ગુજરાત રાજ્યના શિક્ષણવિભાગના પત્ર-ક્રમાંક
મશબ/1219/119-125/છ, તા. 16-02-2019–થી મંજૂર

ગણિત

ભાગ II

ધોરણ XII

પ્રતિજ્ઞાપત્ર

ભારત મારો દેશ છે.
બધાં ભારતીયો મારાં ભાઈબહેન છે.
હું મારા દેશને ચાહું છું અને તેના સમૃદ્ધ અને
વૈવિધ્યપૂર્ણ વારસાનો મને ગર્વ છે.
હું સદાય તેને લાયક બનવા પ્રયત્ન કરીશ.
હું મારાં માતાપિતા, શિક્ષકો અને વડીલો પ્રત્યે આદર રાખીશ
અને દરેક જણ સાથે સભ્યતાથી વર્તીશ.
હું મારા દેશ અને દેશબાંધવોને મારી નિષ્ઠા અર્પું છું.
તેમનાં કલ્યાણ અને સમૃદ્ધિમાં જ મારું સુખ રહ્યું છે.

કિંમત : ₹ 117.00

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ
'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર-382010

© NCERT, નવી દિલ્લી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, ગાંધીનગર
આ પાઠ્યપુસ્તકના સર્વ હક NCERT, નવી દિલ્લી તથા ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળને હસ્તક છે. આ પાઠ્યપુસ્તકનો કોઈ પણ ભાગ કોઈ પણ રૂપમાં NCERT, નવી દિલ્લી અને ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળની લેખિત પરવાનગી વગર પ્રકાશિત કરી શકાશે નહિ.

અનુવાદ

ડૉ. એ. પી. શાહ (કન્વીનર)
શ્રી જયકૃષ્ણ એન. ભટ્ટ
ડૉ. વિપુલ શાહ
શ્રી રાજીવ ચોક્સી
શ્રી વિજય વોરા
ડૉ. રવિ બોરાણા
શ્રી મૃગેશ પારેખ

પરામર્શન

ડૉ. એ. કે. દેસાઈ
ડૉ. પી. જે. ભટ્ટ
ડૉ. પરેશ આઈ. અંધારિયા
ડૉ. પ્રકાશ ડાભી
પ્રો. એમ. જે. વચેણા
શ્રી પરિમલ બી. પુરોહિત
શ્રી નવરોજ બી. ગાંગાણી
શ્રી કૃપાલ એસ. પરીખ
શ્રી આર. વી. વૈષ્ણવ
શ્રી આર. ડી. મોઢા
શ્રી પી. પી. પટેલ
શ્રી હેમા એસ. પંડ્યા
શ્રી સચીન એસ. કામદાર
શ્રી ભદ્રેશ જે. ભટ્ટ

ભાષાશુદ્ધિ

શ્રી વિજય ટી. પારેખ

સંયોજન

શ્રી આશિષ એચ. બોરીસાગર
(વિષય-સંયોજક : ગણિત)

નિર્માણ-સંયોજન

શ્રી હરેન શાહ
(નાયબ નિયામક : શૈક્ષણિક)

મુદ્રણ-આયોજન

શ્રી હરેશ એસ. લીમ્બાચીયા
(નાયબ નિયામક : ઉત્પાદન)

પ્રસ્તાવના

રાષ્ટ્રીય સ્તરે સમાન અભ્યાસક્રમ રાખવાની સરકારશ્રીની નીતિના અનુસંધાને ગુજરાત સરકાર તથા ગુજરાત માધ્યમિક અને ઉચ્ચતર માધ્યમિક શિક્ષણ બોર્ડ દ્વારા તા. 25/10/2017ના ઠરાવ ક્રમાંક મશભ/1217/1036/છ થી શાળા કક્ષાએ NCERTનાં પાઠ્યપુસ્તકોનો સીધો જ અમલ કરવાનો નિર્ણય કરવામાં આવ્યો. તેને અનુલક્ષીને NCERT, નવી દિલ્લી દ્વારા પ્રકાશિત **ધોરણ XII**ના **ગણિત (ભાગ II)** વિષયના પાઠ્યપુસ્તકનો ગુજરાતીમાં અનુવાદ કરીને વિદ્યાર્થીઓ સમક્ષ મૂકતાં ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ આનંદ અનુભવે છે.

આ પાઠ્યપુસ્તકનો અનુવાદ તથા તેની સમીક્ષા નિષ્ણાત પ્રાધ્યાપકો અને શિક્ષકો પાસે કરાવવામાં આવ્યા છે અને સમીક્ષકોનાં સૂચનો અનુસાર હસ્તપ્રતમાં યોગ્ય સુધારા-વધારા કર્યા પછી આ પાઠ્યપુસ્તક પ્રસિદ્ધ કરતાં પહેલાં આ પાઠ્યપુસ્તકની મંજૂરી માટે એક સ્ટેટ લેવલની કમિટીની રચના કરવામાં આવી. આ કમિટીની સાથે NCERTના પ્રતિનિધિ તરીકે RIE, ભોપાલથી ઉપસ્થિત રહેલા નિષ્ણાતોની સાથે એક દ્વિદિવસીય કાર્યશિબિરનું આયોજન કરવામાં આવ્યું અને પાઠ્યપુસ્તકને અંતિમ સ્વરૂપ આપવામાં આવ્યું. જેમાં ડૉ. એ. પી. શાહ, શ્રી રાજીવ ચોક્સી, શ્રી પરિમલ પુરોહિત, શ્રી આર. વી. વૈષ્ણવ, શ્રી પી. પી. પટેલ, શ્રી નિલેશ એમ. કા.પટેલ, ડૉ. અશ્વનીકુમાર ગર્ગ (આર.આઈ.ઈ., ભોપાલ), ડૉ. સુરેશ મકવાણા (આર.આઈ.ઈ., ભોપાલ) ઉપસ્થિત રહી પોતાનાં કીમતી સૂચનો અને માર્ગદર્શન પૂરાં પાડ્યાં છે.

પ્રસ્તુત પાઠ્યપુસ્તકને રસપ્રદ, ઉપયોગી અને ક્ષતિરહિત બનાવવા માટે મંડળ દ્વારા પૂરતી કાળજી લેવામાં આવી છે, તેમ છતાં શિક્ષણમાં રસ ધરાવનાર વ્યક્તિઓ પાસેથી ગુણવત્તા વધારે તેવાં સૂચનો આવકાર્ય છે.

NCERT, નવી દિલ્લીના સહકાર બદલ તેમના આભારી છીએ.

અવંતિકા સિંઘ (IAS)
નિયામક — કાર્યવાહક પ્રમુખ
તા. 3-4-2019 — ગાંધીનગર

પ્રથમ આવૃત્તિ : 2019

પ્રકાશક : ગુજરાત રાજ્ય શાળા પાઠ્યપુસ્તક મંડળ, 'વિદ્યાયન', સેક્ટર 10-એ, ગાંધીનગર વતી શ્રી અવંતિકા સિંઘ, નિયામક

મુદ્રક :

Foreword

The National Curriculum Framework, 2005, recommends that children's life at school must be linked to their life outside the school. This principle marks a departure from the legacy of bookish learning which continues to shape our system and causes a gap between the school, home and community. The syllabi and textbooks developed on the basis of NCF signify an attempt to implement this basic idea. They also attempt to discourage rote learning and the maintenance of sharp boundaries between different subject areas. We hope these measures will take us significantly further in the direction of a child-centred system of education outlined in the National Policy on Education (1986).

The success of this effort depends on the steps that school principals and teachers will take to encourage children to reflect on their own learning and to pursue imaginative activities and questions. We must recognise that, given space, time and freedom, children generate new knowledge by engaging with the information passed on to them by adults. Treating the prescribed textbook as the sole basis of examination is one of the key reasons why other resources and sites of learning are ignored. Inculcating creativity and initiative is possible if we perceive and treat children as participants in learning, not as receivers of a fixed body of knowledge.

These aims imply considerable change in school routines and mode of functioning. Flexibility in the daily time-table is as necessary as rigour in implementing the annual calendar so that the required number of teaching days are actually devoted to teaching. The methods used for teaching and evaluation will also determine how effective this textbook proves for making children's life at school a happy experience, rather than a source of stress or boredom. Syllabus designers have tried to address the problem of curricular burden by restructuring and reorienting knowledge at different stages with greater consideration for child psychology and the time available for teaching. The textbook attempts to enhance this endeavour by giving higher priority and space to opportunities for contemplation and wondering, discussion in small groups, and activities requiring hands-on experience.

NCERT appreciates the hard work done by the textbook development committee responsible for this book. We wish to thank the Chairperson of the advisory group in Science and Mathematics, Professor J.V. Narlikar and the Chief Advisor for this book, Professor P.K. Jain for guiding the work of this committee.

Several teachers contributed to the development of this textbook; we are grateful to their principals for making this possible. We are indebted to the institutions and organisations which have generously permitted us to draw upon their resources, material and personnel. As an organisation committed to systemic reform and continuous improvement in the quality of its products, NCERT welcomes comments and suggestions which will enable us to undertake further revision and refinement.

Director
National Council of Educational
Research and Training

New Delhi
20 December 2005

Preface

The National Council of Educational Research and Training (NCERT) had constituted 21 Focus Groups on Teaching of various subjects related to School Education, to review the National Curriculum Framework for School Education - 2000 (NCFSE - 2000) in face of new emerging challenges and transformations occurring in the fields of content and pedagogy under the contexts of National and International spectrum of school education. These Focus Groups made general and specific comments in their respective areas. Consequently, based on these reports of Focus Groups, National Curriculum Framework (NCF)-2005 was developed.

NCERT designed the new syllabi and constituted Textbook Development Teams for Classes XI and XII to prepare textbooks in mathematics under the new guidelines and new syllabi. The textbook for Class XI is already in use, which was brought in 2005.

The first draft of the present book (Class XII) was prepared by the team consisting of NCERT faculty, experts and practicing teachers. The draft was refined by the development team in different meetings. This draft of the book was exposed to a group of practicing teachers teaching mathematics at higher secondary stage in different parts of the country, in a review workshop organised by the NCERT at Delhi. The teachers made useful comments and suggestions which were incorporated in the draft textbook. The draft textbook was finalised by an editorial board constituted out of the development team. Finally, the Advisory Group in Science and Mathematics and the Monitoring Committee constituted by the HRD Ministry, Government of India have approved the draft of the textbook.

In the fitness of things, let us cite some of the essential features dominating the textbook. These characteristics have reflections in almost all the chapters. The existing textbook contain 13 main chapters and two appendices. Each Chapter contain the followings:

- Introduction: Highlighting the importance of the topic; connection with earlier studied topics; brief mention about the new concepts to be discussed in the chapter.
- Organisation of chapter into sections comprising one or more concepts/sub concepts.
- Motivating and introducing the concepts/sub concepts. Illustrations have been provided wherever possible.
- Proofs/problem solving involving deductive or inductive reasoning, multiplicity of approaches wherever possible have been inducted.
- Geometric viewing / visualisation of concepts have been emphasised whenever needed.
- Applications of mathematical concepts have also been integrated with allied subjects like science and social sciences.
- Adequate and variety of examples/exercises have been given in each section.

- For refocusing and strengthening the understanding and skill of problem solving and applicabilities, miscellaneous types of examples/exercises have been provided involving two or more sub concepts at a time at the end of the chapter. The scope of challenging problems to talented minority have been reflected conducive to the recommendation as reflected in NCF-2005.
- For more motivational purpose, brief historical background of topics have been provided at the end of the chapter and at the beginning of each chapter relevant quotation and photograph of eminent mathematician who have contributed significantly in the development of the topic undertaken, are also provided.
- Lastly, for direct recapitulation of main concepts, formulas and results, brief summary of the chapter has also been provided.

I am thankful to Professor Krishan Kumar, Director, NCERT who constituted the team and invited me to join this national endeavor for the improvement of mathematics education. He has provided us with an enlightened perspective and a very conducive environment. This made the task of preparing the book much more enjoyable and rewarding. I express my gratitude to Professor J.V. Narlikar, Chairperson of the Advisory Group in Science and Mathematics, for his specific suggestions and advice towards the improvement of the book from time to time. I, also, thank Prof. G. Ravindra, Joint Director, NCERT for his help from time to time.

I express my sincere thanks to Professor Hukum Singh, Chief Coordinator and Head DESM, Dr. V. P. Singh, Coordinator and Professor S. K. Singh Gautam who have been helping for the success of this project academically as well as administratively. Also, I would like to place on records my appreciation and thanks to all the members of the team and the teachers who have been associated with this noble cause in one or the other form.

PAWAN K. JAIN
Chief Advisor
Textbook Development Committee

Textbook Development Committee

CHAIRPERSON, ADVISORY GROUP IN SCIENCE AND MATHEMATICS

J.V. Narlikar, Emeritus Professor, Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics (IUCAA), Ganeshkhind, Pune University, Pune

CHIEF ADVISOR

P.K. Jain, Professor, Department of Mathematics, University of Delhi, Delhi

CHIEF COORDINATOR

Hukum Singh, Professor and Head, DESM, NCERT, New Delhi

MEMBERS

Arun Pal Singh, Sr. Lecturer, Department of Mathematics, Dayal Singh College, University of Delhi, Delhi

A.K. Rajput, Reader, RIE, Bhopal, M.P.

B.S.P. Raju, Professor, RIE Mysore, Karnataka

C.R. Pradeep, Assistant Professor, Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore, Karnataka

D.R. Sharma, P.G.T., JNV-Mungeshpur, Delhi

Ram Avtar, Professor (Retd.) and Consultant, DESM, NCERT, New Delhi

R.P. Maurya, Reader, DESM, NCERT, New Delhi

S.S. Khare, Pro-Vice-Chancellor, NEHU, Tura Campus, Meghalaya

S.K.S. Gautam, Professor, DESM, NCERT, New Delhi

S.K. Kaushik, Reader, Department of Mathematics, Kirori Mal College, University of Delhi, Delhi

Sangeeta Arora, P.G.T., Apeejay School Saket, New Delhi-110017

Shailja Tewari, P.G.T., Kendriya Vidyalaya, Barkakana, Hazaribagh, Jharkhand

Vinayak Bujade, Lecturer, Vidarbha Buniyadi Junior College, Sakkardara Chowk, Nagpur, Maharashtra

Sunil Bajaj, Sr. Specialist, SCERT, Gurgaon, Haryana

MEMBER - COORDINATOR

V.P. Singh, Reader, DESM, NCERT, New Delhi

THE CONSTITUTION OF INDIA

PREAMBLE

WE, THE PEOPLE OF INDIA, having solemnly resolved to constitute India into a [1]**[SOVEREIGN SOCIALIST SECULAR DEMOCRATIC REPUBLIC]** and to secure to all its citizens :

JUSTICE, social, economic and political;

LIBERTY of thought, expression, belief, faith and worship;

EQUALITY of status and of opportunity; and to promote among them all

FRATERNITY assuring the dignity of the individual and the [2][unity and integrity of the Nation];

IN OUR CONSTITUENT ASSEMBLY this twenty-sixth day of November, 1949 do **HEREBY ADOPT, ENACT AND GIVE TO OURSELVES THIS CONSTITUTION.**

1. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Sovereign Democratic Republic" (w.e.f. 3.1.1977)
2. Subs. by the Constitution (Forty-second Amendment) Act, 1976, Sec.2, for "Unity of the Nation" (w.e.f. 3.1.1977)

Acknowledgements

The Council gratefully acknowledges the valuable contributions of the following participants of the Textbook Review Workshop: Jagdish Saran, Professor, Deptt. of Statistics, University of Delhi; Quddus Khan, Lecturer, Shibli National P.G. College Azamgarh (U.P.); P.K. Tewari, Assistant Commissioner (Retd.), Kendriya Vidyalaya Sangathan; S.B. Tripathi, Lecturer, R.P.V.V. Surajmal Vihar, Delhi; O.N. Singh, Reader, RIE, Bhubaneswar, Orissa; Miss Saroj, Lecturer, Govt. Girls Senior Secondary School No.1, Roop Nagar, Delhi; P. Bhaskar Kumar, PGT, Jawahar Navodaya Vidyalaya, Lepakshi, Anantapur, (A.P.); Mrs. S. Kalpagam, PGT, K.V. NAL Campus, Bangalore; Rahul Sofat, Lecturer, Air Force Golden Jubilee Institute, Subroto Park, New Delhi; Vandita Kalra, Lecturer, Sarvodaya Kanya Vidyalaya, Vikaspuri, District Centre, New Delhi; Janardan Tripathi, Lecturer, Govt. R.H.S.S. Aizawl, Mizoram and Ms. Sushma Jaireth, Reader, DWS, NCERT, New Delhi.

The Council acknowledges the efforts of Deepak Kapoor, Incharge, Computer Station, Sajjad Haider Ansari, Rakesh Kumar and Nargis Islam, D.T.P. Operators, Monika Saxena,Copy Editor and Abhimanu Mohanty, Proof Reader.

The Contribution of APC-Office, administration of DESM and Publication Department is also duly acknowledged.

અનુક્રમણિકા

ગણિત

ધોરણ : 12, ભાગ I

પ્રકરણ 1	સંબંધ અને વિધેય	1
પ્રકરણ 2	ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેયો	30
પ્રકરણ 3	શ્રેણિક	49
પ્રકરણ 4	નિશ્ચાયક	84
પ્રકરણ 5	સાતત્ય અને વિકલનીયતા	120
પ્રકરણ 6	વિકલિતના ઉપયોગો	161
	પરિશિષ્ટ	205
	જવાબો	223

અનુક્રમણિકા

	Foreword		**iii**
પ્રકરણ 7	**સંકલન (Integrals)**		**237**
	7.1	પ્રાસ્તાવિક	237
	7.2	વિકલનની વ્યસ્તક્રિયા તરીકે સંકલન	238
	7.3	સંકલન માટેની રીતો	247
	7.4	કેટલાંક વિશિષ્ટ વિધેયોના સંકલિત	254
	7.5	આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત	261
	7.6	ખંડશઃ સંકલનની રીત	266
	7.7	નિયત સંકલન	274
	7.8	નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત	278
	7.9	નિયત સંકલનની કિંમત મેળવવા માટેની આદેશની રીત	281
	7.10	નિયત સંકલનના કેટલાંક ગુણધર્મો	283
પ્રકરણ 8	**સંકલનનો ઉપયોગ (Application of Integrals)**		**301**
	8.1	પ્રાસ્તાવિક	301
	8.2	સાદા વક્રથી આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ	301
	8.3	બે વક્ર વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ	307
પ્રકરણ 9	**વિકલ સમીકરણો (Differential Equations)**		**317**
	9.1	પ્રાસ્તાવિક	317
	9.2	પાયાના સિદ્ધાંતો	317
	9.3	વિકલ સમીકરણનો વ્યાપક અને વિશિષ્ટ ઉકેલ	320
	9.4	વ્યાપક ઉકેલ આપેલો હોય તેવા વિકલ સમીકરણની રચના	322
	9.5	પ્રથમ કક્ષાના એક પરિમાણીય વિકલ સમીકરણના ઉકેલ માટેની રીતો	327
પ્રકરણ 10	**સદિશ બીજગણિત (Vector Algebra)**		**353**
	10.1	પ્રાસ્તાવિક	353
	10.2	કેટલીક પાયાની સંકલ્પનાઓ	353
	10.3	સદિશોના પ્રકાર	356

10.4	સદિશોનો સરવાળો	357
10.5	સદિશનો અદિશ સાથે ગુણાકાર	360
10.6	બે સદિશોનો ગુણાકાર	369
10.7	સદિશોનું અદિશ ત્રિગુણન (પેટી ગુણાકાર)	382
પ્રકરણ 11	**ત્રિપરિમાણીય ભૂમિતિ (Three Dimensional Geometry)**	**392**
11.1	પ્રાસ્તાવિક	392
11.2	રેખાની દિક્કોસાઈન અને દિક્ગુણોત્તર	392
11.3	અવકાશમાં રેખાનું સમીકરણ	396
11.4	બે રેખા વચ્ચેનો ખૂણો	399
11.5	બે રેખા વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર	401
11.6	સમતલ	406
11.7	બે રેખા સમતલીય બને તેની શરત	414
11.8	બે સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો	415
11.9	સમતલથી બિંદુનું અંતર	417
11.10	રેખા અને સમતલ વચ્ચેનો ખૂણો	418
પ્રકરણ 12	**સુરેખ આયોજન (Linear Programming)**	**429**
12.1	પ્રાસ્તાવિક	429
12.2	સુરેખ આયોજનનો પ્રશ્ન અને તેનું ગાણિતિક સ્વરૂપ	430
12.3	સુરેખ આયોજનની વિવિધ પ્રકારની સમસ્યાઓ	437
પ્રકરણ 13	**સંભાવના (Probability)**	**451**
13.1	પ્રાસ્તાવિક	451
13.2	શરતી સંભાવના	451
13.3	સંભાવના માટેનો ગુણાકારનો પ્રમેય	458
13.4	નિરપેક્ષ ઘટનાઓ	460
13.5	બેયૂઝનો પ્રમેય	465
13.6	યાદચ્છિક ચલો અને તેમનાં સંભાવના વિતરણો	473
13.7	બર્નુલી પ્રયત્નો અને દ્વિપદી વિતરણ	482
જવાબો (Answers)		**495**

પ્રકરણ **7**

સંકલન

❖ ***Just as a mountaineer climbs a mountain – because it is there, so a good mathematics student studies new material because it is there. — JAMES B. BRISTOL*** ❖

7.1 પ્રાસ્તાવિક

G .W. Leibnitz
(C.E. 1646 - C.E. 1716)

વિકલ ગણિત એ વિકલિતની સંકલ્પના પર કેન્દ્રિત છે. વિકલિત માટે મૂળભૂત પ્રેરણાસ્રોત એ વિધેયના આલેખના સ્પર્શકો વ્યાખ્યાયિત કરવા અને તેમનો ઢાળ શોધવો તે છે. સંકલિતની પ્રેરણા કોઈ પણ વિધેયના આલેખ વડે આવૃત્ત પ્રદેશને વ્યાખ્યાયિત કરી અને તે પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવા પરથી મળે છે.

