પ્રકરણ 13

લક્ષ અને વિકલન

❖*With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature – WHITEHEAD* ❖

13.1 પ્રાસ્તાવિક

આ પ્રકરણ કલનશાસ્ત્રનું પ્રવેશક છે. જેમાં મુખ્યત્વે વિધેયના પ્રદેશનાં મૂલ્યોને થતાં ફેરફારને અનુરૂપ વિધેયનાં મૂલ્યોમાં થતાં ફેરફાર વિશે વિચારવામાં આવે છે ગણિતની એવી શાખા કલનશાસ્ત્ર છે. આપણે વિકલનનો ત્વરિત ખ્યાલ (તેની વ્યાખ્યા આપ્યા વગર)આપીશું. ત્યાર બાદ આપણે લક્ષની સરળ વ્યાખ્યા આપીશું અને લક્ષના બીજગણિતનો અભ્યાસ કરીશું. ત્યાર બાદ આપણે વિકલનની વ્યાખ્યા પર પાછા ફરીશું અને વિકલનના બીજગણિતનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે કેટલાંક પ્રમાણિત વિધેયોના વિકલિત મેળવીશું.

Sir Issac Newton (1642-1727)

13.2 વિકલનનો સાહજિક ખ્યાલ :

ભૌતિકવિજ્ઞાનના પ્રયોગો દ્વારા એ પ્રમાણિત થયું છે કે ભેખડ પરથી પડતો પદાર્થ t સેકન્ડમાં 4.9 t^2 મીટર જેટલું અંતર કાપે છે અર્થાત્ પદાર્થે કાપેલ અંતર s (મીટરમાં) એ સમય t (સેકન્ડમાં)નું વિધેય છે. તેને $s = 4.9t^2$ વડે દર્શાવી શકાય.

પૃષ્ઠ 264 માં આપેલ કોષ્ટક 13.1 ભેખડ પરથી પડતા પદાર્થે જુદી જુદી સેકન્ડના સમયગાળામાં મીટરમાં કાપેલ અંતર દર્શાવે છે. તેનો હેતુ આ માહિતી પરથી $t = 2$ સેકન્ડના સમયે પદાર્થનો વેગ શોધવાનો છે. આ પ્રશ્નનો ઉકેલ મેળવવાની એક રીત $t = 2$ સેકન્ડના સમયના અંતે જુદા જુદા સમયગાળામાં સરેરાશ વેગ પ્રાપ્ત કરવાથી મળે છે અને આશા રાખીએ કે તે $t = 2$ સેકન્ડે મળતા વેગની માહિતી આપશે.

$t = t_1$ અને $t = t_2$ વચ્ચેનો સરેરાશ વેગ એ $t = t_1$ અને $t = t_2$ સેકન્ડમાં કપાયેલ અંતર અને $(t_2 - t_1)$ નો ગુણોત્તર છે. આથી, પ્રથમ બે સેકન્ડનો સરેરાશ વેગ

$$= \frac{t_2 = 2 \text{ અને } t_1 = 0 \text{ વચ્ચે કપાયેલ અંતર}}{\text{સમય અંતરાલ } (t_2 - t_1)}$$

$$= \frac{(19.6-0)\text{મી}}{(2-0)\text{સે}} = 9.8 \text{ મી/સે}$$

આ જ રીતે, $t = 1$ અને $t = 2$ વચ્ચેનો સરેરાશ વેગ

$$\frac{(19.6-4.9)\text{મી}}{(2-1)\text{સે}} = 14.7 \text{ મી/સે}$$

આ જ રીતે, અલગ અલગ t_1 માટે, $t = t_1$ અને $t = 2$ વચ્ચેનો સરેરાશ વેગ શોધી શકાય. નીચેનું કોષ્ટક 13.2, $t = t_1$ સેકન્ડ અને $t = 2$ સેકન્ડ વચ્ચેનો સરેરાશ વેગ (v) આપે છે.

