર્થાત્ વિધાન $P(k) : (A \cdot B)^k = A^k \cdot B^k,\ \forall\ k \in N$ માટે સત્ય છે તેમ સ્વીકારતાં,

હવે $n = k + 1 \in N$ માટે સાબિત કરતાં,

∴ $P(k + 1) : (AB)^{k+1} = A^{k+1} \cdot B^{k+1}$ સાબિત કરવું પડે.

ડા.બા. $= (AB)^{k+1}$

$= A^{k+1} \cdot B^{k+1}$

$= A^k \cdot A \cdot B^k \cdot B$

$= A^k \cdot B^k \cdot (AB)$

$= A^k \cdot B^k(B \cdot A)$ (∵ AB = BA આપેલ છે.)

$= A^k \cdot B^{k+1} \cdot A$

$= A^k \cdot A \cdot B^{k+1}$

$= A^{k+1} \cdot B^{k+1}$

= જ.બા.

આમ $(AB)^{k+1} = A^{k+1} \cdot B^{k+1}$

∴ આપેલ વિધાન $n = k + 1 \in N$ માટે સત્ય છે.

આમ $P(k) \Rightarrow P(k + 1)\ k \in N$

∴ ગાણિતિય અનુમાનના સિદ્ધાંત મુજબ આપેલ વિધાન $P(n)$ એ $\forall\ n \in N$ માટે સત્ય છે તેમ સાબિત થાય છે.

2. **શ્રેણિક $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ માટે $A' = A^{-1}$ હોય તો x, y અને z મેળવો.**

➥ અહીં $A' = A^{-1}$

∴ $A \cdot A' = A \cdot A^{-1}$

∴ $A \cdot A' = I$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 2y & y & -y \\ z & -z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0+4y^2+z^2 & 0+2y^2-z^2 & 0+2y^2-z^2 \\ 0+2y^2-z^2 & x^2+y^2+z^2 & x^2-y^2-z^2 \\ 0-2y^2+z^2 & x^2-y^2-z^2 & x^2+y^2+z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

∴ શ્રેણિક સમાનતાની વ્યાખ્યા મુજબ નીચે મુજબના પરિણામ લઈને ગણતરી કરતાં,

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ....(i)

$2y^2 - z^2 = 0$ ....(ii)

$x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ....(iii)

હવે $x^2 = y^2 + z^2$ (પરિણામ (iii) પરથી)

આ મૂલ્ય (i) માં મૂકો.

$\therefore x^2 + x^2 = 1$

$\therefore 2x^2 = 1$

$\therefore x^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

પરિણામ (ii) પરથી $z^2 = 2y^2$ મળે.

પરિણામ (i) માં આ મૂલ્ય મૂકો.

$x^2 + y^2 + 2y^2 = 1$

$\therefore \frac{1}{2} + 3y^2 = 1 \qquad \left(\because x^2 = \frac{1}{2} \text{ છે.}\right)$

$\therefore 3y^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore y^2 = \frac{1}{6}$

$\therefore y = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

➥ અહીં $A' = A^{-1}$

$\therefore A \cdot A' = A \cdot A^{-1}$

$\therefore A \cdot A' = I$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & x & x \\ 2y & y & -y \\ z & -z & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0+4y^2+z^2 & 0+2y^2-z^2 & 0+2y^2-z^2 \\ 0+2y^2-z^2 & x^2+y^2+z^2 & x^2-y^2-z^2 \\ 0-2y^2+z^2 & x^2-y^2-z^2 & x^2+y^2+z^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ શ્રેણિક સમાનતાની વ્યાખ્યા મુજબ નીચે મુજબના પરિણામ લઈને ગણતરી કરતાં,

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ....(i)

$2y^2 - z^2 = 0$ ....(ii)

$x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ....(iii)

હવે $x^2 = y^2 + z^2$ (પરિણામ (iii) પરથી)

આ મૂલ્ય (i) માં મૂકો.

$\therefore x^2 + x^2 = 1$

$\therefore 2x^2 = 1$

$\therefore x^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

પરિણામ (ii) પરથી $z^2 = 2y^2$ મળે.