જો આપેલ વિધેય f એ કોઈ અંતરાલ I પર વિકલનીય હોય એટલે કે તેનો વિકલિત f' અંતરાલ I ના પ્રત્યેક બિંદુએ અસ્તિત્વ ધરાવતો હોય, તો સ્વાભાવિક રીતે એવો પ્રશ્ન ઊઠે કે જો વિધેય f' અંતરાલ I ના પ્રત્યેક બિંદુએ આપેલ હોય, તો શું આપણે વિધેય f મેળવી શકીએ ? આમ, ***આપેલ વિધેય એ કયા વિધેયનું વિકલિત હશે તે શોધવાની ક્રિયાને પ્રતિવિકલનની ક્રિયા કહે*** છે. આમ, આગળ વધતાં ***જે વિધેય આપેલ વિધેયના બધા જ પ્રતિવિકલિત દર્શાવતું હોય તેને આપણે આપેલ વિધેયનો પ્રતિવિકલિત કહીશું.*** આમ, ***પ્રતિવિકલિત શોધવાની ક્રિયાને પ્રતિવિકલન અથવા સંકલન કહે છે.*** આ પ્રકારની સમસ્યાઓ ઘણી વ્યાવહારિક પરિસ્થિતિઓમાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે જો આપણે કોઈ ક્ષણે કોઈ પણ પદાર્થનો તાત્ક્ષણિક વેગ જાણતા હોઈએ, તો સ્વાભાવિક રીતે પ્રશ્ન થાય કે, આપણે કોઈ પણ ક્ષણે એ પદાર્થનું સ્થાન જાણી શકીએ ? તેમાં સંકલનની ક્રિયાનો ઉપયોગ થાય છે. એવા પ્રકારની ઘણી વ્યાવહારિક તેમજ સૈદ્ધાંતિક પરિસ્થિતિઓ આવે છે. સંકલનનો વિકાસ નીચે દર્શાવ્યા પ્રકારની સમસ્યાઓનો ઉકેલ મેળવવાના ફળસ્વરૂપે થયો :

(a) જો કોઈ વિધેયનું વિકલિત જ્ઞાત હોય તો તે કયા વિધેયનું વિકલિત છે તે પ્રશ્નનો ઉત્તર શોધવાની ક્રિયા.

(b) આપેલ નિશ્ચિત શરતોને અધીન આપેલ વિધેયના આલેખથી ઘેરાતા નિશ્ચિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ શોધવાની ક્રિયા.

ઉપર દર્શાવેલ બંને સમસ્યાઓ સંકલનનાં બે સ્વરૂપોની તરફ પ્રેરિત કરે છે : અનિયત સંકલન અને નિયત સંકલન. આ બંનેનું સંકલિત રૂપ એટલે સંકલનશાસ્ત્ર.

અનિયત સંકલન અને નિયત સંકલન વચ્ચેનો સંબંધ સંકલનના મૂળભૂત પ્રમેય તરીકે ઓળખાય છે. આ પ્રમેય વિજ્ઞાન અને ઈજનેરીશાસ્ત્રના ઘણા વ્યાવહારિક ઉપયોગોમાં પાયાના ઉપકરણ તરીકે વપરાય છે. ઘણા વ્યાવહારિક

ઉપયોગોમાં નિયત સંકલન દૃષ્ટિગોચર થાય છે. નિયત સંકલનનો ઉપયોગ અર્થશાસ્ત્ર, નાણાકીય તથા સંભાવના જેવા વિભિન્ન ક્ષેત્રોની ઘણી રસપ્રદ સમસ્યાઓના ઉકેલ મેળવવામાં થાય છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે અનિયત સંકલન અને નિયત સંકલન તથા તેમના મૂળભૂત ગુણધર્મો અને સંકલિત મેળવવાની કેટલીક પદ્ધતિઓ શીખીશું.

7.2 વિકલનની વ્યસ્તક્રિયા તરીકે સંકલન

વિકલનની ક્રિયાની વ્યસ્ત ક્રિયા હોય તેવી ક્રિયાને સંકલન કહે છે. આપેલ વિધેયનું વિકલિત શોધવાને બદલે આપણને વિધેયનું વિકલિત આપેલ હોય અને તે વિકલિત પરથી તેનો પૂર્વગ (મૂળ વિધેય) શોધવો હોય, તો આ પ્રશ્નનો ઉત્તર શોધવાની ક્રિયાને પ્રતિવિકલન કે સંકલનની ક્રિયા કહે છે.

આ સમજવા માટે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\frac{d}{dx}(sin\ x) = cos\ x,$ ...(1)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \qquad ...(2)$$

અને $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ...(3)

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, (1)માં વિધેય $cos\ x$ એ $sin\ x$નું વિકલિત છે. એટલે $sin\ x$ એ $cos\ x$નું પ્રતિવિકલિત (સંકલિત) છે તેમ કહી શકાય. તે જ પ્રમાણે (2) અને (3)માં $\frac{x^3}{3}$ અને e^x અનુક્રમે x^2 અને e^xના પ્રતિવિકલિત (સંકલિત) છે. વળી, આપણે નોંધીશું કે કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા c માટે જો c ને અચળ વિધેય તરીકે લઈએ, તો તેનો વિકલિત શૂન્ય થશે અને તેથી આપણે પરિણામ (1), (2) અને (3) નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે પણ લખી શકીએ :

$$\frac{d}{dx}(sin\ x + c) = cos\ x,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + c\right) = x^2 \text{ અને } \frac{d}{dx}(e^x + c) = e^x$$

આમ, ઉપરનાં વિધેયોના પ્રતિવિકલિતો નિશ્ચિત નથી. હકીકતમાં તો આપેલ વિધેયના પ્રતિવિકલિતોની સંખ્યા અનંત હોય છે. તે પ્રત્યેક વાસ્તવિક અચળ c ની પસંદગીથી મેળવી શકાય છે. તેથી આવા અચળ cને સ્વૈર અચળ કહે છે. તેના મૂલ્યમાં પરિવર્તન કરી આપણે વિધેયના જુદાં-જુદાં પ્રતિવિકલિતો મેળવી શકીએ છીએ.

વ્યાપક રીતે, જો કોઈ વિધેય F માટે,

$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x), \quad \forall x \in I$ (અંતરાલ)

તો કોઈક વાસ્તવિક અચળ c માટે, (તેને સંકલનનો અચળ પણ કહે છે).

$\frac{d}{dx}[F(x) + c] = f(x), \quad \forall x \in I$

આથી $\{F + c, c \in R\}$ એ fના પ્રતિવિકલિતોનો સમુદાય દર્શાવે છે.

નોંધ : સમાન વિકલિત ધરાવતાં વિધેયોમાં અચળનો તફાવત હોય છે. આ સાબિત કરવા ધારો કે કોઈ અંતરાલ I પર બે વિધેયો g અને hનાં વિકલિતો સમાન છે.

ધારો કે $f = g - h$ એટલે કે $f(x) = g(x) - h(x), \quad \forall x \in I$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત છે.

તો $\frac{df}{dx} = f' = g' - h'$ તેથી $f'(x) = g'(x) - h'(x), \quad \forall x \in I$

પરંતુ, પક્ષ પ્રમાણે $f'(x) = 0, \forall x \in I$ એટલે અંતરાલ I પર f નો x ને સાપેક્ષ બદલાવાનો દર શૂન્ય છે અને તેથી f અચળ વિધેય છે. (ખરેખર તો મધ્યકમાન પ્રમેયના ઉપયોગથી $f(x)$ અચળ વિધેય છે તેમ સાબિત કરી શકાય.)

ઉપરની નોંધ પરથી એવું તારણ કાઢી શકાય કે, સમુદાય $\{F + c, c \in R\}$ એ f ના બધા જ પ્રતિવિકલિતો દર્શાવે છે.

હવે, આપણે એક નવા સંકેત $\int f(x)\, dx$ થી પરિચિત થઈએ. તે f ના પ્રતિવિકલિતોનો પૂર્ણ સમુદાય દર્શાવશે. તેને આપણે f નો x વિશે (સાપેક્ષ) અનિયત સંકલિત એમ વાંચીશું.

સંકેતમાં આપણે $\int f(x)\, dx = F(x) + c$ એમ લખીશું.

નોંધ : જો $\frac{dy}{dx} = f(x)$ આપેલ હોય તો $y = \int f(x)\, dx$ લખીશું.

સંકેત : $\frac{dy}{dx} = f(x)$ આપેલ હોય તો તેને $\int f(x)\, dx = y$ એમ લખીશું.

સુવિધા ખાતર નીચેના કોષ્ટકમાં કેટલાંક સંકેતો / પદો / શબ્દસમૂહો તેના અર્થ સાથે આપેલાં છે.

કોષ્ટક 7.1

સંકેત/પદ/શબ્દસમૂહ	અર્થ
– $\int f(x)\, dx$	f નો x ને સાપેક્ષ સંકલિત
– $\int f(x)\, dx$ માં $f(x)$	સંકલ્ય
– $\int f(x)\, dx$ માં x	સંકલનનો ચલ
– સંકલન કરો	સંકલિત શોધો.
– f નો સંકલિત	જેને માટે $F'(x) = f(x)$ થાય એવું એક વિધેય F
– સંકલન	સંકલિત શોધવાની ક્રિયા
– સંકલનનો સ્વૈર અચળ	કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા c, જેને અચળ વિધેય તરીકે લઈશું.

આપણે ઘણાં અગત્યનાં વિધેયોના વિકલિતનાં સૂત્રો જાણીએ છીએ. આ સૂત્રો પરથી તરત જ તે વિધેયોના સંકલનનાં સૂત્રો મેળવી શકીશું. તે નીચેની સૂચિમાં દર્શાવ્યા છે. તેના ઉપયોગથી આપણે બીજાં વિધેયોના સંકલિત પણ મેળવી શકીશું.

વિકલિતો	**સંકલિતો (પ્રતિવિકલિતો)**	
(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$(n \neq -1)$
વિશિષ્ટ રૂપે, આપણે નોંધીશું કે,		
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = x + c$	
(ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	

વિકલિતો	સંકલિતો (પ્રતિવિકલિતો)
(iii) $\frac{d}{dx}(-cos\ x) = sin\ x$	$\int sin\ x\ dx = -cos\ x + c$
(iv) $\frac{d}{dx}(tan\ x) = sec^2x$	$\int sec^2x\ dx = tan\ x + c$
(v) $\frac{d}{dx}(-cot\ x) = cosec^2x$	$\int cosec^2x\ dx = -cot\ x + c$
(vi) $\frac{d}{dx}(sec\ x) = sec\ x\ tan\ x$	$\int sec\ x\ tan\ x\ dx = sec\ x + c$
(vii) $\frac{d}{dx}(-cosec\ x) = cosec\ x\ cot\ x$	$\int cosec\ x\ cot\ x\ dx = -cosec\ x + c$
(viii) $\frac{d}{dx}(sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \|x\| < 1$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = sin^{-1}x + c,\ \ \|x\| < 1$
(ix) $\frac{d}{dx}(-cos^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \|x\| < 1$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = -cos^{-1}x + c,\ \|x\| < 1$
(x) $\frac{d}{dx}(tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = tan^{-1}x + c$
(xi) $\frac{d}{dx}(-cot^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = -cot^{-1}x + c$
(xii) $\frac{d}{dx}(sec^{-1}x) = \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}},\ \|x\| > 1$	$\int \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}\ dx = sec^{-1}x + c,\ \ \|x\| > 1$
(xiii) $\frac{d}{dx}(-cosec^{-1}x) = \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}},\ \|x\| > 1$	$\int \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}\ dx = -cosec^{-1}x + c,\ \ \|x\| > 1$
(xiv) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x\ dx = e^x + c$
(xv) $\frac{d}{dx}(\log\|x\|) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\ dx = \log\|x\| + c$
(xvi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}\right) = a^x$	$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$

☛ નોંધ : સામાન્ય રીતે વિધેય જે અંતરાલ પર વ્યાખ્યાયિત હોય તે આપણે દર્શાવતા નથી. જો કે કેટલાક વિશિષ્ટ સંજોગોમાં આ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ.

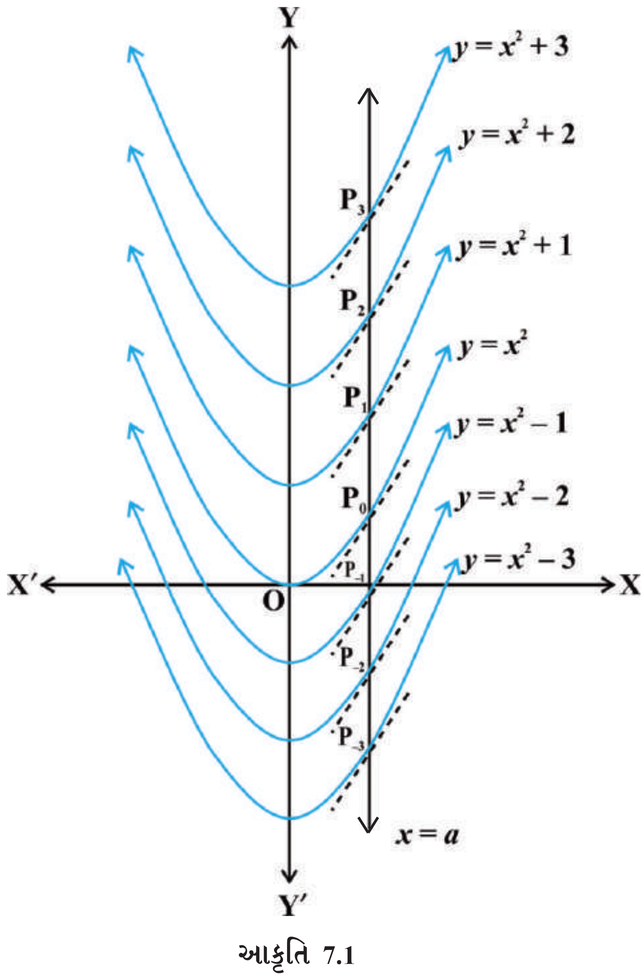
7.2.1 અનિયત સંકલનનું ભૌમિતિક અર્થઘટન

ધારો કે $f(x) = 2x$ તો $\int f(x)\ dx = x^2 + c$ તથા c ની ભિન્ન કિંમતો માટે આપણને ભિન્ન સંકલિતો મળશે. પણ ભૌમિતિક રીતે આ બધા સંકલિતો સમાન છે.

આમ, સ્વૈર અચળ c માટે $y = x^2 + c$ સંકલિતોના એક સમુદાયનું નિરૂપણ કરે છે. c ની ભિન્ન કિંમતો લેતાં, આપણને તે સમુદાયના ભિન્ન સભ્યો મળશે. આ બધા સભ્યોનું એકત્રિત રૂપ એટલે અનિયત સંકલિત. આ કિસ્સામાં પ્રત્યેક સંકલિત Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત પરવલય દર્શાવે છે.

અહીં સ્પષ્ટ છે કે $c = 0$ માટે આપણને $y = x^2$ મળશે. તે જેનું શીર્ષ ઊગમબિંદુ હોય એવો એક પરવલય દર્શાવે છે. આપણને પરવલય $y = x^2$ ને એક એકમ Y-અક્ષની ધન દિશામાં સ્થાનાંતરિત કરવાથી $c = 1$ માટે, વક્ર $y = x^2 + 1$ મળશે. આપણને પરવલય $y = x^2$ ને એક એકમ Y-અક્ષની ઋણ દિશામાં સ્થાનાંતરિત કરવાથી $c = -1$ માટે, વક્ર $y = x^2 - 1$ મળશે. આ પ્રકારે c ની પ્રત્યેક ધન કિંમત માટે સમુદાયના પ્રત્યેક પરવલયનું શીર્ષ Y-અક્ષની ધન દિશામાં હશે અને c ની પ્રત્યેક ઋણ કિંમત માટે સમુદાયના પ્રત્યેક પરવલયનું શીર્ષ Y-અક્ષની ઋણ દિશામાં હશે. આ પરવલયોમાંનાં કેટલાંક પરવલયોને આકૃતિ 7.1 માં દર્શાવ્યાં છે.

આ બધાં પરવલયોના રેખા $x = a$ સાથેના છેદ અહીં આકૃતિ 7.1માં દર્શાવ્યા છે. આપણે $a > 0$ લીધો છે. $a < 0$ માટે પણ આ સત્ય છે. અહીં રેખા $x = a$ પરવલયો $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 2$ ને અનુક્રમે બિંદુઓ P_0, P_1, P_2, P_{-1}, P_{-2} માં છેદે છે. આ બધાં બિંદુઓ પર $\frac{dy}{dx}$ નું મૂલ્ય $2a$ છે. આ પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે, આ બધાં બિંદુઓ પર વક્રના સ્પર્શકો સમાંતર છે. આમ, $\int 2x \, dx = x^2 + c = F_c(x)$ (કહો)થી જોઈ શકાય છે કે વક્ર $y = F_c(x)$, $c \in R$ અને રેખા $x = a$, $a \in R$ નાં છેદબિંદુઓ પર દોરેલ સ્પર્શકો સમાંતર છે.



આકૃતિ 7.1

આમ, અત્રે દર્શાવેલ વિધાન $\int f(x) \, dx = F(x) + c = y$, વક્રોના સમુદાયનું નિરૂપણ કરે છે. c નાં ભિન્ન મૂલ્યો માટે આ સમુદાયના ભિન્ન સભ્યો પ્રાપ્ત થાય છે અને આ સભ્યોમાંથી કોઈ એક સભ્યને સમાંતર સ્થાનાંતરિત કરી બીજા સભ્યો મેળવી શકાય છે. આમ, આ અનિયત સંકલિતનું ભૌમિતિક નિરૂપણ છે.