કોષ્ટક 13.1

t	s
0	0
1	4.9
1.5	11.025
1.8	15.876
1.9	17.689
1.95	18.63225
2	19.6
2.05	20.59225
2.1	21.609
2.2	23.716
2.5	30.625
3	44.1
4	78.4

કોષ્ટક 13.2

t_1	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99
v	9.8	14.7	17.15	18.62	19.11	19.355	19.551

આપણે કોષ્ટક 13.2 પરથી જોઈ શકીએ કે સરેરાશ વેગ ક્રમશઃ વધતો જાય છે. જો આપણે $t = 2$ આગળ અંત પામતો નાનો સમયગાળો લઈએ તો આપણને $t = 2$ આગળના વેગનો વધુ સારો ખ્યાલ આવે. ધારો કે 1.99 સેકન્ડ અને 2 સેકન્ડ વચ્ચેના સમયગાળામાં કશું જ અનપેક્ષિત (નાટકીય) બનતું નથી. આપણે તારવી શકીએ કે $t = 2$ સેકન્ડે વેગ 19.551 મી/સે થી થોડો વધારે છે.

નીચેની ગણતરીથી આ તારણ થોડું વધુ મજબૂત થશે. $t = 2$ સેકન્ડથી શરૂ થતા જુદા જુદા સમયગાળામાં સરેરાશ વેગની ગણતરી કરીશું. આગળ પ્રમાણે $t = 2$ સેકન્ડ અને $t = t_2$ સેકન્ડ માટે સરેરાશ વેગ

$$= \frac{t_2 \text{સેકન્ડ અને 2 સેકન્ડ વચ્ચે કાપેલ અંતર}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{સેકન્ડમાં કાપેલ અંતર } - 2 \text{ સેકન્ડમાં કાપેલ અંતર}}{t_2 - 2}$$

$$= \frac{t_2 \text{સેકન્ડમાં કાપેલ અંતર} - 19.6}{t_2 - 2}$$

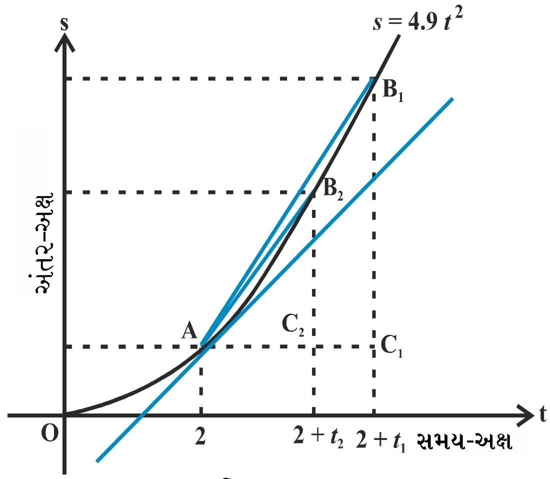
નીચેનું કોષ્ટક 13.3, $t = t_2$ સેકન્ડ અને $t = 2$ સેકન્ડ વચ્ચેનો સરેરાશ વેગ v મી/સે માં દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 13.3

t_2	4	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01
v	29.4	24.5	22.05	20.58	20.09	19.845	19.649

અહીં, ફરીથી આપણે નોંધીશું કે $t = 2$ થી શરૂ થતા નાના સમય અંતરાલ માટે, $t = 2$ આગળના વેગનો વધુ સારો ખ્યાલ મળે છે.