પરિણામ (i) માં આ મૂલ્ય મૂકો.

$x^2 + y^2 + 2y^2 = 1$

$\therefore \frac{1}{2} + 3y^2 = 1 \qquad \left(\because x^2 = \frac{1}{2} \text{ છે.}\right)$

$\therefore 3y^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore y^2 = \dfrac{1}{6}$

$\therefore y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

3. હાર એશિલોન રીતની મદદથી નીચેના શ્રેણિકો માટે વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો. : $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

➥ હાર એશિલોન પદ્ધતિથી વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવવા માટે A = IA લેતાં,

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_2 = R_2 + R_1$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_3 = R_3 - R_2$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_1 \to R_1 + R_2$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_2 \to R_2 + 3R_1$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_1 \to R_1 + R_2$ અને $R_3 \to -1 \cdot R_3$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot A$$

➥ હાર એશિલોન પદ્ધતિથી વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવવા માટે A = IA લેતાં,

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_2 = R_2 + R_1$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_3 = R_3 - R_2$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_1 \to R_1 + R_2$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_2 \to R_2 + 3R_1$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_1 \to R_1 + R_2$ અને $R_3 \to -1 \cdot R_3$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot A$$

4. **હાર એશિલોન રીતની મદદથી નીચેના શ્રેણિકો માટે વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો. :** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

➡ હાર એશિલોન પદ્ધતિથી વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવવા માટે A = IA લેતાં,

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_2 \to R_2 + R_3$ અને $R_1 \to R_1 - 2R_3$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

અહીં, ડા.બા.ના શ્રેણિકની બીજી હારના બધા જ ઘટકો શૂન્ય છે.

$\therefore$ આપેલ શ્રેણિકનો વ્યસ્ત શ્રેણિક મળશે નહીં.

5. **હાર એશિલોન રીતની મદદથી નીચેના શ્રેણિકો માટે વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવો. :** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

➡ હાર એશિલોન પદ્ધતિથી વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવવા માટે A = IA લેતાં,

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_2 \to R_2 - R_1$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_2 \to R_2 - R_1$ અને $R_3 \to R_3 + R_1$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_3 \to R_3 + R_1$ અને $R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_3 \to R_3 - R_2$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_1 \to \frac{1}{2}R_1$ અને $R_3 \to 2R_3$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot A$$

➥ હાર એશિલોન પદ્ધતિથી વ્યસ્ત શ્રેણિક મેળવવા માટે $A = IA$ લેતાં,

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_2 \to R_2 - R_1$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_2 \to R_2 - R_1$ અને $R_3 \to R_3 + R_1$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because R_3 \to R_3 + R_1$ અને $R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because$ $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot A$$

($\because$ $R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1$ અને $R_3 \rightarrow 2R_3$ લેતાં)

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot A$$

6. શ્રેણિક $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ને એક સંમિત અને એક વિસંમિત શ્રેણિકના સરવાળા સ્વરૂપે દર્શાવો.

ગણતરી માટેનું સૂચન : કોઈપણ ચોરસ શૂન્યેતર શ્રેણિક A માટે $\left(\frac{A + A'}{2}\right) + \left(\frac{A - A'}{2}\right)$ ને સંમિત અને વિસંમિત શ્રેણિકોના સરવાળા તરીકેની રજૂઆત કહેવાય. જ્યાં A + A' એ સંમિત શ્રેણિક તથા A – A' ને વિસંમિત શ્રેણિક કહેવાય છે.

➥ અહીં, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ લેતાં, $A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ થાય.

$$\therefore \frac{A + A'}{2} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{A + A'}{2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \quad \text{...........(i)}$$

આજ રીતે $\frac{A + A'}{2} = \frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \frac{A - A'}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{...........(ii)}$$

$\therefore$ માંગેલ સરવાળા શ્રેણિક $= \left(\frac{A + A'}{2}\right) + \left(\frac{A - A'}{2}\right)$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{5}{2} \\ 2 & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$