7.2.2 અનિયત સંકલનના ગુણધર્મો

આ ઉપવિભાગમાં આપણે, અનિયત સંકલનના કેટલાક ગુણધર્મો સાબિત કરીશું.

(I) આપણે પરિણામ પરથી જોઈ શકીએ છીએ કે, વિકલન અને સંકલન એકબીજાની વ્યસ્ત ક્રિયાઓ છે.

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

અને $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$ જ્યાં, c એ કોઈ સ્વૈર અચળ છે.

સાબિતી : ધારો કે F એ f નો પ્રતિવિકલિત છે.

જો $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$ હોય, તો $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + c$

તેથી, $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}(\mathrm{F}(x) + c)$

$= \frac{d}{dx}(\mathrm{F}(x)) = f(x)$

એ જ રીતે, આપણે જોઈ શકીએ કે, $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$

અને તેથી $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

જ્યાં, c સ્વૈર અચળ છે, તેને સંકલનનો અચળ કહે છે.

(II) બે અનિયત સંકલિતોના વિકલિતો સમાન હોય, તો આવાં બે વિધેયો એક જ સમુદાયના વક્રો દર્શાવશે અને તેથી તે બે સમતુલ્ય છે.

સાબિતી : ધારો કે, બે વિધેયો f અને g માટે,

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$$

અથવા $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\right] = 0$

તેથી, $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx = c$ જ્યાં, c કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા છે. (કેમ?)

અથવા $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + c$

આમ, વક્રોના સમુદાયો $\{\int f(x)\,dx + c_1, c_1 \in \mathrm{R}\}$ અને $\{\int g(x)\,dx + c_2, c_2 \in \mathrm{R}\}$ સમતુલ્ય છે.

આમ, આ અર્થમાં $\int f(x)\,dx$ અને $\int g(x)\,dx$ સમતુલ્ય છે.

☛ નોંધ : $\{\int f(x)\,dx + c_1, c_1 \in \mathrm{R}\}$ અને $\{\int g(x)\,dx + c_2, c_2 \in \mathrm{R}\}$ સમુદાયની સમતુલ્યતા પ્રથા અનુસાર (વ્યાપક રીતે) $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx$ દ્વારા દર્શાવાય છે. તેમાં સ્વૈર અચળ દર્શાવાતો નથી.

(III) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

સાબિતી : ગુણધર્મ (I) પ્રમાણે,

$$\frac{d}{dx}\left[\int [f(x) + g(x)]\,dx\right] = f(x) + g(x) \qquad ...(i)$$

વળી,

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$$

$$= f(x) + g(x) \qquad ...(ii)$$

આમ, ગુણધર્મ (II) પ્રમાણે, પરિણામ (i) અને (ii) પરથી,

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(IV) કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા k માટે, $\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

સાબિતી : ગુણધર્મ (I) પ્રમાણે,

$$\frac{d}{dx} \int k\, f(x)\, dx = k\, f(x)$$

અને $\frac{d}{dx} [\, k \int f(x)\, dx\,] = k \frac{d}{dx} \int f(x)\, dx = k\, f(x)$

આમ, ગુણધર્મ (II), પ્રમાણે $\int k f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ મળે.

(V) જો $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ નિશ્ચિત સંખ્યાનાં વિધેયો હોય અને $k_1, k_2, ..., k_n$ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો ગુણધર્મ (III) અને (IV) ને વ્યાપક રીતે,

$$\int [\, k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + ... + k_n f_n(x)]\, dx$$

$$= k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx + ... + k_n \int f_n(x)\, dx$$ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

આપેલ વિધેયનો પ્રતિવિકલિત શોધવા આપણે અંતઃસ્ફુરણાથી જેનું વિકલિત એ આપેલ વિધેય હોય તેવું વિધેય શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ છીએ. જેનો પ્રતિવિકલિત જ્ઞાત હોય તેવા વિધેય શોધવાની રીતને નિરીક્ષણ દ્વારા સંકલન કહે છે. આપણે આ ક્રિયા કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા સમજીએ :

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ વિધેયોના પ્રતિવિકલિત નિરીક્ષણની રીતે શોધો :

(i) $cos\ 2x$ (ii) $3x^2 + 4x^3$ (iii) $\frac{1}{x}, x \neq 0$

ઉકેલ : (i) આપણે જેનો વિકલિત $cos\ 2x$ હોય એવું એક વિધેય શોધવું છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $\frac{d}{dx}(sin\ 2x) = 2cos\ 2x$

અથવા $cos\ 2x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(sin\ 2x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} sin\ 2x\right)$

આમ, $cos\ 2x$ નો એક પ્રતિવિકલિત $\frac{1}{2} sin\ 2x$ છે.

(ii) આપણે, જેનું વિકલિત $3x^2 + 4x^3$ થાય એવું એક વિધેય શોધવું છે.

હવે, $\frac{d}{dx}(x^3 + x^4) = 3x^2 + 4x^3$

આથી, $3x^2 + 4x^3$ નો એક પ્રતિવિકલિત $x^3 + x^4$ છે.

(iii) આપણે જાણીએ છીએ કે,

$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, x > 0$ અને $\frac{d}{dx}[\log(-x)] = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}, x < 0$

બંને પરિણામોને એકત્રિત કરતાં,

$\frac{d}{dx}(\log |x|) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ મળશે.

આમ, $\int \frac{1}{x}\, dx = \log |x|$, એ $\frac{1}{x}$ ના પ્રતિવિકલિતોમાંનો એક છે.

ઉદાહરણ 2 : નીચેના સંકલિતો મેળવો :

(i) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\, dx$ (ii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\, dx$ (iii) $\int \left(x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{1}{x}\right) dx$

ઉકેલ : અહીં $\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\, dx = \int x\, dx - \int x^{-2}\, dx$ (ગુણધર્મ V)

$$= \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} + c_1\right) - \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c_2\right)$$ (c_1, c_2 સંકલનના સ્વૈર અચળ છે.)

$$= \frac{x^2}{2} + c_1 - \frac{x^{-1}}{-1} - c_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + c_1 - c_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + c$$ (જ્યાં $c = c_1 - c_2$ સંકલનનો અન્ય સ્વૈર અચળ)

☛ **નોંધ :** હવેથી આપણે અંતિમ જવાબમાં જ સંકલનનો અચળ લખીશું.

(ii) અહીં $\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\, dx = \int x^{\frac{2}{3}}\, dx + \int 1\, dx$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + x + c$$

$$= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + x + c$$

(iii) અહીં $\int \left(x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{1}{x}\right) dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int 2e^x\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2e^x - \log|x| + c$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2e^x - \log|x| + c$$

ઉદાહરણ 3 : નીચેના સંકલિતો મેળવો :

(i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ (ii) $\int \operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx$ (iii) $\int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\, dx$

ઉકેલ : (i) અહીં, $\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx$

$$= -\cos x + \sin x + c$$

(ii) અહીં, $\int \operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$

$$= -\cot x - \operatorname{cosec} x + c$$

(iii) અહીં, $\int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \tan x \cdot \sec x\, dx$$

$$= \tan x - \sec x + c$$

ઉદાહરણ 4 : F(0) = 3 થાય તે શરત પ્રમાણે, $f(x) = 4x^3 - 6$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેય fનો પ્રતિવિકલિત F મેળવો.

ઉકેલ : $f(x)$ નો એક પ્રતિવિકલિત $x^4 - 6x$ છે.

કારણ કે $\frac{d}{dx}(x^4 - 6x) = 4x^3 - 6$

તેથી, વ્યાપક પ્રતિવિકલિત F માટે,

$F(x) = x^4 - 6x + c$, જ્યાં c સ્વૈર અચળ છે.

હવે, $F(0) = 3$ આપેલ છે.

$\therefore \quad 3 = 0 - 6 \times 0 + c$ અથવા $c = 3$

આમ, માંગેલ પ્રતિવિકલિત $F(x) = x^4 - 6x + 3$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત અનન્ય વિધેય છે.

નોંધ :

(i) આપણે જોયું કે જો fનો પ્રતિવિકલિત F હોય તો કોઈ પણ સ્વૈર અચળ c માટે $F + c$ પણ પ્રતિવિકલિત છે. આમ આ રીતે જો કોઈ વિધેય f નો એક પ્રતિવિકલિત F જાણતા હોઈએ, તો F માં કોઈ પણ અચળ ઉમેરી f ના અનંત પ્રતિવિકલિતો લખી શકીએ છીએ. તેમને $F(x) + c$, $c \in R$ દ્વારા દર્શાવી શકાય છે. વ્યવહારમાં સામાન્ય રીતે cના મૂલ્ય માટે એક વધારાની શરતનું સમાધાન કરવું જરૂરી છે. આનાથી c નું એક વિશિષ્ટ મૂલ્ય મળે છે અને તેના પરિણામ સ્વરૂપ આપેલ વિધેયનો અનન્ય સંકલિત મળે છે.

(ii) કોઈક વાર F ને બહુપદી, લઘુગણકીય, ઘાતાંકીય, ત્રિકોણમિતીય વિધેયો અને તેનાં પ્રતિવિધેયો વગેરે જેવાં જાણીતા પ્રાથમિક વિધેય દ્વારા દર્શાવી શકાય તે શક્ય હોતું નથી. તેથી $\int f(x)\, dx$ સ્પષ્ટ ***સૂત્રાત્મક વિધેય*** તરીકે ***(explicit function)*** મેળવી શકાતું નથી. ઉદાહરણ તરીકે $\int e^{-x^2} dx$ સ્પષ્ટ વિધેય તરીકે મેળવી શકાતું નથી, કારણ કે નિરીક્ષણની રીતે આપણે જેનો વિકલિત e^{-x^2} થાય એવું વિધેય જાણતા નથી.

(iii) જો સંકલનનો ચલ x સિવાય બીજો કોઈ ચલ હોય, તો સંકલનનાં સૂત્રો તે પ્રમાણે રૂપાંતરિત કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે, $\int y^4\, dy = \frac{y^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5} y^5 + c$

7.2.3 વિકલન અને સંકલનની તુલના

(1) બંને વિધેય પરની ક્રિયાઓ છે.

(2) બંને સુરેખીય હોવાના ગુણધર્મોનું પાલન કરે છે. એટલે કે,

(i) $\frac{d}{dx}[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)] = k_1 \frac{d}{dx} f_1(x) + k_2 \frac{d}{dx} f_2(x)$

(ii) $\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\, dx = k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx$

જ્યાં, k_1 અને k_2 અચળ છે.

(3) આપણે અગાઉ જોઈ ગયાં કે બધાં જ વિધેયો વિકલનીય નથી હોતાં. તે જ પ્રમાણે બધાં જ વિધેયો પ્રતિવિકલનીય પણ નથી હોતાં. આપણે કયાં વિધેયો વિકલનીય નથી અને કયાં વિધેયો પ્રતિવિકલનીય નથી તેના વિશે ઉચ્ચ કક્ષાએ શીખીશું.

(4) જો કોઈ વિધેયનું વિકલિત અસ્તિત્વ ધરાવે તો તે અનન્ય છે. પરંતુ વિધેયના સંકલિત માટે આવું નથી. તેમની સમાનતામાં ફક્ત અચળનો જ તફાવત હોય છે. એટલે કે એક વિધેયના બે સંકલિત સમતુલ્ય હોય, તો તેમની વચ્ચે ફક્ત અચળનો જ તફાવત હોય છે.

(5) જેની ઘાત આપેલ બહુપદી P ની ઘાત કરતાં એક ઓછી ઘાત હોય એવી બહુપદી કોઈ બહુપદી વિધેય P નું વિકલન કરવાના પરિણામે મળે છે. જેની ઘાત આપેલ બહુપદી P ની ઘાત કરતાં એક વધુ હોય એવી એક બહુપદી કોઈ બહુપદી P નું સંકલન કરવાના પરિણામે મળે છે.

(6) આપણે વિકલિતની ચર્ચા એક બિંદુ પર કરીએ છીએ જ્યારે સંકલિતની ચર્ચા એક બિંદુ પર ક્યારેય પણ થઈ શકે નહિ. આપણે આપેલ વિધેયના સંકલિતની વાત જ્યાં સંકલિત વ્યાખ્યાયિત હોય એવા અંતરાલ પર કરીએ છીએ. આ અંગેની ચર્ચા આપણે વિભાગ 7.7 માં કરીશું.

(7) આપેલ વિધેયના વિકલિતનો ભૌમિતિક અર્થ આપેલ વિધેયના વક્ર પર આપેલ બિંદુ આગળ સ્પર્શકનો ઢાળ એવો થાય છે. જ્યારે વિધેયનો અનિયત સંકલિત ભૌમિતિક રીતે એકબીજાને 'સમાંતર' વક્રોનો સમુદાય દર્શાવે છે. તેમાં સંકલિતના ચલ દ્વારા દર્શાવાતા અક્ષને લંબરેખા સમુદાયનાં બધાં વક્રોને જે બિંદુમાં છેદે તે બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શકો એકબીજાને સમાંતર હોય છે.

(8) કોઈ કણ દ્વારા સમય t માં કાપેલ અંતર જાણતા હોઈએ, તો આપેલ સમયે તેનો વેગ શોધવા વિકલિતનો ઉપયોગ થાય છે. જો કોઈ સમય t આગળ કણનો વેગ જાણતા હોઈએ તો આપેલ સમયમાં કાપેલ અંતર શોધવા સંકલિતનો ઉપયોગ થાય છે.

(9) વિકલન એ લક્ષ પર આધારિત ક્રિયા છે અને તે જ રીતે સંકલન માટે પણ આ સત્ય છે. આ પરિણામ આપણે વિભાગ 7.7 માં જોઈશું.

(10) વિકલન અને સંકલન એકબીજાની વ્યસ્ત પ્રક્રિયાઓ છે. તે આપણે પરિચ્છેદ 7.2.2(i) માં જોઈ ગયાં.

સ્વાધ્યાય 7.1

નીચે આપેલાં વિધેયોના પ્રતિવિકલિત (અનિયત સંકલિત) નિરીક્ષણની રીતે શોધો :

1. $\sin 2x$ **2.** $\cos 3x$ **3.** e^{2x}

4. $(ax + b)^2$ **5.** $\sin 2x - 4e^{3x}$

નીચેના સંકલિતો શોધો (પ્રશ્નો 6 થી 20) :

6. $\int (4e^{3x} + 1)\, dx$ **7.** $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right) dx$ **8.** $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$

9. $\int (2x^2 + e^x)\, dx$ **10.** $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **11.** $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\, dx$

12. $\int \frac{x^3+3x+4}{\sqrt{x}}\, dx$ **13.** $\int \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}\, dx$ **14.** $\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$

15. $\int \sqrt{x}\ (3x^2 + 2x + 3)\ dx$

16. $\int (2x - 3\cos x + e^x)\ dx$

17. $\int (2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\ dx$

18. $\int \sec x\ (\sec x + \tan x)\ dx$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec} x^2}\ dx$

20. $\int \frac{2 - 3\sin x}{\cos^2 x}\ dx$

પ્રશ્નો 21 તથા 22 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

21. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$નું પ્રતિવિકલિત .... છે.

(A) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$

(B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^2 + c$

(C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c$

(D) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + c$

22. જો $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ અને $f(2) = 0$ હોય, તો $f(x)$ .... છે.

(A) $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$

(B) $x^3 + \frac{1}{x^4} + \frac{129}{8}$

(C) $x^4 + \frac{1}{x^3} + \frac{129}{8}$

(D) $x^3 + \frac{1}{x^4} - \frac{129}{8}$

7.3 સંકલન માટેની રીતો

આગળના પરિચ્છેદમાં આપણે જે વિધેયો કોઈ વિધેયના વિકલનથી મેળવી શકાય એવાં વિધેયોના સંકલનની ચર્ચા કરી. તે રીત નિરીક્ષણ પર આધારિત રીત હતી. તેમાં આપણે જેનું વિકલિત f થાય એવા વિધેય F ને શોધવાનો પ્રયત્ન કરતા હતા. આથી આપણને fનો સંકલિત પ્રાપ્ત થાય છે. ખરેખર આ પદ્ધતિ નિરીક્ષણ પર આધારિત હોવાથી તે મોટા ભાગનાં વિધેયોના સંકલિત મેળવવા ઉચિત નથી. તેથી, આપણે આપેલ સંકલિતોને પ્રમાણિત રૂપમાં રૂપાંતરિત કરી શકીએ તેવી નવી પદ્ધતિઓ કે રીતો વિકસાવવાની આવશ્યકતા ઊભી થઈ. આ પૈકીની મુખ્ય રીતો નીચેના પર આધારિત છે :

(1) સંકલન માટે આદેશની રીત

(2) આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત

(3) ખંડશઃ સંકલનની રીત

7.3.1 સંકલન માટે આદેશની રીત

આ પરિચ્છેદમાં આપણે આદેશની રીતે સંકલન કરવા પર વિચાર કરીશું.

સ્વતંત્ર ચલ x ને t માં પરિવર્તિત કરવા $x = g(t)$ આદેશ લેતાં, આપણે $\int f(x)\ dx$ નું અન્ય સ્વરૂપમાં રૂપાંતર કરી શકીએ છીએ.

$\mathrm{I} = \int f(x)\ dx$ પર વિચાર કરીએ :

હવે, આદેશ $x = g(t)$ લેતાં, $\frac{dx}{dt} = g'(t)$

આને આપણે $dx = g'(t)\ dt$ લખી શકીએ.

તેથી, $\mathrm{I} = \int f(x)\ dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\ dt$

આ ચલ પરિવર્તનની રીત એ એક અતિઉપયોગી રીત છે અને તે આદેશની રીત તરીકે પણ પ્રચલિત છે. આ રીતમાં ઉપયોગી આદેશ શું હશે તેનું અનુમાન કરવું ઘણું મહત્ત્વનું છે. સામાન્ય રીતે આપણે જેના વિકલિતનો સંકલ્યમાં સમાવેશ થતો હોય, એવા વિધેયને આદેશ તરીકે લઈશું. નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા આ સ્પષ્ટ થાય છે :

ઉદાહરણ 5 : નીચે આપેલાં વિધેયોના x વિશે સંકલિતો મેળવો :

(i) $sin\ mx$ (ii) $2x\ sin\ (x^2 + 1)$

(iii) $\dfrac{tan^4\sqrt{x}\ sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (iv) $\dfrac{sin\ (tan^{-1}x)}{1+x^2}$

ઉકેલ : (i) આપણે જાણીએ છીએ કે mx નો વિકલિત m થાય.

તેથી, આપણે આદેશ $mx = t$ લઈશું. તેથી, $m\ dx = dt$.

$$\therefore \quad \int sin\ mx\ dx = \frac{1}{m}\int sin\ t\ dt = -\frac{1}{m}\ cos\ t + c = -\frac{1}{m}\ cos\ mx + c$$

(ii) $x^2 + 1$ નો વિકલિત $2x$ છે. તેથી આદેશ $x^2 + 1 = t$ લેતાં, $2x\ dx = dt$

$$\therefore \quad \int 2x\ sin\ (x^2 + 1)\ dx = \int sin\ t\ dt = -cos\ t + c = -cos\ (x^2 + 1) + c$$

(iii) $\sqrt{x}$ નો વિકલિત $\frac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ છે. તેથી, આપણે આદેશ $\sqrt{x} = t$ લઈશું.

તેથી, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = dt$.

$\therefore \quad dx = 2t\ dt$

આમ, $\displaystyle\int \frac{tan^4\sqrt{x}\ sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx = \int \frac{2t\ tan^4t\ sec^2t\ dt}{t} = 2\int tan^4t\ sec^2t\ dt$

ફરી, આપણે આદેશ $tan\ t = u$ લઈશું. તેથી $sec^2t\ dt = du$

$$\therefore \quad 2\int tan^4t\ sec^2t\ dt = 2\int u^4du = 2 \cdot \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{2}{5}\ tan^5t + c \qquad (u = tan\ t)$$

$$= \frac{2}{5}\ tan^5\sqrt{x} + c \qquad (t = \sqrt{x})$$

તેથી, $\displaystyle\int \frac{tan^4\sqrt{x}\ sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx = \frac{2}{5}\ tan^5\sqrt{x} + c$

બીજી રીત : આદેશ $tan\sqrt{x} = t$ પણ લઈ શકાય.