પ્રથમ ગણતરીમાં આપણે $t = 2$ સુધીના વધતા સમયગાળાના અંતરાલમાં સરેરાશ વેગ શોધ્યો અને $t = 2$ પહેલા કાંઈ જ અચાનક અને અનપેક્ષિત ફેરફાર થતો નથી તેમ ધાર્યું હતું. બીજી ગણતરીમાં $t = 2$ પછી $t = 2$ સુધી થતા સમયગાળામાં પણ કાંઈ જ અચાનક અને અનપેક્ષિત ફેરફાર થતો નથી તેમ ધાર્યું હતું. માત્ર ભૌતિકવિજ્ઞાનની રીતે વિચારતાં આ બંને સરેરાશ વેગની શ્રેણીઓ એક જ લક્ષને અનુલક્ષે છે. આપણે સલામત રીતે તારવી શકીએ કે, $t = 2$ આગળનો સરેરાશ વેગ 19.551 મી/સે અને 19.649 મી/સે વચ્ચે હશે. તકનીકી રીતે કહી શકાય કે, $t = 2$ આગળનો વેગ 19.551 મી/સે અને 19.649 મી/સે વચ્ચે હશે. એ તો જાણીતું છે કે *વેગ એ સ્થાનાંતરનો દર છે.* આથી, આપણે નીચે પ્રમાણેની તારવણી કરી.



આકૃતિ 13.1

વેગ એ જુદા જુદા સમયે કપાતા તાત્ક્ષણિક અંતરના તાત્ક્ષણિક સમય સાથેના ફેરફારનો દર છે. આપણે કહી શકીએ કે અંતર વિધેય $s = 4.9t^2$ના $t = 2$ આગળના *'વિકલિત'*નું મૂલ્ય 19.551 અને 19.649 વચ્ચે હશે.

આકૃતિ 13.1 માં લક્ષનો વિધિ નિહાળવાનો આ એક વૈકલ્પિક માર્ગ છે. આ આલેખ ભેખડની ટોચ પરથી પડતા પદાર્થે જુદા જુદા સમય t વખતે કાપેલ અંતર s નો છે. સમયના અંતરાલની શ્રેણી h_1, h_2,..., જેમ શૂન્યને અનુલક્ષે તેમ સરેરાશ વેગની શ્રેણી પણ આ જ ગુણોત્તરો દ્વારા બનતી શ્રેણી

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \ldots \text{ ને અનુલક્ષે.}$$

અહીં $C_1B_1 = s_1 - s_0$ એ $h_1 = AC_1$, સમયગાળામાં પદાર્થે કાપેલ અંતર છે વગેરે. આકૃતિ 13.1 થી નિશ્ચિત રીતે તારવી શકાય કે આ રીતે બનતી શ્રેણી વક્ર પરના બિંદુ A આગળના સ્પર્શકના ઢાળને અનુલક્ષે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $t = 2$ સમયે પદાર્થનો તાત્ક્ષણિક વેગ $v(t)$ એ $s = 4.9t^2$ વક્રના $t = 2$ આગળના સ્પર્શકના ઢાળ જેટલો છે.

13.3 લક્ષ

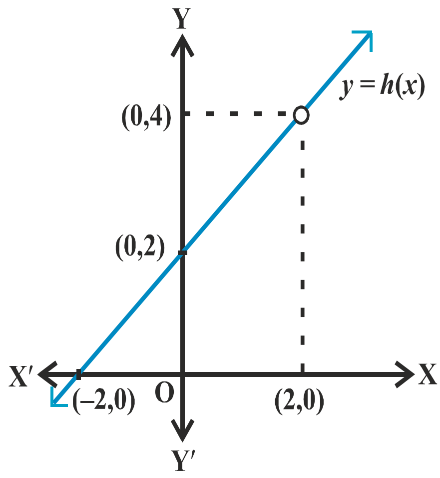
લક્ષના વિધિને વધારે સ્પષ્ટતાપૂર્વક સમજવાની જરૂર છે, એવું આપણને આગળની ચર્ચા પરથી સ્પષ્ટ જણાય છે. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો પરથી લક્ષનો સાહજિક ખ્યાલ મેળવીશું.

વિધેય $f(x) = x^2$ લો. જુઓ કે જેમ x નું મૂલ્ય 0 ની નજીક હોય તેમ $f(x)$ પણ 0 ની નજીક જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 2.10 પ્રકરણ 2) આપણે કહી શકીએ કે,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

(જેમ x શૂન્યને અનુલક્ષે તેમ $f(x)$ નું લક્ષ 0 બને તેમ વંચાય). આમ, જેમ x, 0 ને અનુલક્ષે તેમ વિધેય $f(x)$ નું મૂલ્ય 0 છે તેવું અનુમાન કરી શકાય.

વ્યાપક રીતે, જેમ $x \to a$ તેમ $f(x) \to l$, તો l ને *વિધેય $f(x)$ નું લક્ષ* કહેવાય છે. આ માહિતીને સંકેતમાં $\lim_{x \to a} f(x) = l$ એમ લખાય.



આકૃતિ 13.2

વિધેય $g(x) = |x|$, $x \neq 0$ નો વિચાર કરો. જુઓ કે $g(0)$ વ્યાખ્યાયિત નથી. x ની કિંમત 0 ની ઘણી નજીક લઈએ તો $g(x)$ નાં મૂલ્યની ગણતરી કરતાં આપણે જોઈ શકીએ તે 0 ની નજીક જતી જાય છે. આથી, $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

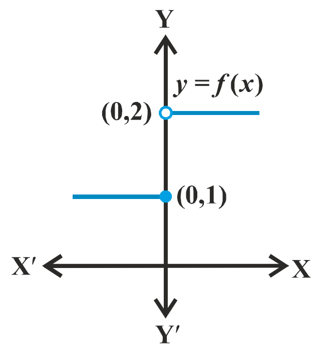
આ વસ્તુ $y = |x|$, $x \neq 0$ ના આલેખ પરથી ત્વરિત સ્પષ્ટ થાય છે (જુઓ આકૃતિ 2.13, પ્રકરણ 2).

હવે, $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$ નો વિચાર કરો.

2 ની ઘણી નજીક (પરંતુ 2 નહિ) હોય તેવી x ની કિંમતો લઈને $h(x)$ ની ગણતરી કરીએ. તમે માની શકો કે બધી જ કિંમતો 4 ની નજીક હશે. અહીં, આપેલ વિધેય $y = h(x)$ ના આલેખ પરથી તે વધુ સ્પષ્ટ થાય છે. (આકૃતિ 13.2)

આ બધાં જ ઉદાહરણોમાં વિધેયનું $x = a$ આગળનું મૂલ્ય, x એ a ને કઈ રીતે અનુલક્ષે છે તેના પર આધારિત નથી. નોંધો કે x એ a ને ડાબી અથવા જમણી બાજુથી એમ બે રીતે અનુલક્ષે છે. અર્થાત્ x નાં તમામ મૂલ્યો કે જે a થી નજીક છે તે a થી મોટાં અથવા a થી નાનાં હોઈ શકે. સ્વાભાવિક રીતે તે બે લક્ષ તરફ દોરે છે, જમણી બાજુનું લક્ષ અને ડાબી બાજુનું લક્ષ. વિધેય $f(x)$ ના જમણી બાજુના લક્ષ દ્વારા મળતાં મૂલ્યો એ x, a ને જમણી બાજુથી અનુલક્ષે ત્યારે મળતા $f(x)$ નાં મૂલ્યો જેટલાં છે. આ જ રીતે, ડાબી બાજુના લક્ષનું ઉદાહરણ આપવા, વિધેય

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$ નો વિચાર કરીએ.



આકૃતિ 13.3

તેનો આલેખ આકૃતિ 13.3 માં દર્શાવેલ છે. વિધેય f ના $x \leq 0$ દ્વારા મળતા $f(x)$ નાં મૂલ્યો લખતાં એ સ્પષ્ટ છે કે $f(x)$ નું 0 આગળનું મૂલ્ય 1 થાય અર્થાત્ વિધેય $f(x)$ નું 0 આગળનું ડાબી બાજુનું લક્ષ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ તેમ લખાય.

આ જ રીતે, વિધેય f ના $x > 0$ દ્વારા મળતાં $f(x)$ નાં મૂલ્યો લખતાં તે 2 છે. અર્થાત્ વિધેય $f(x)$ નું 0 આગળનું જમણી બાજુનું લક્ષ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$ તેમ લખાય.