(iv) $tan^{-1}x$ નું વિકલન $\dfrac{1}{1+x^2}$ છે. તેથી, આદેશ $tan^{-1}x = t$ લેતાં, $\dfrac{dx}{1+x^2} = dt$ થાય.

$$\therefore \quad \int \frac{sin\ (tan^{-1}x)}{1+x^2}\ dx = \int sin\ t\ dt = -cos\ t + c = -cos\ (tan^{-1}x) + c$$

હવે આપણે ત્રિકોણમિતીય વિધેયોના કેટલાક મહત્ત્વના સંકલ્યનાં પ્રમાણિત સંકલિતો આદેશની રીતે મેળવીશું.

(i) $\int tan\ x\ dx = \log |sec\ x| + c$

અહીં, $\int tan\ x\ dx = \int \frac{sin\ x}{cos\ x}\ dx$

હવે $cos\ x = t$ લેતાં, $sin\ x\ dx = -dt$

$\therefore \quad \int tan\ x\ dx = -\int \frac{1}{t}\ dt = -\log |t| + c = -\log |cos\ x| + c$

અથવા $\int tan\ x\ dx = \log |sec\ x| + c$

(ii) $\int cot\ x\ dx = \log |sin\ x| + c$

અહીં, $\int cot\ x\ dx = \int \frac{cos\ x}{sin\ x}\ dx$

હવે, $sin\ x = t$ લેતાં, $cos\ x\ dx = dt$

$\therefore \quad \int cot\ x\ dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c = \log |sin\ x| + c$

(iii) $\int sec\ x\ dx = \log |sec\ x + tan\ x| + c$

અહીં, $\int sec\ x\ dx = \int \frac{sec\ x\,(sec\ x + tan\ x)}{(sec\ x + tan\ x)}\ dx$

હવે, $sec\ x + tan\ x = t$ લેતાં, $sec\ x\,(tan\ x + sec\ x)\ dx = dt$

$\therefore \quad \int sec\ x\ dx = \int \frac{1}{t}\ dt = \log |t|$

$= \log |sec\ x + tan\ x| + c$

(iv) $\int cosec\ x\ dx = \log |cosec\ x - cot\ x| + c$

અહીં, $\int cosec\ x\ dx = \int \frac{cosec\ x\,(cosec\ x + cot\ x)}{(cosec\ x + cot\ x)}\ dx$

હવે, $cosec\ x + cot\ x = t$ લેતાં, $-cosec\ x\,(cosec\ x + cot\ x)\ dx = dt$

$$\therefore \quad \int cosec\ x\ dx = -\int \frac{dt}{t}$$

$$= -\log |t| + c$$

$$= -\log |cosec\ x + cot\ x| + c$$

$$= -\log \left|\frac{cosec^2 x - cot^2 x}{cosec\ x - cot\ x}\right| + c$$

$$= \log |cosec\ x - cot\ x| + c$$

ઉદાહરણ 6 : નીચેના સંકલિતો મેળવો :

(i) $\int sin^3 x \cdot cos^2 x\ dx$ (ii) $\int \frac{sin\ x}{sin\ (x + a)}\ dx$ (iii) $\int \frac{1}{1 + tan\ x}\ dx$

ઉકેલ : (i) અહીં $\int sin^3 x \cdot cos^2 x\ dx = \int sin^2 x \cdot cos^2 x\ (sin\ x)\ dx$

$= \int (1 - cos^2 x)\ cos^2 x\ (sin\ x)\ dx$

હવે, $cos\ x = t$ લેતાં, $dt = -sin\ x\ dx$

$$\therefore \quad \int sin^3x \cdot cos^2x \, dx = -\int (1 - t^2)\, t^2 \, dt$$
$$= -\int (t^2 - t^4)\, dt$$
$$= -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + c$$
$$= -\frac{1}{3} cos^3x + \frac{1}{5} cos^5x + c$$

(ii) $x + a = t$ લેતાં, $dx = dt$ થાય.

$$\therefore \quad \int \frac{sin\, x}{sin\,(x + a)}\, dx = \int \frac{sin\,(t - a)}{sin\, t}\, dt$$
$$= \int \frac{sin\, t\, cos\, a - cos\, t\, sin\, a}{sin\, t}\, dt$$
$$= cos\, a \int dt - sin\, a \int cot\, t\, dt$$
$$= (cos\, a)\, t - (sin\, a)\, [\log |\, sin\, t\,| + c_1]$$
$$= (x + a)\, cos\, a - sin\, a\, [\log |\, sin\,(x + a)\,| + c_1]$$
$$= x\, cos\, a - sin\, a \log |\, sin\,(x + a)\,| - c_1\, sin\, a + a\, cos\, a$$

તેથી, $\displaystyle\int \frac{sin\, x}{sin\,(x + a)}\, dx = x\, cos\, a - sin\, a \log |\, sin\,(x + a)\,| + c$

જ્યાં, $c = -c_1\, sin\, a + a\, cos\, a$ પણ બીજો સ્વૈર અચળ છે.

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{1 + tan\, x}\, dx = \int \frac{cos\, x\, dx}{cos\, x + sin\, x}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(cos\, x + sin\, x + cos\, x - sin\, x)\, dx}{(cos\, x + sin\, x)}$$
$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{cos\, x - sin\, x}{cos\, x + sin\, x}\, dx$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{c_1}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{cos\, x - sin\, x}{cos\, x + sin\, x}\, dx \qquad ...(i)$$

હવે, $\displaystyle I = \int \frac{cos\, x - sin\, x}{cos\, x + sin\, x}\, dx$ લઈએ.

$cos\, x + sin\, x = t$ લેતાં, $(cos\, x - sin\, x)\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t} = \log |\, t\,| + c_2 = \log |\, cos\, x + sin\, x\,| + c_2$$

(i) માં મૂકતાં,

$$\int \frac{dx}{1 + tan\, x}\, dx = \frac{x}{2} + \frac{c_1}{2} + \frac{1}{2} \log |\, cos\, x + sin\, x\,| + \frac{c_2}{2}$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log |\, cos\, x + sin\, x\,| + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2}$$
$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log |\, cos\, x + sin\, x\,| + c \qquad \left(c = \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2}\right)$$

સ્વાધ્યાય 7.2

પ્રશ્નો 1થી 37 માં આપેલાં વિધેયોના સંકલિત મેળવો : (જ્યાં વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યાં)

1. $\frac{2x}{1+x^2}$ **2.** $\frac{(\log x)^2}{x}$ **3.** $\frac{1}{x+x\log x}$

4. $\sin x \sin (\cos x)$ **5.** $\sin (ax+b) \cos (ax+b)$

6. $\sqrt{ax+b}$ **7.** $x\sqrt{x+2}$ **8.** $x\sqrt{1+2x^2}$

9. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$ **10.** $\frac{1}{x-\sqrt{x}}$ **11.** $\frac{x}{\sqrt{x+4}}, x > -4$

12. $(x^3-1)^{\frac{1}{3}} x^5$ **13.** $\frac{x^2}{(2+3x^3)^3}$ **14.** $\frac{1}{x(\log x)^m}, x > 0, m \neq 1$

15. $\frac{x}{9-4x^2}$ **16.** e^{2x+3} **17.** $\frac{x}{e^{x^2}}$

18. $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ **19.** $\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ **20.** $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

21. $\tan^2(2x-3)$ **22.** $\sec^2(7-4x)$ **23.** $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

24. $\frac{2\cos x-3\sin x}{6\cos x+4\sin x}$ **25.** $\frac{1}{\cos^2 x(1-\tan x)^2}$ **26.** $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

27. $\sqrt{\sin 2x}\cos 2x$ **28.** $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ **29.** $\cot x \log \sin x$

30. $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ **31.** $\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$ **32.** $\frac{1}{1+\cot x}$

33. $\frac{1}{1-\tan x}$ **34.** $\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}$ **35.** $\frac{(1+\log x)^2}{x}$

36. $\frac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}$ **37.** $\frac{x^3\sin(\tan^{-1}x^4)}{1+x^8}$

પ્રશ્નો 38 તથા 39 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

38. $\int \frac{(10x^9 + 10^x \log_e 10)\,dx}{x^{10} + 10^x} = \dots\dots\dots$

(A) $10^x - x^{10} + c$ (B) $10^x + x^{10} + c$

(C) $(10^x - x^{10})^{-1} + c$ (D) $\log(10^x + x^{10}) + c$

39. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \dots\dots\dots$

(A) $\tan x + \cot x + c$ (B) $\tan x - \cot x + c$

(C) $\tan x \cot x + c$ (D) $\tan x - \cot 2x + c$

7.3.2 ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમોનો ઉપયોગ કરીને સંકલન

જ્યારે સંકલ્ય કોઈ ત્રિકોણમિતીય વિધેય ધરાવતું હોય, ત્યારે આપણે જાણીતા નિત્યસમનો ઉપયોગ કરી સંકલન કરી શકીએ છીએ. નીચેનાં ઉદાહરણો દ્વારા આ સમજી શકાશે :

ઉદાહરણ 7 : (i) $\int \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$ (iii) $\int \sin^3 x\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : નિત્યસમ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ યાદ કરો. તે પરથી,

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ મળશે.

$$\therefore \int \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

(ii) નિત્યસમ $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$ યાદ કરો. (કેમ?)

આથી, $\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right) + c$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + c$$

(iii) નિત્યસમ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ પરથી, આપણને $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ મળશે.

$$\therefore \int \sin^3 x\, dx = \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + c$$

બીજી રીત :

$\int sin^3x\ dx = \int sin^2x\ sin\ x\ dx = \int (1 - cos^2x)\ sin\ x\ dx$

હવે, $cos\ x = t$ લેતાં, $-sin\ dx = dt$

$\therefore \int sin^3x\ dx = -\int (1 - t^2)\ dt = -\int dt + \int t^2\ dt$

$$= -t + \frac{t^3}{3} + c$$

$$= -cos\ x + \frac{1}{3}cos^3x + c$$

નોંધ : ત્રિકોણમિતીય નિત્યસમોનો ઉપયોગ કરી બંને જવાબો સમાન છે તેવું દર્શાવી શકાય.

સ્વાધ્યાય 7.3

પ્રશ્નો 1થી 22 માં આપેલાં વિધેયોના સંકલિત મેળવો :

1. $sin^2\ (2x + 5)$ **2.** $sin\ 3x\ cos\ 4x$ **3.** $cos\ 2x\ cos\ 4x\ cos\ 6x$

4. $sin^3\ (2x + 1)$ **5.** $sin^3\ x\ cos^3\ x$ **6.** $sin\ x\ sin\ 2x\ sin\ 3x$

7. $sin\ 4x\ sin\ 8x$ **8.** $\frac{1 - cos\ x}{1 + cos\ x}$ **9.** $\frac{cos\ x}{1 + cos\ x}$

10. $sin^4\ x$ **11.** $cos^4\ 2x$ **12.** $\frac{sin^2x}{1 + cos\ x}$

13. $\frac{cos\ 2x - cos\ 2\alpha}{cos\ x - cos\ \alpha}$ **14.** $\frac{cos\ x - sin\ x}{1 + sin\ 2x}$ **15.** $tan^3\ 2x\ sec\ 2x$

16. $tan^4\ x$ **17.** $\frac{sin^3x + cos^3x}{sin^2x\ cos^2x}$ **18.** $\frac{cos\ 2x + 2sin^2x}{cos^2x}$

19. $\frac{1}{sin\ x\ cos^3x}$ **20.** $\frac{cos\ 2x}{(cos\ x + sin\ x)^2}$ **21.** $sin^{-1}\ (cos\ x)$

22. $\frac{1}{cos\ (x - a)\ cos\ (x - b)}$

પ્રશ્નો 23 તથા 24 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

23. $\int \frac{sin^2x - cos^2x}{sin^2x\ cos^2x}\ dx = ...$

(A) $tan\ x + cot\ x + c$ (B) $tan\ x + cosec\ x + c$

(C) $-tan\ x + cot\ x + c$ (D) $tan\ x + sec\ x + c$

24. $\int \frac{e^x(1 + x)}{cos^2\ (e^x x)}\ dx = ...$

(A) $-cot\ (ex^x) + c$ (B) $tan\ (xe^x) + c$

(C) $tan\ (e^x) + c$ (D) $cot\ (e^x) + c$

7.4 કેટલાંક વિશિષ્ટ વિધેયોના સંકલિત

આ વિભાગમાં આપણે સંકલન કરવા માટે નીચે દર્શાવેલ મહત્ત્વપૂર્ણ સૂત્રો તારવીશું અને તેના ઉપયોગથી સંબંધિત કેટલાંક પ્રમાણિત સંકલિતો મેળવીશું :

(1) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

(2) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

(3) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + c$

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + c$ **($a > 0$)**

(6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

હવે, આપણે ઉપર્યુક્ત પરિણામો સાબિત કરીશું :

(1) અહીં, $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|x-a| - \log|x+a|\right] + c$$

$$= \frac{1}{2a} \log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

(2) ઉપરના પરિણામ (1) પરથી આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right]$$

$$\therefore \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\ [-\log|a - x| + \log|a + x|] + c$$

$$= \frac{1}{2a} \log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

નોંધ : (1) માં ઉપયોગમાં લીધેલ રીતને પરિચ્છેદ 7.5 માં સમજીશું.

(3) $x = a\ tan\,\theta$ લેતાં, $dx = a\ sec^2\theta\ d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a\ sec^2\theta\ d\theta}{a^2 tan^2\theta + a^2}$$

$$= \frac{1}{a} \int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\ \theta + c$$

$$= \frac{1}{a}\ tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

(4) $x = a\ sec\,\theta$ લેતાં, $dx = a\ sec\theta\ tan\theta\ d\theta$ **($a > 0$)**

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\ sec\,\theta\ tan\,\theta}{\sqrt{a^2 sec^2\theta - a^2}}\ d\theta$$

$$= \int sec\theta\ d\theta$$

$$= \log|sec\theta + tan\theta| + c_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + c_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \log a + c_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c, \text{ જ્યાં, } c = c_1 - \log a$$

(5) $x = a\ sin\,\theta$ લેતાં, $dx = a\ cos\theta\ d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\ cos\,\theta\ d\,\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 sin^2\theta}}$$ **($a > 0$)**

$$= \int d\theta = \theta + c = sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

(6) $x = a\ tan\,\theta$ લેતાં, $dx = a\ sec^2\theta\ d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a\ sec^2\theta\ d\,\theta}{\sqrt{a^2 tan^2\theta + a^2}}$$ **($a > 0$)**

$$= \int sec\theta\ d\theta$$

$$= \log|sec\theta + tan\theta| + c_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right| + c_1$$

$$= \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| - \log a + c_1$$

$$= \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c, \text{ જ્યાં, } c = c_1 - \log a$$

આ પ્રમાણિત રૂપોનો ઉપયોગ કરી હવે આપણે જેનો ઉપયોગ બીજા સંકલિતો શોધવા કરી શકાય એવા બીજાં કેટલાંક રૂપો મેળવીશું.

(7) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ પ્રકારના સંકલિતો મેળવવા આપણે,

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

હવે, $x + \frac{b}{2a} = t$ લેતાં, $dx = dt$ થશે તથા $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$ લેતાં,

હવે, $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$નાં ચિહ્ન અનુસાર આપણે આપેલ સંકલિતનું $\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2}$ સ્વરૂપમાં રૂપાંતર થશે અને તેનું સંકલિત મેળવી શકાય.

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ સ્વરૂપનું સંકલિત મેળવવા આપણે આગળ આપેલ (7) પ્રમાણે આગળ વધીશું અને પ્રમાણિત સ્વરૂપનો ઉપયોગ કરી સંકલિત મેળવીશું.

(9) $\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx$, (જ્યાં, p, q, a, b, c અચળો છે.) આ સ્વરૂપના સંકલિતો મેળવવા સૌપ્રથમ આપણે એવા બે અચળ A અને B શોધીશું કે જેથી, $px + q = A\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + B = A(2ax + b) + B$

A અને B મેળવવા આપણે બંને બાજુએ x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવીશું. A અને B મેળવ્યા બાદ સંકલિત જાણીતા પ્રમાણિત સ્વરૂપનો ઉપયોગ કરી મેળવી શકાય.

(10) $\int \frac{(px + q)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$, પ્રકારનાં સંકલિતો મેળવવા આપણે (9)માં દર્શાવેલ રીતે આગળ વધીશું અને સંકલિતને જાણીતા પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ફેરવીશું.

હવે, આપણે ઉદાહરણોથી ઉપરની સંકલ્પનાઓ સ્પષ્ટ કરીશું.

ઉદાહરણ 8 : નીચેના સંકલિતો મેળવો :

(i) $\int \frac{dx}{x^2 - 16}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$

ઉકેલ : (i) $\int \frac{dx}{x^2 - 16} = \int \frac{dx}{x^2 - 4^2} = \frac{1}{8} \log \left| \frac{x - 4}{x + 4} \right| + c$ (7.4(1) પ્રમાણે)

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}}$

$x - 1 = t$ લેતાં, $dx = dt$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = sin^{-1}(t) + c$ (7.4(5) પ્રમાણે)

$= sin^{-1}(x - 1) + c$

ઉદાહરણ 9 : નીચેના સંકલિતો મેળવો :

(i) $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13}$ (ii) $\int \frac{dx}{3x^2 + 13x - 10}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 2x}}$

ઉકેલ : (i) અહીં, $x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 13 = (x - 3)^2 + 4$

તેથી, $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} = \int \frac{1}{(x-3)^2 + 2^2} dx$

$(x - 3) = t$ લેતાં, $dx = dt$

$\therefore \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 13} = \int \frac{dt}{t^2 + 2^2}$

$= \frac{1}{2} tan^{-1} \left(\frac{t}{2}\right) + c$ (7.4(3) પ્રમાણે)

$= \frac{1}{2} tan^{-1} \left(\frac{x-3}{2}\right) + c$

(ii) આપેલ સંકલિત 7.4(7) પ્રકારનું છે. આપણે આપેલ સંકલ્યના છેદનો વિચાર કરીએ.

$3x^2 + 13x - 10 = 3\left(x^2 + \frac{13}{3}x - \frac{10}{3}\right)$

$= 3\left[\left(x + \frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2\right]$ (પૂર્ણવર્ગ કરતાં)

તેથી, $\int \frac{dx}{3x^2 + 13x - 10} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$

$x + \frac{13}{6} = t$ લેતાં, $dx = dt$

$\therefore \int \frac{dx}{3x^2 + 13x - 10} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$

$= \frac{1}{3 \times 2 \times \frac{17}{6}} \log \left|\frac{t - \frac{17}{6}}{t + \frac{17}{6}}\right| + c_1$

$= \frac{1}{17} \log \left|\frac{x + \frac{13}{6} - \frac{17}{6}}{x + \frac{13}{6} + \frac{17}{6}}\right| + c_1$

$$= \frac{1}{17} \log \left|\frac{6x-4}{6x+30}\right| + c_1$$

$$= \frac{1}{17} \log \left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + c_1 + \frac{1}{17} \log \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{17} \log \left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + c, \text{ જ્યાં } c = c_1 + \frac{1}{17} \log \frac{1}{3}$$

(iii) અહીં, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2-\frac{2x}{5}\right)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}} \qquad \text{(પૂર્ણવર્ગ કરતાં)}$$

$x - \frac{1}{5} = t$ લેતાં, $dx = dt$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| t + \sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2} \right| + c \qquad \text{(7.4(4) પ્રમાણે)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2-\frac{2x}{5}} \right| + c$$

ઉદાહરણ 10 : નીચેના સંકલિતો મેળવો :

(i) $\displaystyle\int \frac{(x+2)dx}{2x^2+6x+5}$ (ii) $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

ઉકેલ : સૂત્ર 7.4 (9)નો ઉપયોગ કરી આપણે સંકલ્યના અંશને નીચે પ્રમાણે દર્શાવીશું :

$x + 2 = A \frac{d}{dx}(2x^2 + 6x + 5) + B = A(4x + 6) + B$

બંને બાજુએ xના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$4A = 1$ અને $6A + B = 2$.