આ કિસ્સામાં ડાબી તથા જમણી બાજુનાં લક્ષનાં મૂલ્યો અલગ છે અને આથી આપણે કહી શકીએ કે વિધેય $f(x)$ નું લક્ષ x, 0 ને અનુલક્ષે ત્યારે શક્ય નથી. (જો કે અહીં વિધેય $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત છે.)

સારાંશ

f ની a થી ડાબી બાજુની x ની કિંમતો માટે $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ એ વિધેય f ની $x = a$ આગળ અપેક્ષિત કિંમત છે.

x ની a થી જમણી બાજુની કિંમતો માટે x ની a આગળ અપેક્ષિત કિંમત $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ છે.

જો ડાબી અને જમણી બાજુના લક્ષનાં મૂલ્યો સમાન હોય, તો આ સામાન્ય કિંમતને $f(x)$ નું $x = a$ આગળનું લક્ષ કહે છે તથા તેનો સંકેત $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ છે.

દ્રષ્ટાંત 1 : વિધેય $f(x) = x + 10$ નો વિચાર કરો. આપણે આ વિધેયનું $x = 5$ આગળનું લક્ષ શોધીશું. આપણે જ્યારે x ની કિંમત 5 ની ઘણી જ નજીક હોય ત્યારે વિધેય $f(x)$ નાં મૂલ્યો શોધીશું. 5 થી ડાબી તરફની કેટલીક કિંમતો 4.9, 4.95, 4.99, 4.995. . ., વગેરે છે. આ બિંદુઓ આગળના વિધેયનાં મૂલ્યો નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે. આ જ રીતે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ 5.001, 5.01, 5.1 5 થી જમણી તરફના નજીકનાં બિંદુઓ છે. વિધેયમાં આ બિંદુઓ આગળનાં મૂલ્યો પણ કોષ્ટક 13.4 માં દર્શાવેલ છે.

કોષ્ટક 13.4

x	4.9	4.95	4.99	4.995	5.1	5.01	5.001
$f(x)$	14.9	14.95	14.99	14.995	15.1	15.01	15.001

કોષ્ટક 13.4 પરથી, આપણે x = 4.995 અને 5.001 વચ્ચેની કિંમત પરથી તારવી શકીએ કે x = 5 આગળ $f(x)$ નું મૂલ્ય 14.995 કરતાં મોટું અને 15.001 કરતાં નાનું હશે. એ માનવું યોગ્ય રહેશે કે વિધેય $f(x)$ નું $x = 5$ આગળનું મૂલ્ય 5 ની ડાબી બાજુની સંખ્યાઓ માટે 15 છે અર્થાત્, $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 15$.

આ જ રીતે જેમ x, 5 ને જમણી તરફથી અનુલક્ષે તેમ $f(x)$ નું મૂલ્ય 15 લઈ શકાય અર્થાત્, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 15$.

આથી, વિધેય fના ડાબી તથા જમણી બાજુના લક્ષનાં મૂલ્યો 15 હોય તે સંભવિત છે.

$$\text{આમ, } \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5} f(x) = 15.$$

આ અનુમાન કે, લક્ષનું મૂલ્ય 15 છે તે આકૃતિ 2.16, પ્રકરણ 2 ના આલેખ પરથી થોડું વધુ સારી રીતે સમજી શકાય. આ આકૃતિ પરથી, આપણે નોંધીએ કે જેમ x, 5 ને ડાબી અથવા જમણી બાજુથી અનુલક્ષે તેમ $f(x) = x + 10$ નો આલેખ બિંદુ (5, 15) ને અનુલક્ષે. આપણે જોઈ શકીએ કે વિધેયનું x = 5 આગળનું મૂલ્ય પણ 15 છે.