આથી, $A = \frac{1}{4}$ અને $B = \frac{1}{2}$

$$\therefore \int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$$

$$= \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{2} I_2 \qquad \text{(ધારો) ...(1)}$$

I_1 માં $2x^2 + 6x + 5 = t$ લેતાં, $(4x + 6)\,dx = dt$

$$\therefore I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c_1$$

$$= \log |2x^2 + 6x + 5| + c_1 \qquad ...(2)$$

અને $I_2 = \int \frac{dx}{2x^2 + 6x + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 3x + \frac{5}{2}}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$x + \frac{3}{2} = t$ લેતાં, $dx = dt$

$\therefore\ I_2 = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} \tan^{-1} (2t) + c_2$ (7.4(3) પ્રમાણે)

$= \tan^{-1} 2\left(x + \frac{3}{2}\right) + c_2$

$= \tan^{-1} (2x + 3) + c_2$ ...(3)

(2) અને (3) નો ઉપયોગ (1) માં કરતાં,

$\int \frac{x + 2}{2x^2 + 6x + 5} dx = \frac{1}{4} \log |2x^2 + 6x + 5| + \frac{1}{2} \tan^{-1} (2x + 3) + c$ મળશે.

જ્યાં $c = \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{2}$

(ii) આપેલ સંકલિત 7.4(10) સ્વરૂપનું છે. હવે આપણે $(x + 3)$ ને નીચે દર્શાવેલ સ્વરૂપમાં અભિવ્યક્ત કરીએ :

$x + 3 = A \frac{d}{dx}(5 - 4x - x^2) + B = A(-4 - 2x) + B$

બંને બાજુએ x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$-2A = 1$ અને $-4A + B = 3$

$\therefore\ A = -\frac{1}{2}$ અને $B = 1$

$\therefore\ \int \frac{x + 3}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{(-4 - 2x)\, dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$

$= -\frac{1}{2} I_1 + I_2$ ...(1)

I_1 માં $5 - 4x - x^2 = t$ લેતાં, $(-4 - 2x)\, dx = dt$

$\therefore\ I_1 = \int \frac{(-4 - 2x)\, dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + c_1$

$= 2\sqrt{5 - 4x - x^2} + c_1$ ...(2)

હવે, $I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9 - (x + 2)^2}}$

$x + 2 = t$ લેતાં, $dx = dt$

$$\therefore \quad I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + c_2 \qquad (7.4(5) \text{ પ્રમાણે})$$

$$= sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c_2 \qquad ...(3)$$

(2) અને (3) નો ઉપયોગ (1)માં કરતાં,

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\, dx = -\int \sqrt{5-4x-x^2} + sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$$

જ્યાં $c = c_2 - \frac{c_1}{2}$

સ્વાધ્યાય 7.4

પ્રશ્નો 1થી 23 માં આપેલાં વિધેયોના સંકલિત મેળવો :

1. $\frac{3x^2}{x^6+1}$ **2.** $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ **3.** $\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

4. $\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$ **5.** $\frac{3x}{1+2x^4}$ **6.** $\frac{x^2}{1-x^6}$

7. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ **8.** $\frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$ **9.** $\frac{sec^2 x}{\sqrt{tan^2 x+4}}$

10. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **11.** $\frac{1}{9x^2+6x+5}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

13. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ **14.** $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ **15.** $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

16. $\frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$ **17.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ **18.** $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$

19. $\frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$ **20.** $\frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ **21.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

22. $\frac{x+3}{x^2-2x-5}$ **23.** $\frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

પ્રશ્નો 24 તથા 25 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

24. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} =$ ....

(A) $x\, tan^{-1}(x+1) + c$ (B) $tan^{-1}(x+1) + c$

(C) $(x+1)\, tan^{-1}x + c$ (D) $tan^{-1}x + c$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ = ...

(A) $\frac{1}{9}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+c$ (B) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{8x-9}{9}\right)+c$

(C) $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{8}\right)+c$ (D) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{9x-8}{9}\right)+c$

7.5 આંશિક અપૂર્ણાંકની રીત

આપણે યાદ કરીએ કે, આપણે P(x) અને Q(x) એ ચલ x ની બહુપદીઓ હોય અને Q(x) $\neq 0$ હોય તેવી બે બહુપદીઓના ભાગાકાર $\frac{P(x)}{Q(x)}$ તરીકે ***સંમેય વિધેય*** વ્યાખ્યાયિત કર્યું હતું. હવે જો P(x) ની ઘાત એ Q(x) ની ઘાત કરતાં ઓછી હોય, તો સંમેય વિધેયને **ઉચિત સંમેય** વિધેય અને આમ ન બને તો તેને ***અનુચિત સંમેય વિધેય*** કહીશું. અનુચિત સંમેય વિધેયને **ભાગાકાર**ની રીતનો ઉપયોગ કરી ***ઉચિત સંમેય વિધેય અને બહુપદીના સરવાળા*** તરીકે પરિવર્તિત કરી શકાય. તેથી જો $\frac{P(x)}{Q(x)}$ એ અનુચિત સંમેય વિધેય હોય, તો $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ લખી શકાય. અહીં T(x) એ x માં વાસ્તવિક બહુપદી છે અને $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ એ ઉચિત સંમેય વિધેય છે. હવે, આપણે બહુપદીનું સંકલન કેવી રીતે કરવું તે જાણીએ છીએ તથા આપેલ કોઈ પણ સંમેય વિધેયનું સંકલિત ઉચિત સંમેય વિધેયના સંકલિતમાં પરિવર્તિત કરી શકાય. અહીં આપણે જે ઉચિત સંમેય વિધેયના સંકલનની ચર્ચા કરવાના છીએ તેના છેદની બહુપદીના અવયવો સુરેખ કે દ્વિઘાત અવયવો હોય તેવો વિકલ્પ લઈશું. જો આપણે $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ મેળવવા માંગતા હોઈએ, તો $\frac{P(x)}{Q(x)}$ એ ઉચિત સંમેય વિધેય છે. એક સંમેય વિધેયને બે કે તેથી વધુ યોગ્ય પ્રકારનાં સંમેય વિધેયના સરવાળાના સ્વરૂપમાં આંશિક અપૂર્ણાંકની રીતે હંમેશાં મૂકી શકાય છે. ત્યાર બાદ સરળતાથી કોઈ જાણીતા પ્રમાણિત રૂપના ઉપયોગથી સંકલન કરી શકીએ. નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટક 7.2 આપણને કેટલાક આપેલ ભિન્ન સંમેય વિધેય સાથે સંકળાયેલ આંશિક અપૂર્ણાંકો દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 7.2

અનુ.નં.	સંમેય વિધેયનું સ્વરૂપ	આંશિક અપૂર્ણાંકનું સ્વરૂપ
(1)	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}$, $a \neq b$	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$
(2)	$\frac{px+q}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}$
(3)	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, a, b, c ભિન્ન	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}$
(4)	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$, $a \neq b$	$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}$
(5)	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$	$\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$ જ્યાં x^2+bx+c નું સુરેખ અવયવોમાં અવયવીકરણ શક્ય નથી.

ઉપર દર્શાવેલ કોષ્ટકમાં A, B, C વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. તેમનાં અનન્ય મૂલ્ય નક્કી કરી શકાય.

ઉદાહરણ 11 : $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, આપેલ સંકલ્ય ઉચિત સંમેય વિધેય છે. તેથી, આંશિક અપૂર્ણાંકની રીતે (કોષ્ટક 7.2(i)) પ્રમાણે આપણે તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \qquad ...(1)$$

A અને B વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. તે આપણે અનન્ય રીતે નક્કી કરી શકીએ છીએ.

આ પરથી $1 = A(x + 2) + B(x + 1)$

હવે, બંને બાજુ x ના સહગુણક અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$A + B = 0$ અને $2A + B = 1$

આ સમીકરણો ઉકેલતાં $A = 1$ અને $B = -1$ મળશે.

આમ, આપેલ સંકલ્ય નીચેના સ્વરૂપમાં પ્રાપ્ત થશે :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x+2}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log|x + 1| - \log|x + 2| + c$$

$$= \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c$$

નોંધ : ઉપર્યુક્ત સમીકરણ (1) એ નિત્યસમ છે એટલે કે તે ગમે તે સંજોગોમાં (x ની બધી શક્ય કિંમતો માટે) સત્ય છે. કેટલાક લેખકો આ હકીકત દર્શાવવા માટે '≡' સંકેત વાપરે છે. આ દર્શાવે છે કે આપેલ વિધાન નિત્યસમ છે અને તેઓ '=' વાપરીને દર્શાવે છે કે આપેલ વિધાન સમીકરણ છે એટલે કે x ની માત્ર કેટલીક ચોક્કસ કિંમતો માટે તે સત્ય વિધાન છે.

ઉદાહરણ 12 : $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^2-5x+6}$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, સંકલ્ય $\frac{(x^2+1)}{x^2-5x+6}$ ઉચિત સંમેય વિધેય નથી. તેથી આપણે $(x^2 + 1)$ ને $x^2 - 5x + 6$ વડે ભાગીશું.

તેથી, $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{(x-2)(x-3)}$ થશે.

ધારો કે, $\frac{5x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$

તેથી, $5x - 5 = A(x - 3) + B(x - 2)$.

બંને બાજુએ x ના સહગુણક અને અચળ પદ સરખાવતાં,

A + B = 5 અને 3A + 2B = 5 મળશે.

આ સમીકરણો ઉકેલતાં, A = –5 અને B = 10 મળશે.

તેથી, $\dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 - \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{10}{x-3}$

$$\therefore \int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 10\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= x - 5\log|x-2| + 10\log|x-3| + c$$

ઉદાહરણ 13 : $\displaystyle\int \frac{(3x-2)dx}{(x+1)^2(x+3)}$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, આપેલ સંકલ્ય કોષ્ટક 7.2(4) માં આપેલ પ્રકારનું સંકલ્ય છે. તેથી, આપણે

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3} \text{ લખીશું.}$$

તેથી, $3x - 2 = A(x+1)(x+3) + B(x+3) + C(x+1)^2$

$= A(x^2 + 4x + 3) + B(x + 3) + C(x^2 + 2x + 1)$

હવે, બંને બાજુએ x^2 તથા x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં,

A + C = 0, 4A + B + 2C = 3 અને 3A + 3B + C = –2.

આ સમીકરણો ઉકેલતાં, $A = \frac{11}{4}$, $B = \frac{-5}{2}$ અને $C = \frac{-11}{4}$.

આમ, આપેલ સંકલ્ય નીચેના સ્વરૂપમાં પ્રાપ્ત થશે :

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2} - \frac{11}{4(x+3)}$$

$$\therefore \int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}dx = \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2}\,dx - \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4}\log|x+3| + c$$

$$= \frac{11}{4}\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2(x+1)} + c$$

ઉદાહરણ 14 : $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ માં $x^2 = y$ લઈએ.

તેથી $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \dfrac{y}{(y+1)(y+4)}$

હવે, ધારો કે $\dfrac{y}{(y+1)(y+4)} = \dfrac{A}{y+1} + \dfrac{B}{y+4}$

$\therefore \quad y = A(y + 4) + B(y + 1)$

હવે, બંને બાજુએ y ના સહગુણક અને અચળ પદ સરખાવતાં, $A + B = 1$ અને $4A + B = 0$ મળશે. તેમને ઉકેલતાં,

$A = \frac{-1}{3}$ અને $B = \frac{4}{3}$

તેથી, $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \dfrac{-1}{3(x^2+1)} + \dfrac{4}{3(x^2+4)}$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{-1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= \frac{-1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{-1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + c$$

ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં આદેશ ફક્ત આંશિક અપૂર્ણાંકના ભાગ પૂરતો જ હતો. તે સંકલન માટેનો આદેશ નહોતો. હવે આપણે એક એવા ઉદાહરણની ચર્ચા કરીએ કે, જેમાં સંકલનમાં આદેશ અને આંશિક અપૂર્ણાંક બંને રીતનો સંયુક્ત રીતે ઉપયોગ થતો હોય.

ઉદાહરણ 15 : $\displaystyle\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\,d\phi$ મેળવો.

ઉકેલ : $y = \sin\phi$ લેતાં, $dy = \cos\phi\,d\phi$

$$\therefore \quad \int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\,d\phi = \int \frac{(3y-2)\,dy}{5-(1-y^2)-4y}$$

$$= \int \frac{(3y-2)\,dy}{y^2-4y+4}$$

$$= \int \frac{(3y-2)\,dy}{(y-2)^2} = I \text{ (ધારો)}$$

હવે, આપણે $\dfrac{(3y-2)}{(y-2)^2} = \dfrac{A}{y-2} + \dfrac{B}{(y-2)^2}$ લખીશું. **(કોષ્ટક 7.2(2) પરથી)**

$3y - 2 = A(y - 2) + B$

હવે, બંને બાજુએ y ના સહગુણક અને અચળ પદ સરખાવતાં,

A = 3 અને B – 2A = –2 મળશે. તેથી A = 3 અને B = 4 મળશે.

આમ, માંગેલ સંકલિત નીચેના સ્વરૂપમાં પ્રાપ્ત થશે :

$$I = \int \left(\frac{3}{y-2} + \frac{4}{(y-2)^2} \right) dy = 3\int \frac{dy}{y-2} + 4\int \frac{dy}{(y-2)^2}$$

$$= 3 \log |y-2| + 4 \left(\frac{-1}{y-2} \right) + c$$

$$= 3 \log |y-2| + \frac{4}{2-y} + c$$

$$= 3 \log |\sin\phi - 2| + \frac{4}{2-\sin\phi} + c$$

$$= 3 \log (2-\sin\phi) + \frac{4}{2-\sin\phi} + c \qquad (2 - \sin\phi \text{ હંમેશાં ધન છે.})$$

ઉદાહરણ 16 : $\int \frac{(x^2+x+1)\,dx}{(x+2)(x^2+1)}$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, આપેલ સંકલ્ય ઉચિત સંમેય વિધેય છે. તેથી તેને આંશિક અપૂર્ણાંકની રીતે (કોષ્ટક 7.2(5) પ્રમાણે),

$$\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \text{ લખીશું.}$$

$\therefore\ x^2 + x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 2)$

હવે, બંને બાજુએ x^2 તથા x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં, A + B = 1, 2B + C = 1 અને A + 2C = 1 મળે. આ સમીકરણો ઉકેલતાં, $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{2}{5}$ અને $C = \frac{1}{5}$ મળશે. તેથી, આપેલ સંકલ્ય,

$$\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{(2x+1)}{5(x^2+1)}$$

$$\therefore \int \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx = \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+1^2}$$

$$= \frac{3}{5} \log |x+2| + \frac{1}{5} \log (x^2+1) + \frac{1}{5} \tan^{-1}x + c$$

સ્વાધ્યાય 7.5

પ્રશ્નો 1થી 21 માં આપેલાં વિધેયોના સંકલિત મેળવો :

1. $\frac{x}{(x+1)(x+2)}$ **2.** $\frac{1}{x^2-9}$ **3.** $\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

4. $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ **5.** $\frac{2x}{x^2+3x+2}$ **6.** $\frac{1-x^2}{x(1-2x)}$

7. $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ **8.** $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+2)}$ **9.** $\dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$

10. $\dfrac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$ **11.** $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$ **12.** $\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$

13. $\dfrac{2}{(1-x)(1+x^2)}$ **14.** $\dfrac{3x-1}{(x+2)^2}$ **15.** $\dfrac{1}{x^4-1}$

16. $\dfrac{1}{x(x^n+1)}$ (**સૂચન** : અંશ અને છેદને x^{n-1} વડે ગુણો અને $x^n = t$ લો.)

17. $\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ (**સૂચન** : $\sin x = t$ લો.)

18. $\dfrac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ **19.** $\dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$ **20.** $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$

21. $\dfrac{1}{(e^x-1)}$ (**સૂચન** : $e^x = t$ લો.)

પ્રશ્નો 22 તથા 23 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

22. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) $\log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right| + c$ (B) $\log\left|\dfrac{(x-2)^2}{x-1}\right| + c$

(C) $\log\left|\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2\right| + c$ (D) $\log|(x-1)(x-2)| + c$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(A) $\log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$ (B) $\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$

(C) $-\log|x| + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + c$ (D) $\frac{1}{2}\log|x| + \log(x^2+1) + c$

7.6 ખંડશઃ સંકલનની રીત

આ વિભાગમાં આપણે સંકલન માટેની એક વધુ રીતની ચર્ચા કરીશું. તે બે વિધેયના ગુણાકારના સંકલન માટેની ખૂબ જ ઉપયોગી રીત છે.

જો u અને v એ x નાં વિકલનીય વિધેયો હોય, તો વિકલનના ગુણાકારના નિયમ પ્રમાણે,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

બંને બાજુ સંકલન કરતાં,

$$uv = \int u \frac{dv}{dx}\, dx + \int v \frac{du}{dx}\, dx$$

અથવા $\int u \frac{dv}{dx}\, dx = uv - \int v \frac{du}{dx}\, dx$ ...(1)

ધારો કે $u = f(x)$ અને $\frac{dv}{dx} = g(x)$.

$\therefore \frac{du}{dx} = f'(x)$ અને $v = \int g(x)\, dx$

તો, સમીકરણ (1) ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાશે :

$$\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x) \int g(x)\, dx - \int [\int g(x)\, dx \cdot f'(x)]\, dx$$

અથવા $\int f(x)\, g(x)\, dx = f(x) \int g(x)\, dx - \int [f'(x) \int g(x)\, dx]\, dx$

હવે જો આપણે f ને પ્રથમ વિધેય અને g ને બીજું વિધેય માની લઈએ, તો આ સૂત્રને નીચે પ્રમાણે લખેલી રીતે વ્યક્ત કરી શકીએ :

"બે વિધેયોના ગુણાકારનો સંકલિત = (પ્રથમ વિધેય) × (બીજા વિધેયનો સંકલિત) – [(પ્રથમ વિધેયનું વિકલિત) × (બીજા વિધેયનો સંકલિત)] નો સંકલિત."

ઉદાહરણ 17 : $\int x \cos x\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $f(x) = x$ (પ્રથમ વિધેય) અને $g(x) = \cos x$ (બીજું વિધેય) લેતાં, ખંડશઃ સંકલનના નિયમ પ્રમાણે,

$$\int x \cos x\, dx = x \int \cos x\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x) \int \cos x\, dx\right] dx$$

$$= x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c$$

જો $f(x) = \cos x$ અને $g(x) = x$ લઈએ, તો

$$\int x \cos x\, dx = \cos x \int x\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\cos x) \int x\, dx\right] dx$$

$$= (\cos x) \frac{x^2}{2} + \int \left(\sin x \cdot \frac{x^2}{2}\right) dx$$

આમ, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, $\int x \cos x\, dx$ એ x ના વધુ ઘાતાંકવાળા મુશ્કેલ સંકલિતમાં ફેરવાય છે. આમ અહીં પ્રથમ વિધેય અને બીજા વિધેયની પસંદગી યોગ્ય રીતે થાય તે ખૂબ જ જરૂરી છે.

નોંધ :

(1) કોઈ પણ બે વિધેયોના ગુણાકારમાં દરેક વખતે ખંડશઃ સંકલન વાપરી શકાય જ તેમ જરૂરી નથી તે ખાસ નોંધવું જોઈએ. જેમકે, $\int \sqrt{x} \sin x\, dx$ માં આ રીત કામ નહિ કરે કારણ કે એવું કોઈ વિધેય અસ્તિત્વમાં જ નથી કે જેનો વિકલિત $\sqrt{x} \sin x$ થાય.