દૃષ્ટાંત 2 : વિધેય $f(x) = x^3$ લો. આપણે x = 1 આગળ લક્ષ મેળવવાનો પ્રયત્ન કરીએ. આગળ પ્રમાણે આપણે x ની 1 થી નજીકની કિંમતો માટે $f(x)$ નાં મૂલ્યોનું કોષ્ટક બનાવીએ. (જુઓ કોષ્ટક 13.5)

કોષ્ટક 13.5

x	0.9	0.99	0.999	1.1	1.01	1.001
$f(x)$	0.729	0.970299	0.997002999	1.331	1.030301	1.003003001

કોષ્ટક પરથી આપણે તારવી શકીએ કે f નું $x = 1$ આગળનું મૂલ્ય 0.997002999 થી વધુ અને 1.003003001 થી નાનું છે. એવું માની લઈએ કે x = 0.999 અને x = 1.001 વચ્ચે કશું જ અનપેક્ષિત બનતું નથી. આથી, એવું અનુમાન કરવું વ્યાજબી છે કે વિધેય $f(x)$ નું x = 1 આગળનું ડાબી બાજુનું લક્ષ 1 છે. અર્થાત્

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1.$$

આ જ રીતે, જેમ x, 1ને જમણી બાજુથી અનુલક્ષે તેમ પણ $f(x)$નું મૂલ્ય 1 બને. અર્થાત્

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1.$$

આથી કહી શકાય કે $f(x)$ નું ડાબી બાજુનું લક્ષ અને જમણી બાજુનું લક્ષ સમાન છે અને તે 1 જેટલું છે. આમ,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1.$$

વિધેયનો આલેખ (આકૃતિ 2.11, પ્રકરણ 2) જોતાં લક્ષનું મૂલ્ય 1 છે તે તારણને સમર્થન મળે છે. આ આકૃતિમાં આપણે નોંધીએ કે જેમ x ડાબી કે જમણી બાજુથી 1 ને અનુલક્ષે તેમ $f(x) = x^3$ વિધેયનો આલેખ બિંદુ (1, 1)ને અનુલક્ષે છે.

આપણે પુનઃ જોઈ શકીએ કે વિધેયનું $x = 1$ આગળનું લક્ષ 1 છે.

દૃષ્ટાંત 3 : વિધેય $f(x) = 3x$ લો. આપણે આ વિધેયનું $x = 2$ આગળ લક્ષ શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ. નીચેનું કોષ્ટક 13.6 હવે સ્વયં સ્પષ્ટ છે.

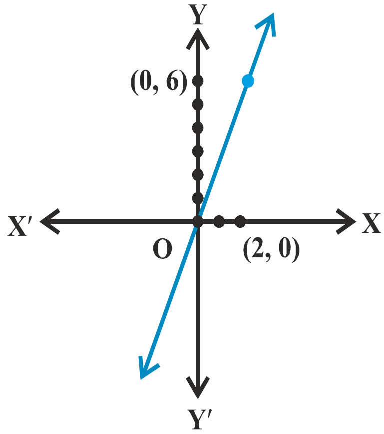
કોષ્ટક 13.6

x	1.9	1.95	1.99	1.999	2.1	2.01	2.001
$f(x)$	5.7	5.85	5.97	5.997	6.3	6.03	6.003

આગળ જોઈ ગયાં તેમ x ડાબી કે જમણી બાજુથી 2 ને અનુલક્ષે તેમ વિધેય $f(x)$, 6 ને અનુલક્ષે તેમ લાગે છે.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 6$ છે એમ નોંધીએ. આકૃતિ 13.4 દ્વારા આ વાતને સમર્થન મળે છે.

અહીં, ફરીથી આપણે નોંધીએ કે વિધેયનું $x = 2$ આગળનું મૂલ્ય એ જ $x = 2$ આગળનું લક્ષ છે.