(2) અહીં, આપણે જોઈશું કે જ્યારે આપણે બીજા વિધેયનું સંકલન કર્યું ત્યારે સંકલનનો અચળ દાખલ નથી કર્યો. પણ જો આપણે $\cos x$ નું સંકલન કરતી વખતે $\sin x + k$ લખીએ, જ્યાં k કોઈ અચળ છે, તો

$$\int x \cos x\, dx = x (\sin x + k) - \int (\sin x + k)\, dx$$

$$= x (\sin x + k) - \int \sin x\, dx - \int k\, dx$$

$$= x (\sin x + k) + \cos x - kx + c$$

$$= x \sin x + \cos x + c$$

આમ, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, ખંડશઃ સંકલનના નિયમના ઉપયોગ વખતે જ્યારે બીજા વિધેયનું સંકલન કરીએ ત્યારે સંકલનનો સ્વૈર અચળ ઉમેરવો અર્થહીન છે. તેનાથી અંતિમ પરિણામમાં કોઈ ફરક પડતો નથી.

(3) સામાન્ય રીતે જ્યારે કોઈ વિધેય x ની ઘાતમાં કે x ની બહુપદી સ્વરૂપે હોય ત્યારે આપણે તેને પ્રથમ વિધેય તરીકે લઈશું. તેમ છતાં જો ત્રિકોણમિતીય પ્રતિવિધેય કે લઘુગણકીય વિધેય બીજા અવયવ તરીકે હોય, તો આપણે તેમને પ્રથમ વિધેય તરીકે લઈશું.

ઉદાહરણ 18 : $\int \log x \, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, પહેલાં તો આપણે એવું પ્રમાણિત વિધેય નથી જાણતા કે જેનો વિકલિત $\log x$ થાય. તેથી આપણે $\log x$ ને પ્રથમ વિધેય અને અચળ વિધેય 1 ને બીજા વિધેય તરીકે લઈશું. તેથી બીજા વિધેયનો સંકલિત x થાય.

તેથી $\int \log x \cdot 1 \, dx = \log x \int 1 \, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int 1 \, dx\right] dx$

$$= \log x \cdot x - \int \left(\frac{1}{x} \times x\right) dx$$

$$= x \log x - x + c$$

ઉદાહરણ 19 : $\int x \, e^x \, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : x ને પ્રથમ વિધેય અને e^x ને બીજા વિધેય તરીકે લેતાં, બીજા વિધેયનો સંકલિત e^x થશે.

તેથી, $\int x \, e^x \, dx = x \, e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x + c$

ઉદાહરણ 20 : $\displaystyle\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $\sin^{-1} x$ ને પ્રથમ વિધેય અને $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ને બીજા વિધેય તરીકે લો. હવે, પહેલા આપણે બીજા વિધેયનું સંકલન કરીએ એટલે $\displaystyle\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ મેળવીએ.

$1 - x^2 = t$ લેતાં, $dt = -2x \, dx$.

$$\therefore \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$$

તેથી, $\displaystyle\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = (\sin^{-1} x)(-\sqrt{1-x^2}) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-\sqrt{1-x^2}) \, dx$

$$= -\sqrt{1-x^2} \, (\sin^{-1} x) + x + c$$

$$= x - \sqrt{1-x^2} \, (\sin^{-1} x) + c$$

બીજી રીત : આદેશ $\sin^{-1} x = \theta$ લઈ ખંડશઃ સંકલનના નિયમથી પણ આપેલ સંકલિત મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 21 : $\int e^x \sin x$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, e^x ને પ્રથમ વિધેય અને $\sin x$ ને બીજા વિધેય તરીકે લઈએ. હવે, ખંડશઃ સંકલનના નિયમ પ્રમાણે,

$$I = \int e^x \sin x \, dx = e^x (-\cos x) - \int e^x (-\cos x) \, dx$$

$$= -e^x \cos x + I_1 \text{ (ધારો કે)} \quad ...(1)$$

હવે, I_1 માં e^x અને $cos\ x$ ને અનુક્રમે પ્રથમ અને બીજા વિધેય તરીકે લેતાં,

$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$

I_1 ની કિંમત (1)માં મૂકતાં,

$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$

અથવા $2I = e^x (\sin x - \cos x)$

તેથી, $I = \int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$

બીજી રીત : ઉપરના પ્રશ્નમાં $sin\ x$ ને પ્રથમ વિધેય અને e^x ને બીજા વિધેય તરીકે લઈને પણ સંકલન કરી શકાય.

7.6.1 $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx$ પ્રકારનું સંકલિત

અહીં, $I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + \int e^x f'(x)\, dx$

$I = I_1 + \int e^x f'(x)\, dx$ જ્યાં $I_1 = \int e^x f(x)\, dx$ ...(1)

$f(x)$ અને e^x ને અનુક્રમે પ્રથમ અને બીજા વિધેય તરીકે લેતાં અને I_1 નું સંકલન ખંડશઃ સંકલનની રીતથી કરતાં,

$I_1 = f(x)\, e^x - \int f'(x)\, e^x\, dx + c$

I_1 ની કિંમત (1)માં મૂકતાં,

$I = e^x f(x) - \int f'(x)\, e^x\, dx + \int e^x f'(x)\, dx + c = e^x f(x) + c$

આમ, $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = e^x f(x) + c$

ઉદાહરણ 22 : (i) $\int e^x \left[\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2}\right] dx$ (ii) $\int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : (i) અહીં, $I = \int e^x \left[\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2}\right] dx$

હવે, $f(x) = \tan^{-1}x$ લઈએ, તો $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

તેથી, આપેલ સંકલ્ય $e^x [f(x) + f'(x)]$ પ્રકારનો છે.

$\therefore\ I = \int e^x \left[\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2}\right] dx = e^x \tan^{-1}x + c$

(ii) $I = \int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx = \int e^x \left[\frac{x^2-1+1+1}{(x+1)^2}\right] dx$

$= \int e^x \left[\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}\right] dx = \int e^x \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right] dx$

હવે, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ લો, તો $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ થશે.

તેથી, આપેલ સંકલ્ય $e^x [f(x) + f'(x)]$ પ્રકારનો છે.

$$\therefore \int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,dx = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)e^x + c$$

સ્વાધ્યાય 7.6

પ્રશ્નો 1થી 22 માં આપેલાં વિધેયોના સંકલિત મેળવો :

1. $x \sin x$ **2.** $x \sin 3x$ **3.** $x^2 e^x$

4. $x \log x$ **5.** $x \log 2x$ **6.** $x^2 \log x$

7. $x \sin^{-1}x$ **8.** $x \tan^{-1}x$ **9.** $x \cos^{-1}x$

10. $(\sin^{-1}x)^2$ **11.** $\dfrac{x\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $x \sec^2 x$

13. $\tan^{-1}x$ **14.** $x (\log x)^2$ **15.** $(x^2 + 1) \log x$

16. $e^x (\sin x + \cos x)$ **17.** $\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$ **18.** $e^x \left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

19. $e^x \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ **20.** $\dfrac{(x-3)e^x}{(x-1)^3}$ **21.** $e^{2x} \sin x$

22. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

પ્રશ્નો 23 તથા 24 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

23. $\int x^2 e^{x^3} dx = ...$

(A) $\frac{1}{3} e^{x^3} + c$ (B) $\frac{1}{3} e^{x^2} + c$

(C) $\frac{1}{2} e^{x^3} + c$ (D) $\frac{1}{2} e^{x^2} + c$

24. $\int e^x \sec x (1 + \tan x)\, dx = ...$

(A) $e^x \cos x + c$ (B) $e^x \sec x + c$

(C) $e^x \sin x + c$ (D) $e^x \tan x + c$

7.6.2 સંકલનનાં કેટલાંક વધુ પ્રમાણિત રૂપો

અહીં, આપણે કેટલાક વિશિષ્ટ પ્રકારનાં પ્રમાણિત રૂપોમાં આપેલા સંકલ્યોના સંકલિતો ખંડશઃ સંકલનનો ઉપયોગ કરી મેળવીશું.

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ (ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$ (iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

(i) $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ લઈએ.

અચળ વિધેય 1 ને બીજા વિધેય તરીકે લઈશું અને ખંડશઃ સંકલનથી સંકલિતો મેળવીશું.

$$I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\ dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot x\ dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\ dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{(x^2 - a^2) + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\ dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\ dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - I - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

અથવા $2I = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

અથવા $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

આ જ પ્રમાણે, અચળ વિધેય 1ને બીજા વિધેય તરીકે લઈને અને ખંડશઃ સંકલનથી બીજા બે સંકલિતો પણ મેળવી શકાય.

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ **$(a > 0)$**

બીજી રીત : સંકલિતો (i), (ii) અને (iii)ને અનુક્રમે આદેશ $x = a\ sec\ \theta$, $x = a\ tan\ \theta$ અને $x = a\ sin\ \theta$ લઈને પણ મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 23 : $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : નોંધો કે $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\ dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 4}\ dx$

$x + 1 = y$ લેતાં, $dx = dy$. તેથી,

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\ dx = \int \sqrt{y^2 + 2^2}\ dy$$

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{y^2 + 2^2} + \frac{4}{2}\log \left| y + \sqrt{y^2 + 4} \right| + c$$ **(7.6.2(ii) પરથી)**

$$= \frac{1}{2}(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 2 \log \left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + c$$

ઉદાહરણ 24 : $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\ dx$

ઉકેલ : નોંધો કે $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\ dx = \int \sqrt{4 - (x+1)^2}\ dx$

$x + 1 = y$ લેતાં, $dx = dy$. તેથી

તેથી, $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\ dx = \int \sqrt{4 - y^2}\ dy$

$$= \frac{1}{2} y \sqrt{4 - y^2} + \frac{4}{2} sin^{-1} \frac{y}{2} + c \qquad \text{(7.6.2(iii) પરથી)}$$

$$= \frac{1}{2}(x + 1) \sqrt{3 - 2x - x^2} + 2sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

7.6.3 $\int (px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c}\ dx$

અહીં આપણે એવા અચળો A અને B મેળવીશું કે જેથી,

$$px + q = A\left[\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)\right] + B$$

$$= A(2ax + b) + B$$

હવે x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$2aA = p$ અને $Ab + B = q$

આ સમીકરણો ઉકેલતાં A અને B ની કિંમતો મળશે.

તેથી, આપણે સંકલિતને નીચેના સ્વરૂપમાં મૂકી શકીએ :

$$A\int (2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c}\ dx + B\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\ dx$$

$$= A \cdot I_1 + B \cdot I_2$$

જ્યાં $I_1 = \int (2ax + b)\sqrt{ax^2 + bx + c}\ dx$

$ax^2 + bx + c = t$ લેતાં, $(2ax + b)\ dx = dt$

તેથી $I_1 = \frac{2}{3}\left(ax^2 + bx + c\right)^{\frac{3}{2}} + c_1$

તે જ પ્રમાણે,

$I_2 = \int \sqrt{ax^2 + bx + c}\ dx$ સંકલનના પ્રમાણિત સ્વરૂપની ચર્ચા કરી છે તેનો ઉપયોગ કરી મેળવીશું.

આમ, $\int (px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c}\ dx$ મેળવી શકાય.

ઉદાહરણ 25 : $\int x\sqrt{1 + x - x^2}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : ઉપર દર્શાવેલ પદ્ધતિને અનુસરતાં, આપણે

$x = A\left[\frac{d}{dx}(1 + x - x^2)\right] + B$ લખીશું.

$\therefore\ x = A\,(1 - 2x) + B$

હવે, x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$-2A = 1$ અને $A + B = 0$ મળશે.

આ સમીકરણો ઉકેલતાં, $A = -\frac{1}{2}$ અને $B = \frac{1}{2}$ મળશે.

તેથી, આપેલ સંકલિતને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

$$\int x\sqrt{1 + x - x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,I_1 + \frac{1}{2}\,I_2 \qquad \text{...(1)}$$

જ્યાં, $I_1 = \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx$

$1 + x - x^2 = t$ લેતાં, $(1 - 2x)\,dx = dt$

તેથી, $I_1 = \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx$

$$= \int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}} + c_1$$

$$= \frac{2}{3}(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}} + c_1$$

(જ્યાં, c_1 કોઈ સ્વૈર અચળ છે.)

$I_2 = \int \sqrt{1+x-x^2}\,dx$

$$= \int \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$x - \frac{1}{2} = t$ લેતાં, $dx = dt$

તેથી, $I_2 = \int \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - (t)^2}\,dt$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{\frac{5}{4} - t^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\,sin^{-1}\left(\frac{2t}{\sqrt{5}}\right) + c_2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{2}\right)\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{5}{8}\,sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + c_2$$

$$= \frac{1}{4}(2x - 1)\sqrt{1+x-x^2} + \frac{5}{8}\,sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + c_2$$

જ્યાં c_2 એ બીજો કોઈક સ્વૈર અચળ છે.

$$\int x\sqrt{1 + x - x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}(2x - 1)\sqrt{1+x-x^2} + \frac{5}{16}\,sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + c$$

જ્યાં $c = \frac{-c_1+c_2}{2}$ એ બીજો કોઈક સ્વૈર અચળ છે.

સ્વાધ્યાય 7.7

પ્રશ્નો 1થી 9 માં આપેલાં વિધેયોના સંકલિત મેળવો :

1. $\sqrt{4-x^2}$ **2.** $\sqrt{1-4x^2}$ **3.** $\sqrt{x^2+4x+6}$

4. $\sqrt{x^2+4x+1}$ **5.** $\sqrt{1-4x-x^2}$ **6.** $\sqrt{x^2+4x-5}$

7. $\sqrt{1+3x-x^2}$ **8.** $\sqrt{x^2+3x}$ **9.** $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

પ્રશ્નો 10 તથા 11 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

10. $\int \sqrt{1+x^2}\, dx =$ ....

(A) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right| + c$ (B) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$

(C) $\frac{2}{3}x\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$ (D) $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}x^2\log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + c$

11. $\int \sqrt{x^2-8x+7}\, dx =$ ....

(A) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + c$

(B) $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + c$

(C) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - 3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + c$

(D) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - \frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + c$

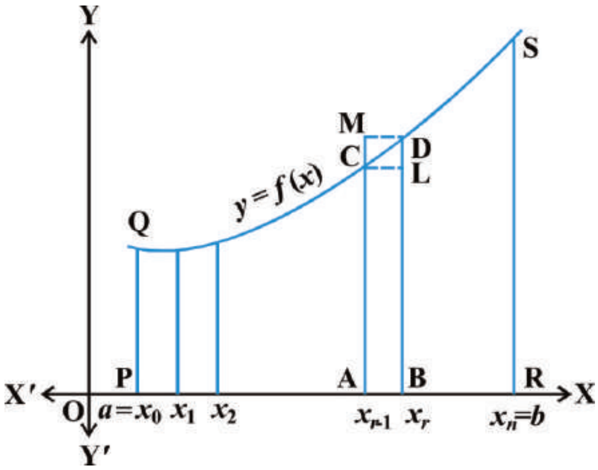
12. $x\sqrt{x+x^2}$ **13.** $(x+1)\sqrt{2x^2+3}$ **14.** $(x+3)\sqrt{3-4x-x^2}$

7.7 નિયત સંકલન

આપણે આગળના પરિચ્છેદમાં અનિયત સંકલનનો અભ્યાસ કર્યો અને આપણે કેટલાંક વિશિષ્ટ વિધેયોનાં સંકલિતો અથવા અનિયત સંકલિતો મેળવવાની કેટલીક રીતોની ચર્ચા કરી. આ પરિચ્છેદમાં આપણે વિધેયના નિયત સંકલનનો અભ્યાસ કરીશું. નિયત સંકલિતની એક નિશ્ચિત કિંમત હોય છે. નિયત સંકલિતને $\int_a^b f(x)\,dx$ દ્વારા દર્શાવાય છે. b ને નિયત સંકલિતની ઊર્ધ્વસીમા અને a ને નિયત સંકલિતની અધઃસીમા કહે છે. આપણે નિયત સંકલિતનું મૂલ્ય સરવાળાના લક્ષ તરીકે અથવા $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત પ્રતિવિકલિત વિધેય F હોય, તો નિયત સંકલિતનું મૂલ્ય અંતરાલનાં અંત્યબિંદુઓએ તે વિધેયના પ્રતિવિકલિતનાં મૂલ્યોનો તફાવત લેવાથી મેળવી શકીએ. અર્થાત્ તે $F(b) - F(a)$ ના મૂલ્ય બરાબર થાય. નિયત સંકલનનાં આ બે રૂપોની આપણે અલગ-અલગથી ચર્ચા કરીશું.

7.7.1 સરવાળાના લક્ષ તરીકે નિયત સંકલિત

ધારો કે વિધેય f એ સંવૃત અંતરાલ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત સતત વિધેય છે. ધારો કે વિધેય f એ ધારણ કરેલી બધી કિંમતો અનૃણ છે, એટલે વિધેય f નો આલેખ એ X-અક્ષની ઉપરની બાજુએ આવેલો વક્ર છે. નિયત સંકલિત $\int_a^b f(x)\,dx$ એટલે વક્ર $y = f(x)$, રેખાઓ $x = a$, $x = b$ તથા X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ છે. આ ક્ષેત્રફળ શોધવા આપણે વક્ર, X-અક્ષ તથા રેખાઓ $x = a$ અને $x = b$ વડે આવૃત્ત પ્રદેશ PRSQP લઈએ. (આકૃતિ 7.2)



આકૃતિ 7.2

આપણે $[a, b]$નું n સમાન લંબાઈના ઉપ-અંતરાલોમાં વિભાજન કરીએ. $[a, b]$નું વિભાજન $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{r-1}, x_r]$...$[x_{n-1}, x_n]$ દ્વારા થશે. અહીં $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$,..., $x_r = a + rh$ અને $x_n = b = a + nh$, જ્યાં $h = \dfrac{b-a}{n}$. આપણે નોંધીશું કે જેમ $n \to \infty$ તેમ $h \to 0$.

વિચારણામાં લીધેલ પ્રદેશ PRSQP એ $r = 1, 2, 3,..., n$ માટે ઉપાંતરાલ $[x_{r-1}, x_r]$ પર વ્યાખ્યાયિત દરેક ઉપક્ષેત્રનો સરવાળો છે. આકૃતિ 7.2 પરથી આપણે કહી શકીએ કે,

લંબચોરસ (ABLC)નું ક્ષેત્રફળ < પ્રદેશ (ABDCA) નું ક્ષેત્રફળ < લંબચોરસ (ABDM) નું ક્ષેત્રફળ ...(1)

સ્પષ્ટ છે કે $(x_r - x_{r-1}) \to 0$ હોવાથી $h \to 0$ થાય. સમીકરણ (1)માં દર્શાવેલ ત્રણેય પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ લગભગ એક સમાન થઈ જશે.

હવે, આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે સરવાળાનું નિર્માણ કરીએ :

$$s_n = h\,[f(x_0) + ... + f(x_{n-1})] = h \sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) \qquad ...(2)$$

અને $$S_n = h\,[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)] = h \sum_{r=1}^{n} f(x_r) \qquad ...(3)$$

અહીં, s_n અને S_n એ ઉપઅંતરાલો $[x_{r-1}, x_r]$, $r = 1, 2,..., n$ પર અનુક્રમે બનેલા નીચેના લંબચોરસો અને ઉપરના લંબચોરસોનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો દર્શાવે છે.

આપણે અસમતા (1)ના સંદર્ભમાં કોઈ યાદચ્છિક વિભાજન $\bigcup_{r=1}^{r=n} [x_{r-1}, x_r]$ માટે જોઈ શકીએ છીએ કે,

$$s_n < \text{પ્રદેશ PRSQPનું ક્ષેત્રફળ} < S_n \qquad ...(4)$$

જેમ $n \to \infty$ તેમ પટ્ટીઓ સાંકડી ને સાંકડી થતી જાય છે અને આપણે માની લઈએ છીએ કે (2) અને (3)નાં સામાન્ય લક્ષની કિંમતો સમાન થશે અને તે વક્ર દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશના ક્ષેત્રફળ જેટલી થશે.

તેને સાંકેતિક રીતે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \text{પ્રદેશ PRSQP નું ક્ષેત્રફળ} = \int_a^b f(x)\,dx \qquad ...(5)$$

આ પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે માંગેલ ક્ષેત્રફળ એ વક્રની નીચેના લંબચોરસોનાં ક્ષેત્રફળોના સરવાળા અને ઉપરના લંબચોરસોનાં ક્ષેત્રફળોના સરવાળા વચ્ચેના ક્ષેત્રફળનું સામાન્ય લક્ષ છે. સુવિધા માટે આપણે પ્રત્યેક ઉપઅંતરાલની ડાબી કિનારીએ આપેલા વક્રની ઊંચાઈ જેટલી લંબાઈવાળો લંબચોરસ લઈશું. હવે આપણે (5)ને પુનઃ નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે લખીશું.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h\,[f(a) + f(a+h) + ... + f(a+(n-1)h)]$$

અથવા
$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,[f(a) + f(a+h) + ... + f(a+(n-1)h)] \qquad ...(6)$$

જેમ $n \to \infty$ તેમ $h = \dfrac{b-a}{n} \to 0$.

ઉપરોક્ત વિધાન (6) ને નિયત સંકલિતની ***સરવાળાના લક્ષ તરીકેની વ્યાખ્યા*** કહે છે.

નોંધ : કોઈ વિશિષ્ટ અંતરાલ પર વ્યાખ્યાયિત કોઈ વિધેયના નિયત સંકલિતનું મૂલ્ય વિધેય અને અંતરાલ પર આધારિત છે અને જેની પસંદગી આપણે સ્વતંત્ર ચલનું નિરૂપણ કરવા માટે કરીએ છીએ તે સંકલનના ચલ પર આધારિત નથી

જો સ્વતંત્ર ચલ x ને સ્થાને t કે u લેવામાં આવે તો $\int_a^b f(x)\,dx$ ને સ્થાને આપણે ફક્ત $\int_a^b f(t)\,dt$ અથવા $\int_a^b f(u)\,du$ લખીશું. આમ સંકલનના ચલને ***આભાસી (ડમી) ચલ*** કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 26 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,[f(a) + f(a+h) + ... + f(a+(n-1)h)]$$

આ ઉદાહરણમાં, $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^2 + 1$, $h = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$

આથી,
$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{4}{n}\right) + ... + f\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1 + \left(\frac{2^2}{n^2}+1\right) + \left(\frac{4^2}{n^2}+1\right) + ... + \left(\frac{(2n-2)^2}{n^2}+1\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(1+1+...+1) + \frac{1}{n^2}(2^2+4^2+...+(2n-2)^2\right]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \frac{2^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\right]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \frac{4}{n^2}\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\right]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n + \frac{2}{3}\frac{(n-1)\,(2n-1)}{n}\right]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \left[1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 2\left[1 + \frac{4}{3}\right] = \frac{14}{3}$$

ઉદાહરણ 27 : સરવાળાના લક્ષ તરીકે $\int_0^2 e^x\,dx$ મેળવો.

ઉકેલ : વ્યાખ્યા પ્રમાણે,

$$\int_0^2 e^x\,dx = (2-0)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^0 + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + ... + e^{\frac{2n-2}{n}}\right]$$

$a = 1$, $r = e^{\frac{2}{n}}$ સાથે સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં પદોના સરવાળાના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\int_0^2 e^x\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^{\frac{2n}{n}} - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1}\right] = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{e^2 - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1}\right]$$

$$= \frac{2(e^2-1)}{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}}\right]\cdot 2}$$

$$= e^2 - 1 \qquad \left(\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1 \text{ નો ઉપયોગ કરતાં}\right)$$

સ્વાધ્યાય 7.8

નીચે આપેલા નિયત સંકલિતોનું મૂલ્ય સરવાળાના લક્ષ સ્વરૂપે મેળવો :

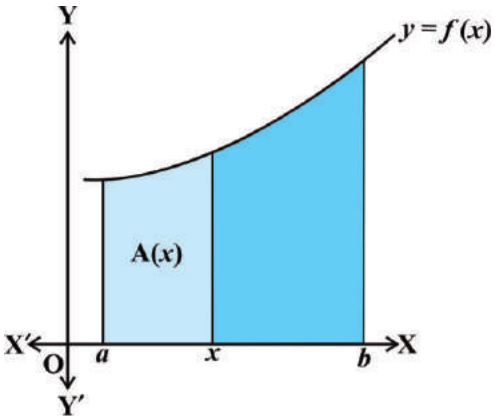
1. $\int_a^b x\,dx$ **2.** $\int_0^5 (x+1)\,dx$ **3.** $\int_2^3 x^2\,dx$

4. $\int_1^4 (x^2 - x)\,dx$ **5.** $\int_{-1}^1 e^x\,dx$ **6.** $\int_0^4 (x + e^{2x})\,dx$

7.8 નિયત સંકલનનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત

7.8.1 ક્ષેત્રફળ વિધેય

$\int_a^b f(x)\,dx$ ને આપણે $y = f(x)$, રેખાઓ $x = a$, $x = b$ તથા X-અક્ષ વડે આવૃત્ત પ્રદેશના ક્ષેત્રફળના સ્વરૂપે વ્યાખ્યાયિત કર્યું. ધારો કે x એ $[a, b]$ માં આવેલી કોઈ સંખ્યા છે, તો $\int_a^x f(x)\,dx$ આકૃતિ 7.3માં આછા રંગથી આચ્છાદિત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ દર્શાવે છે. (અહીં, આપણે માની લઈએ છીએ કે $x \in [a, b]$ માટે $f(x) > 0$ છે. નીચે દર્શાવેલ વિધાન સામાન્ય રીતે બીજાં વિધેયો માટે પણ સત્ય છે.) આ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ x ની કિંમત પર આધારિત છે.



આકૃતિ 7.3

બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો આ રંગીન પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ એ x નું વિધેય છે. આપણે x ના આ વિધેયને A(x)થી દર્શાવીશું. આપણે આ વિધેય A(x)ને ક્ષેત્રફળ વિધેય કહીશું અને તે નીચે પ્રમાણેના સૂત્રથી પ્રાપ્ત થશે :

$$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad ...(1)$$

આ વ્યાખ્યાને આધારે બે મૂળભૂત પ્રમેય આપેલા છે. આપણે તેમનાં વિધાન સ્વીકારીશું. તેમની સાબિતી આ પાઠ્યપુસ્તકની મર્યાદાની બહાર છે.

7.8.2 સંકલન ગણિતનો પહેલો મૂળભૂત પ્રમેય

પ્રમેય 1 : *જો વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત હોય અને A(x) એ તેને સંગત ક્ષેત્રફળ વિધેય હોય, તો*

$$A'(x) = f(x),\ \forall x \in [a, b]$$

7.8.3 સંકલન ગણિતનો બીજો મૂળભૂત પ્રમેય

આપણે પ્રતિવિકલિતનો ઉપયોગ કરીને નિયત સંકલિતનું મૂલ્ય શોધવા માટે નીચે અગત્યનું પ્રમેય દર્શાવેલ છે.

પ્રમેય 2 : *ધારો કે વિધેય f એ $[a, b]$ પર સતત છે તથા F એ f નું પ્રતિવિકલિત છે. તો,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

નોંધ :

(1) પ્રમેય 2 ને બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $\int_a^b f(x)\,dx$ = [f ના પ્રતિવિકલિત F નું ઊર્ધ્વસીમા b પર મૂલ્ય] – [તે જ પ્રતિવિકલિતનું અધઃસીમા a પર મૂલ્ય.]

(2) આ પ્રમેય ખૂબ જ ઉપયોગી છે. કારણ કે નિયત સંકલિતનું મૂલ્ય સરવાળાના લક્ષ તરીકે મેળવવા કરતાં આ પ્રમેયથી મેળવવું ખૂબ જ સરળ છે.

(3) નિયત સંકલિત મેળવવો એ એક જટિલ પ્રક્રિયા છે. તેમાં આપણે એક એવું વિધેય શોધવું છે કે જેનું વિકલિત એ આપેલ સંકલ્ય છે. આ પ્રક્રિયા વિકલન અને સંકલનની વચ્ચેના સંબંધને વધુ મજબૂત કરે છે.

(4) $\int_a^b f(x)\,dx$ માં વિધેય f એ $[a, b]$ માં વ્યાખ્યાયિત અને સતત હોવું જરૂરી છે. ઉદાહરણ તરીકે નિયત સંકલિત $\int_{-2}^{3} x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ ક્ષતિપૂર્ણ છે. વિધેય $f(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ એ સંવૃત અંતરાલ $[-2, 3]$ ના ભાગ $-1 < x < 1$ માં વ્યાખ્યાયિત નથી.

$\int_a^b f(x)\,dx$ મેળવવાનાં સોપાન :

(i) અનિયત સંકલિત $\int f(x)\,dx$ મેળવો. ધારો કે તે F(x) છે. સંકલનના અચળ c ને લેવાની આવશ્યકતા નથી. કારણ કે F(x) ના બદલે F(x) + c લઈએ તોપણ

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)+c]_a^b = [F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)$$

આમ, નિયત સંકલિત મેળવવામાં સ્વૈર અચળ c નો લોપ થાય છે.

(ii) $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ નું મૂલ્ય મેળવો. તે $\int_a^b f(x)\,dx$ નું મૂલ્ય છે.

હવે, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 28 : નીચેના સંકલિતો મેળવો :

(i) $\int_2^3 x^2\,dx$ (ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30-x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$ (iii) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$ (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^3 2t \cdot cos\, 2t\, dt$

ઉકેલ : (i) $I = \int_2^3 x^2\,dx$ લો.

હવે, $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = F(x)$. હોવાથી, મૂળભૂત પ્રમેય 2 પ્રમાણે,

$I = F(3) - F(2) = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$ મળશે.

(ii) ધારો કે, $I = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30-x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$

સૌપ્રથમ આપણે સંકલ્યનો પ્રતિવિકલિત મેળવીશું.

$30 - x^{\frac{3}{2}} = t$ લેતાં, $\frac{-3}{2}\sqrt{x}\,dx = dt$ અથવા $\sqrt{x}\,dx = \frac{-2}{3}dt$

તેથી, $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(30-x^{\frac{3}{2}})^2} = \frac{-2}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-x^{\frac{3}{2}})}\right] = F(x)$

હવે, સંકલન ગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય 2 પ્રમાણે,

$$I = F(9) - F(4) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right]_4^9$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30-27)} - \frac{1}{(30-8)}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{22}\right] = \frac{19}{99}$$

(iii) ધારો કે, $I = \int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$

આંશિક અપૂર્ણાંકનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} \text{ મળે.}$$

તેથી $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)} = -\log|x+1| + 2\log|x+2| = F(x)$

તેથી, સંકલન ગણિતના મૂળભૂત પ્રમેય 2 પ્રમાણે,

$$I = F(2) - F(1)$$

$$= [-\log 3 + 2\log 4] - [-\log 2 + 2\log 3]$$

$$= -3\log 3 + \log 2 + 2\log 4 = \log\left(\frac{32}{27}\right)$$

(iv) ધારો કે, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^3\, 2t \cdot cos\, 2t\; dt$

હવે, $\int sin^3 2t \cdot cos\, 2t\; dt$ મેળવવા માટે,

$sin\, 2t = u$ લેતાં, $2\, cos\, 2t\; dt = du$ અથવા $cos\, 2t\; dt = \frac{1}{2} du$

આમ, $\int sin^3 2t \cdot cos\, 2t\; dt = \frac{1}{2}\int u^3\, du$

$$= \frac{1}{8}(u^4) = \frac{1}{8} sin^4 2t = F(t) \text{ (ધારો)}$$

આમ, સંકલન ગણિતના બીજા મૂળભૂત પ્રમેય પ્રમાણે,

$$I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{8}\left[sin^4 \frac{\pi}{2} - sin^4 0\right] = \frac{1}{8}$$

સ્વાધ્યાય 7.9

પ્રશ્નો 1થી 20 માં નિયત સંકલિતની કિંમત મેળવો :

1. $\int_{-1}^{1} (x + 1)\, dx$ **2.** $\int_2^3 \frac{1}{x}\, dx$ **3.** $\int_1^2 (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9)dx$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sin\ 2x\ dx$ **5.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos\ 2x\ dx$ **6.** $\int_{4}^{5} e^x\ dx$

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} tan\ x\ dx$ **8.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} cosec\ x\ dx$ **9.** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ **11.** $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-1}$ **12.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\ x\ dx$

13. $\int_{2}^{3} \frac{x\ dx}{x^2+1}$ **14.** $\int_{0}^{1} \frac{2x+3}{5x^2+1}\ dx$ **15.** $\int_{0}^{1} x\ e^{x^2}\ dx$

16. $\int_{1}^{2} \frac{5x^2}{x^2+4x+3}\ dx$ **17.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2\ sec^2x + x^3 + 2)\ dx$ **18.** $\int_{0}^{\pi} (sin^2 \frac{x}{2} - cos^2 \frac{x}{2})\ dx$

19. $\int_{0}^{2} \frac{6x+3}{x^2+4}\ dx$ **20.** $\int_{0}^{1} (x\ e^x + sin\ \frac{\pi x}{4})\ dx$

પ્રશ્નો 21 તથા 22 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

21. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = ...$

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

22. $\int_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{4+9x^2} = ...$

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

7.9 નિયત સંકલનની કિંમત મેળવવા માટે આદેશની રીત

આપણે આગળના વિભાગમાં અનિયત સંકલિત શોધવા માટેની ઘણી રીતોનો અભ્યાસ કર્યો. તે પૈકીની અનિયત સંકલિત શોધવા માટેની આદેશની રીત ખૂબ જ ઉપયોગી છે. $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ ની કિંમત આદેશની રીતે શોધવાનાં પગલાં નીચે પ્રમાણે છે :

(1) સંકલિતનો સીમાઓ વગર વિચાર કરો. જેથી આપેલ સંકલિતને જાણીતા પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં મૂકી શકાય તે માટે $y = f(x)$ અથવા $x = g(y)$ આદેશ લો.

(2) સંકલનનો અચળ વાપર્યા વગર નવા સંકલ્યનું નવા ચલને સાપેક્ષ સંકલન કરો.

(3) નવા ચલના સ્થાને મૂળ ચલ મૂકીને જવાબને મૂળ ચલના સ્વરૂપમાં લખો.

(4) ત્રીજા પગલામાં મળેલ જવાબમાં આપેલ સંકલિતની સીમાઓને સાપેક્ષ મૂલ્ય મેળવો અને ઊર્ધ્વસીમા તથા અધઃસીમા એ બંને મૂલ્ય આગળનાં મૂલ્યનો તફાવત મેળવો.

> ☛ **નોંધ :** આ રીતને ઝડપી બનાવવા આપણે નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે પણ આગળ વધી શકીએ. પગલાં (1) અને (2) કર્યાં બાદ પગલું (3) કરવાની જરૂર નથી. અહીં આપણે સંકલિતને નવા ચલનાં સ્વરૂપમાં મૂકી તેની સીમાઓને પણ નવા ચલની સાપેક્ષ બદલીએ તો આપણે સીધા છેલ્લા પદ પર જઈ શકીએ.

હવે, આ અંગે સમજ કેળવવા કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 29 : $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\, dx$ ની કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : $t = x^5 + 1$ લેતાં, $dt = 5x^4\, dx$

$$\therefore \int 5x^4\sqrt{x^5+1}\, dx = \int\sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$$

તેથી, $$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\, dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}}\right] - \left((-1)^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[2\sqrt{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

બીજી રીત : સૌપ્રથમ આપણે આપેલ સંકલિતનું રૂપાંતરણ કરીશું અને ત્યાર બાદ રૂપાંતરિત સંકલિતનું નવી સીમાઓ અનુસાર મૂલ્ય મેળવીશું.

ધારો કે $t = x^5 + 1$, તો $dt = 5x^4\, dx$ થાય.

અહીં, $x = -1$ ત્યારે $t = 0$ અને $x = 1$ ત્યારે $t = 2$

આમ, જેમ x નું મૂલ્ય -1 થી 1 થાય છે તેમ t નું મૂલ્ય 0 થી 2 થાય છે.

$$\therefore \int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\, dx = \int_{0}^{2}\sqrt{t}\, dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ઉદાહરણ 30 : $\int_{0}^{1}\frac{tan^{-1}x}{1+x^2}\, dx$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $t = tan^{-1}x$ તો $dt = \frac{1}{1+x^2}\, dx$. અહીં $x = 0$ ત્યારે $t = 0$ અને $x = 1$ ત્યારે $t = \frac{\pi}{4}$

આમ, x નું મૂલ્ય 0 થી 1 થાય છે, તેમ t નું મૂલ્ય 0 થી $\frac{\pi}{4}$ થાય છે.

આમ, $\int_0^1 \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{16} - 0\right] = \frac{\pi^2}{32}$

સ્વાધ્યાય 7.10

નીચે આપેલ સંકલિતો 1થી 8 નું મૂલ્ય આદેશની રીતનો ઉપયોગ કરીને મેળવો :

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\,\cos^5\phi\,d\phi$ **3.** $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

4. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\,dx$ ($x + 2 = t^2$ લો.) **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

6. $\int_0^2 \frac{dx}{x+4-x^2}$ **7.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **8.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) e^{2x}\,dx$

પ્રશ્નો 9 તથા 10 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

9. $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,dx$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 6 (B) 0 (C) 3 (D) 4

10. જો $f(x) = \int_0^x t\sin t\,dt$, તો $f'(x) =$ ....

(A) $\cos x + x\sin x$ (B) $x\sin x$

(C) $x\cos x$ (D) $\sin x + x\cos x$

7.10 નિયત સંકલનના કેટલાક ગુણધર્મો

નિયત સંકલનના કેટલાક મહત્ત્વના ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :

આ ગુણધર્મોના ઉપયોગથી નિયત સંકલનની કિંમત શોધવી વધુ સરળ બનશે.

P_0 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

P_1 : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. વિશિષ્ટ વિકલ્પ તરીકે $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P_2 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$P_3 : \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$

$P_4 : \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx$

(P_4 એ P_3નો વિશિષ્ટ વિકલ્પ છે.)

$P_5 : \int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(2a - x)\, dx$

P_6 : જો $f(2a - x) = f(x)$ હોય, તો $\int_0^{2a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$ અને

જો $f(2a - x) = -f(x)$ હોય, તો $\int_0^{2a} f(x)\, dx = 0$

P_7 : (*i*) જો f એ યુગ્મ વિધેય હોય, એટલે કે $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$ તો $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$

(*ii*) જો f એ અયુગ્મ વિધેય હોય, એટલે કે $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$ તો $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$

હવે આપણે આ ગુણધર્મો એક પછી એક સાબિત કરીએ.

P_0 ની સાબિતી : આદેશ $x = t$ લેતાં, સાબિત થશે.

P_1 ની સાબિતી : ધારો કે F એ fનું પ્રતિવિકલિત છે, તો સંકલન ગણિતના બીજા મૂળભૂત પ્રમેય પ્રમાણે, આપણે

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

અહીં, જો આપણે $a = b$ લઈએ તો જોઈ શકાય કે, $\int_a^a f(x) = 0$

નોંધ : ખરેખર તો, $\int_a^b f(x)\, dx$ એ $[a, b]$ પર વ્યાખ્યાયિત છે અને તેને માટે $a < b$ જરૂરી છે. આથી, આપણે પરિણામ P_1 વ્યાખ્યા તરીકે જ લેવું જોઈએ.