આકૃતિ 13.4

દ્રષ્ટાંત 4 : અચળ વિધેય $f(x) = 3$ નો વિચાર કરો. $x = 2$ આગળ લક્ષ શોધવાનો પ્રયત્ન કરીએ. આ વિધેય અચળ હોવાથી બધે જ તેની સમાન કિંમત (આ કિસ્સામાં 3) મળશે. આથી 2 ની નજીકના બિંદુ માટે તેનું મૂલ્ય 3 છે. આથી,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

$f(x) = 3$ નો આલેખ (0, 3)માંથી પસાર થતી x-અક્ષને સમાંતર રેખા છે તે આકૃતિ 2.9, પ્રકરણ 2 દ્વારા દર્શાવેલ છે. આથી પણ સ્પષ્ટ છે કે, જરૂરી લક્ષ 3 છે. અલબત્ત સહેલાઈથી તારવી શકાય કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે $\lim_{x \to a} f(x) = 3$.

દ્રષ્ટાંત 5 : વિધેય $f(x) = x^2 + x$ નો વિચાર કરો. આપણે $\lim_{x \to 1} f(x)$ મેળવવું છે. આપણે કોષ્ટક 13.7 પ્રમાણે $x = 1$ ની નજીકની કિંમતો માટે $f(x)$નાં મૂલ્યોનો વિચાર કરીશું.

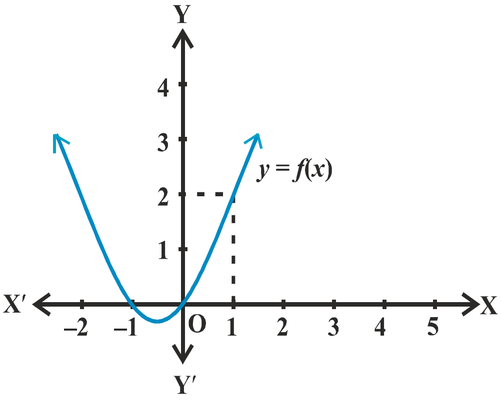
કોષ્ટક 13.7

x	0.9	0.99	0.999	1.2	1.1	1.01
$f(x)$	1.71	1.9701	1.997001	2.64	2.31	2.0301

આ પરથી તારવવું યોગ્ય છે કે,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

$f(x) = x^2 + x$ ના આકૃતિ 13.5 માં દર્શાવેલ આલેખ પરથી સ્પષ્ટ છે કે જેમ x, 1 ને અનુલક્ષે તેમ આલેખ (1, 2) ને અનુલક્ષે.



આકૃતિ 13.5

અહીં, એ પણ જોઈ શકાય કે,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

હવે, નીચેની ત્રણ બાબતોનો સ્વીકાર કરો :

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1, \quad \lim_{x \to 1} x = 1 \quad \text{અને} \quad \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$$

અને $$\lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} x = 1 + 1 = 2 = \lim_{x \to 1} (x^2 + x)$$

તથા $$\lim_{x \to 1} x . \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 \cdot 2 = 2 = \lim_{x \to 1} [x(x+1)] = \lim_{x \to 1} [x^2 + x].$$

દ્રષ્ટાંત 6 : વિધેય $f(x) = sin\, x$ લો. આપણને $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} sin\, x$, શોધવામાં રસ છે, અહીં ખૂણાનું માપ રેડિયનમાં છે.

અહીં, આપણે $\frac{\pi}{2}$ ની નજીકની $f(x)$ની કિંમતો (અંદાજિત) માટેનું કોષ્ટક બનાવીશું (કોષ્ટક 13.8). આ પરથી, આપણે તારવી શકીએ કે $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 1$.

વળી, આકૃતિ 3.8 (પ્રકરણ 3) માં દોરેલ $f(x) = sin\, x$ ના આલેખ પરથી આ બાબતને સમર્થન મળે છે. આ કિસ્સામાં પણ આપણે જોઈ શકીએ કે, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} sin\, x = 1$.

કોષ્ટક 13.8

x	$\frac{\pi}{2}-0.1$	$\frac{\pi}{2}-0.01$	$\frac{\pi}{2}+0.1$	$\frac{\pi}{2}+0.01$
$f(x)$	0.9950	0.9999	0.9950	0.9999

દ્રષ્ટાંત 7 : વિધેય $f(x) = x + cos\, x$ નો વિચાર કરો. આપણે $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ શોધીશું.