P_2 ની સાબિતી : ધારો કે F એ f નું પ્રતિવિકલિત છે. તેથી

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \qquad ...(1)$$

$$\int_a^c f(x)\, dx = F(c) - F(a) \text{ અને} \qquad ...(2)$$

$$\int_c^b f(x)\, dx = F(b) - F(c) \qquad ...(3)$$

(2) અને (3)નો સરવાળો કરતાં,

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx \text{ મળે.}$$

આમ, ગુણધર્મ P_2 સાબિત થાય છે.

P_3ની સાબિતી : ધારો કે $t = a + b - x$. તો $dt = -dx$,

જ્યારે, $x = a$ ત્યારે $t = b$ અને ત્યારે $x = b$ ત્યારે $t = a$.

$$\therefore \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(a + b - t)\, dt$$

$$= \int_a^b f(a + b - t)\, dt \qquad \textbf{(}P_1 \textbf{ પરથી)}$$

$$= \int_a^b f(a + b - x)\, dx \qquad \textbf{(}P_0 \textbf{ પરથી)}$$

P_4ની સાબિતી : $t = a - x$ લેતાં, $dt = -dx$. જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = a$ અને $x = a$ ત્યારે $t = 0$. હવે, P_3 પ્રમાણે આગળ વધો.

P_5ની સાબિતી : P_2 પરથી, આપણને

$$\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_a^{2a} f(x)\, dx \text{ મળશે.}$$

હવે, જમણી બાજુના બીજા સંકલિતમાં $t = 2a - x$ લેતાં, $dt = -dx$, જ્યારે $x = a$ ત્યારે $t = a$ અને જ્યારે $x = 2a$ ત્યારે $t = 0$. વળી, $x = 2a - t$ પણ મળશે.

તેથી બીજું સંકલિત,

$$\int_a^{2a} f(x)\, dx = -\int_a^0 f(2a - t)\, dt$$

$$= \int_0^a f(2a - t)\, dt$$

$$= \int_0^a f(2a - x)\, dx \text{ મળશે.}$$

તેથી, $\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(2a - x)\, dx$

P_6ની સાબિતી : P_5 પરથી આપણી પાસે,

$$\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(2a - x)\, dx \text{ છે.} \qquad ...(1)$$

હવે, જો $f(2a - x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$ તો પરિણામ (1) પરથી

$$\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx \text{ થશે.}$$

અને જો, $f(2a - x)\, dx = -f(x)$, $\forall x \in D_f$ તો પરિણામ (1) પરથી,

$$\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx - \int_0^a f(x)\, dx = 0 \text{ થશે.}$$

P_7ની સાબિતી : P_2 પરથી

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$ થશે.

હવે, જમણી બાજુના પ્રથમ સંકલિતમાં $t = -x$ લેતાં, $dt = -dx$.

જ્યારે $x = -a$ ત્યારે $t = a$ અને $x = 0$ ત્યારે $t = 0$ અને $x = -t$

$$\therefore \int_{-a}^{0} f(x)\, dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\, dt + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(-x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx \qquad (P_0 \text{ તથા } P_1 \text{ પરથી}) \quad ...(1)$$

(i) હવે, જો f એ યુગ્મ વિધેય હોય, તો $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$ થાય. તેથી પરિણામ (1) પરથી,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$$ મળે.

(ii) હવે, જો f એ અયુગ્મ વિધેય હોય, તો $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$ થાય. તેથી પરિણામ (1) પરથી,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = -\int_{0}^{a} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = 0$$ મળે.

ઉદાહરણ 31 : $\int_{-1}^{2} |x^3 - x|\, dx$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીશું કે $[-1, 0]$ માં $x^3 - x \geq 0$ અને $[0, 1]$ માં $x^3 - x \leq 0$ અને $[1, 2]$માં $(x^3 - x) \geq 0$. તેથી P_2 પ્રમાણે આપણે લખી શકીએ કે,

$$\int_{-1}^{2} |x^3 - x|\, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} -(x^3 - x)\, dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

ઉદાહરણ 32 : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, $\sin^2 x$ એ એક યુગ્મ વિધેય છે.

તેથી, P_7(i) પ્રમાણે,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - cos\ 2x}{2}\right)\ dx$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1 - cos\ 2x)\ dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2} sin\ 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} sin \frac{\pi}{2}\right] - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 33 : $\int_{0}^{\pi} \frac{x\ sin\ x}{1 + cos^2 x}\ dx$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $I = \int_{0}^{\pi} \frac{x\ sin\ x}{1 + cos^2 x}\ dx.$

હવે P_4 પરથી, $I = \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi - x)\ sin\ (\pi - x)}{1 + cos^2\ (\pi - x)}\ dx$ મળે.

$$\therefore \quad I = \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi - x)\ sin\ x}{1 + cos^2 x}\ dx$$

$$= \pi \int_{0}^{\pi} \frac{sin\ x\ dx}{1 + cos^2 x} - I$$

અથવા $2I = \pi \int_{0}^{\pi} \frac{sin\ x}{1 + cos^2 x}\ dx$

અથવા $I = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{sin\ x}{1 + cos^2 x}\ dx$

$cos\ x = t$ લેતાં, $-sin\ x\ dx = dt$. જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 1$ અને $x = \pi$ ત્યારે $t = -1$.

$$\therefore \quad I = \frac{-\pi}{2} \int_{1}^{-1} \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-I}^{I} \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$= \pi \int_{0}^{1} \frac{dt}{1 + t^2}$$

(P_7 પરથી, $\frac{1}{1 + t^2}$ યુગ્મ વિધેય છે.)

$$= \pi\ [tan^{-1} t]_{0}^{1} = \pi\ [tan^{-1} 1 - tan^{-1} 0] = \pi\ [\tfrac{\pi}{4} - 0] = \frac{\pi^2}{4}$$

ઉદાહરણ 34 : $\int_{-1}^{1} sin^5 x \cdot cos^4 x\ dx$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $I = \int_{-1}^{1} sin^5 x \cdot cos^4 x\ dx$

હવે, $f(x) = sin^5x \cdot cos^4x$ તો $f(-x) = sin^5(-x) \cdot cos^4(-x) = -sin^5x \cdot cos^4x = -f(x)$

તેથી, f એ અયુગ્મ વિધેય છે. P_7(ii) પરથી $I = 0$

ઉદાહરણ 35 : $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^4x}{sin^4x + cos^4x}\, dx$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^4x}{sin^4x + cos^4x}\, dx$ લો. ...(1)

હવે P_4 પરથી, $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{sin^4\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + cos^4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\, dx$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^4x}{cos^4x + sin^4x}\, dx$ ...(2)

(1) અને (2) સરવાળો કરતાં,

$2I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^4x + cos^4x}{sin^4x + cos^4x}\, dx$

$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad I = \frac{\pi}{4}$

ઉદાહરણ 36 : $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{tan\, x}}$ નું મૂલ્ય મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{tan\, x}} = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{cos\, x}\, dx}{\sqrt{cos\, x} + \sqrt{sin\, x}}$ ...(1)

હવે, P_3 પરથી, $I = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}\, dx}{\sqrt{cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)} + \sqrt{sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}}$

$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{sin\, x}\, dx}{\sqrt{sin\, x} + \sqrt{cos\, x}}\, dx$ ...(2)

(1) અને (2)નો સરવાળો કરતાં,

$$2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}. \text{ તેથી } I = \frac{\pi}{12}$$

ઉદાહરણ 37 : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (sin\ x)\ dx$ નું મૂલ્ય મેળવો. (ખરેખર તો આ ''અનુચિત સંકલન''નું ઉદાહરણ છે.)

ઉકેલ : ધારો કે $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (sin\ x)\ dx$.

P_4 પરથી, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (cos\ x)\ dx$

I નાં બે મૂલ્યોનો સરવાળો કરતાં,

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log sin\, x + \log cos\ x)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log sin\, x \cdot cos\ x)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log (sin\, x \cdot cos\ x) + \log 2 - \log 2)\ dx$$ **(log 2 ને ઉમેરી બાદ કરતાં)**

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log (sin\ 2x)\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\ dx$$ **(કેમ?)**

પ્રથમ સંકલિતમાં $2x = t$ લેતાં, $2dx = dt$ થશે.

તથા, જ્યારે $x = 0$ ત્યારે $t = 0$ અને જ્યારે $x = \frac{\pi}{2}$ ત્યારે $t = \pi$.

$$\therefore\ 2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log (sin\ t)\ dt - \frac{\pi}{2} \log 2$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (sin\ t)\ dt - \frac{\pi}{2} \log 2$$ **(P_6 પરથી, $sin\ (\pi - t) = sin\ t$)**

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log (sin\ x)\ dx - \frac{\pi}{2} \log 2$$ **(ચલ t ને સ્થાને x કરતાં)**

$$= I - \frac{\pi}{2} \log 2$$

તેથી $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log sin\, x\ dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$

સ્વાધ્યાય 7.11

નિયત સંકલનના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી પ્રશ્નો 1થી 19 માં દર્શાવેલા સંકલિતોની કિંમત શોધો :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x \, dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{sin\, x}}{\sqrt{sin\, x} + \sqrt{cos\, x}} dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^{\frac{3}{2}} x\, dx}{sin^{\frac{3}{2}} x + cos^{\frac{3}{2}} x}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^5 x}{sin^5 x + cos^5 x} dx$

5. $\int_{-5}^{5} | x + 2 | \, dx$

6. $\int_2^8 | x - 5 | \, dx$

7. $\int_0^1 x (1 - x)^n \, dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log (1 + tan\, x) \, dx$

9. $\int_0^2 x\sqrt{2 - x} \, dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \log sin\, x - \log sin2x) \, dx$

11. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^2 x \, dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1 + sin\, x}$

13. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin^7 x \, dx$

14. $\int_0^{2\pi} cos^5 x \, dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin\, x - cos\, x}{1 + sin\, x\, cos\, x} dx$

16. $\int_0^{\pi} \log (1 + cos\, x) \, dx$

17. $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{a - x}} dx$

18. $\int_0^4 | x - 1 | \, dx$

19. જો f અને g એ $f(x) = f(a - x)$ અને $g(x) + g(a - x) = 4$ દ્વારા વ્યાખ્યાયિત વિધેયો હોય, તો સાબિત કરો કે $\int_0^a f(x)\, g(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$.

પ્રશ્નો 20 તથા 21 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

20. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\, cos\, x + tan^5 x + 1) \, dx$ નું મૂલ્ય ....

(A) 0 (B) 2 (C) π (D) 1

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left(\frac{4 + 3\, sin\, x}{4 + 3\, cos\, x}\right) dx$ નું મૂલ્ય ....

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 0 (D) –2

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 38 : $\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $1 + \sin 6x = t$ લો. તેથી $6 \cos 6x\ dx = dt$

$$\therefore \int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\ dx = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}\ dt$$
$$= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{1}{9}(1 + \sin 6x)^{\frac{3}{2}} + c$$

ઉદાહરણ 39 : $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\ dx = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{4}}}{x^4}\ dx$

$\left(1-\frac{1}{x^3}\right) = (1 - x^{-3}) = t$ લેતાં, $\frac{3}{x^4}\ dx = dt$

$$\therefore \int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\ dx = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}}\ dt = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5}(t)^{\frac{5}{4}} + c = \frac{4}{15}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}} + c$$

ઉદાહરણ 40 : $\int \frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)}\ dx$ મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x + 1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

$$= (x + 1) + \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} \qquad ...(1)$$

હવે, $\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ લઈએ. ...(2)

તેથી, $1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)$

$1 = (A + B)x^2 + (C - B)x + (A - C)$

હવે, બંને બાજુએ x^2 તથા x ના સહગુણકો અને અચળ પદ સરખાવતાં,

$A + B = 0,\ C - B = 0$ અને $A - C = 1$ મળશે.

આ સમીકરણો ઉકેલતાં, $A = \frac{1}{2},\ B = C = -\frac{1}{2}$

હવે, A, B, C નાં મૂલ્યો સમીકરણ (2) માં મૂકતાં,

$$\therefore \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \qquad ...(3)$$

સમીકરણ (3) ની કિંમત (1) માં લેતાં,

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x + 1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)}$$

$$\therefore \int \frac{x^4\ dx}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|x - 1| - \frac{1}{4}\log(x^2 + 1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

ઉદાહરણ 41 : $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$

$= \int \log(\log x)\, dx + \int \frac{1}{(\log x)^2}\, dx$

હવે, પ્રથમ સંકલિતમાં 1 ને બીજા વિધેય તરીકે લેતાં અને ખંડશઃ સંકલન કરતાં આપણને નીચે પ્રમાણે પરિણામ પ્રાપ્ત થશે :

$$I = x\log(\log x) - \int \frac{1}{x\log x}\, x\, dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \qquad ...(1)$$

$\int \frac{dx}{\log x}$માં 1 ને બીજા વિધેય તરીકે લેતાં, અને ખંડશઃ સંકલન કરતાં આપણને,

$$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x \cdot \left\{\frac{-1}{(\log x)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} dx\right] \text{ મળશે.} \qquad ...(2)$$

પરિણામ (2) ને (1) માં મૂકતાં,

$$I = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} + c$$

ઉદાહરણ 42 : $\int (\sqrt{cot\, x} + \sqrt{tan\, x})\, dx$ મેળવો.

ઉકેલ : $I = \int (\sqrt{cot\, x} + \sqrt{tan\, x})\, dx = \int \sqrt{tan\, x}\,(1 + cot\, x)\, dx$

$tan\, x = t^2$ લેતાં, $sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

અથવા $dx = \frac{2t}{1+t^4}\, dt$

તેથી, $I = \int t\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \times \left(\frac{2t}{1+t^4}\right) dt$

$$= 2\int \frac{t^2+1}{t^4+1}\, dt$$

$$= 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)}$$

$$= 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 + 2}$$

$t - \frac{1}{t} = y$ લેતાં, $\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = dy$ થશે.

$$\therefore \quad I = 2 \int \frac{dy}{y^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{2} \; tan^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= \sqrt{2} \; tan^{-1} \left(\frac{t - \frac{1}{t}}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$$= \sqrt{2} \; tan^{-1} \left(\frac{t^2 - 1}{\sqrt{2}t}\right) + c$$

$$= \sqrt{2} \; tan^{-1} \left(\frac{tan\, x - 1}{\sqrt{2\, tan\, x}}\right) + c$$

ઉદાહરણ 43 : $\int \frac{sin\, 2x \cdot cos\, 2x\, dx}{\sqrt{9 - cos^4(2x)}}$

ઉકેલ : ધારો કે $I = \int \frac{sin\, 2x \cdot cos\, 2x}{\sqrt{9 - cos^4(2x)}} dx.$

$cos^2(2x) = t$ લેતાં, $4 sin\, 2x\, cos\, 2x\, dx = -dt$

$$\therefore \quad I = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{9 - t^2}}$$

$$= -\frac{1}{4} \; sin^{-1}\left(\frac{t}{3}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{4} \; sin^{-1}\left(\frac{1}{3} cos^2 2x\right) + c$$

ઉદાહરણ 44 : $\int\limits_{-1}^{\frac{3}{2}} |x\, sin\, (\pi x)|\, dx$ ની કિંમત મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $f(x) = |x\, sin\, (\pi x)| = \begin{cases} x\, sin\, \pi\, x, & -1 \le x \le 1 \\ -x\, sin\, \pi\, x, & 1 \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$

તેથી, $\int\limits_{-1}^{\frac{3}{2}} |x\, sin\, (\pi x)|\, dx = \int\limits_{-1}^{1} x\, sin\, \pi x\, dx + \int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} (-x\, sin\, \pi x)\, dx$

$$= \int\limits_{-1}^{1} x\, sin\, \pi x\, dx - \int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} (x\, sin\, \pi x)\, dx$$

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin(\pi x)|\, dx = \left[\frac{-x\cos\pi x}{\pi} + \frac{\sin\pi x}{\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{-x\cos\pi x}{\pi} + \frac{\sin\pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right]$$

$$= \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

ઉદાહરણ 45 : $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : $I = \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{a^2\cos^2(\pi - x) + b^2\sin^2(\pi - x)}\, dx \quad (P_4 \text{ પરથી})$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} - I$$

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

તેથી, $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} \quad (P_6 \text{ પરથી})$$

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\right] \quad (\text{કેમ ?})$$

$$= \pi\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\,dx}{a^2 + b^2\tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cosec}^2 x\,dx}{a^2\cot^2 x + b^2}\right]$$

$$= \pi\left[\int_0^{1} \frac{dt}{a^2 + b^2t^2} - \int_1^{0} \frac{du}{a^2u^2 + b^2}\right]$$

(અનુક્રમે $\tan x = t$ અને $\cot x = u$ લેતાં)

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{bt}{a}\right]_0^1 - \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{au}{b}\right]_1^0$$

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{b}{a} + \tan^{-1}\frac{a}{b}\right] = \frac{\pi^2}{2ab}$$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 7

પ્રશ્નો 1 થી 24 માં આપેલાં વિધેયોના સંકલિત મેળવો :

1. $\dfrac{1}{x-x^3}$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$

3. $\dfrac{1}{x\sqrt{ax-x^2}}$ (સૂચન : $x = \dfrac{a}{t}$ લો.)

4. $\dfrac{1}{x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}}$

5. $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}$ (સૂચન : $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)}$ લો.)

6. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$

7. $\dfrac{\sin x}{\sin(x-a)}$

8. $\dfrac{e^{5\log x}-e^{4\log x}}{e^{3\log x}-e^{2\log x}}$

9. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$

10. $\dfrac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$

11. $\dfrac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

12. $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$

13. $\dfrac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$

14. $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15. $\cos^3 x\, e^{\log \sin x}$

16. $e^{3\log x}(x^4+1)^{-1}$

17. $f'(ax+b)[f(ax+b)]^n$

18. $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x\sin(x+\alpha)}}$

19. $\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{x}-\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x}+\cos^{-1}\sqrt{x}}$, $x \in [0, 1]$

20. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

21. $\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$

22. $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

23. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

24. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\,[\log(x^2+1)-2\log x]}{x^4}$

પ્રશ્નો 25 થી 33 માં આપેલ નિયત સંકલિતોની કિંમત મેળવો :

25. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$

26. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$

27. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x\, dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

28. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\,dx$

29. $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$

30. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}\,dx$

31. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\tan^{-1}(\sin x)\,dx$

32. $\int\limits_{0}^{\pi} \dfrac{x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$

33. $\int\limits_{1}^{4} [\,|x-1|+|x-2|+|x-3|\,]\,dx$

પ્રશ્નો 34 થી 39 સાબિત કરો :

34. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2(x+1)} = \frac{2}{3} + \log\frac{2}{3}$

35. $\int_0^1 x\, e^x\, dx = 1$

36. $\int_{-1}^{1} x^{17} \cos^4 x\, dx = 0$

37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \frac{2}{3}$

38. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\, dx = 1 - \log 2$

39. $\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$

40. $\int_0^1 e^{2-3x}\, dx$ ને સરવાળાના લક્ષ તરીકે મેળવો.

પ્રશ્નો 41 થી 44 માં વિધાન સાચું બને તે રીતે આપેલ વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

41. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} =$ ....

(A) $\tan^{-1}(e^x) + c$ (B) $\tan^{-1}(e^{-x}) + c$

(C) $\log(e^x - e^{-x}) + c$ (D) $\log(e^x + e^{-x}) + c$

42. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2}\, dx =$ ....

(A) $\frac{-1}{\sin x + \cos x} + c$ (B) $\log|\sin x + \cos x| + c$

(C) $\log|\sin x - \cos x| + c$ (D) $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} + c$

43. જો $f(a + b - x) = f(x)$, તો $\int_a^b x \cdot f(x)\, dx =$ ....

(A) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)\, dx$ (B) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)\, dx$

(C) $\frac{b-a}{2}\int_a^b f(x)\, dx$ (D) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\, dx$

44. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right) dx$ નું મૂલ્ય ....

(A) 1 (B) 0 (C) –1 (D) $\frac{\pi}{4}$