અહીં, આપણે $f(x)$ ની 0 ની નજીકની કિંમતો (અંદાજિત) માટેનું કોષ્ટક બનાવીશું (કોષ્ટક 13.9).

કોષ્ટક 13.9

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0950	1.00995	1.0009995

કોષ્ટક 13.9 પરથી, આપણે તારવી શકીએ કે,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

અહીં પણ તારવી શકાય કે $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$.

હવે, તમે નીચેના નિર્ણય પર આવવા માટે માનસિક રીતે તૈયાર છો કે,

$$\lim_{x\to 0}(x + cos\, x) = \lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} cos\, x$$ એ ખરેખર સત્ય છે?

દ્રષ્ટાંત 8 : $x > 0$ માટે વિધેય $f(x) = \frac{1}{x^2}$ નો વિચાર કરો. આપણે $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ શોધીશું.

અહીં, અવલોકન કરો કે વિધેયનો પ્રદેશ તમામ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે. આથી, આપણે જ્યારે $f(x)$નું કોષ્ટક તૈયાર કરીએ ત્યારે x એ 0 ને ડાબી બાજુથી અનુલક્ષે છે તેમ કહેવાનો અર્થ નથી. આપણે નીચે x ની 0 થી નજીકની ધન કિંમતો માટેની $f(x)$ની કિંમતો માટેનું કોષ્ટક તૈયાર કરીએ. (આ કોષ્ટકમાં n કોઈ ધન પૂર્ણાંક દર્શાવે છે.)

નીચે આપેલ કોષ્ટક 13.10 પરથી, આપણે જોઈ શકીએ કે જેમ x, 0ને અનુલક્ષે તેમ $f(x)$ની કિંમત મોટી અને મોટી બનતી જાય છે. આપણો કહેવાનો અર્થ એ કે $f(x)$ ની કિંમત કોઈ પણ આપેલ સંખ્યા કરતાં મોટી બનાવી શકાય.

કોષ્ટક 13.10

x	1	0.1	0.01	10^{-n}
$f(x)$	1	100	10000	10^{2n}

ગાણિતિક રીતે,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \text{ કહીશું.}$$

ખરેખર તો જેમ $x \to 0^+$ તેમ $f(x) \to \infty$ કહેવાય

આપણે એ નોંધીશું કે આ પ્રકારના લક્ષનો આપણા અભ્યાસક્રમમાં સમાવેશ નહિ કરીએ.

દ્રષ્ટાંત 9 : આપણે $\lim_{x\to 0} f(x)$ શોધીશું.

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$$

દર વખતની જેમ આપણે x ની 0 ની નજીકની કિંમતો માટે $f(x)$ નું કોષ્ટક તૈયાર કરીશું. નોંધીએ કે x ની ઋણ કિંમતો માટે આપણે $x - 2$ ની અને x ની ધન કિંમતો માટે આપણે $x + 2$ ની કિંમતો શોધવી પડે.

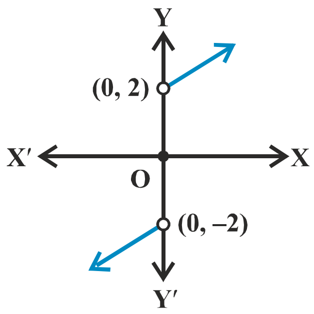
કોષ્ટક 13.11

x	– 0.1	– 0.01	– 0.001	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	– 2.1	– 2.01	– 2.001	2.1	2.01	2.001

કોષ્ટક 13.11 ની શરૂઆતની ઋણ કિંમતો માટે આપણે તારવીએ કે વિધેયની કિંમતો –2 તરફ વધતી જાય છે. અને આથી,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$$

કોષ્ટકની છેલ્લી ત્રણ કિંમતો પરથી આપણે તારવીએ કે, વિધેયની કિંમતો 2 થી વધુ રહીને 2 તરફ ઘટતી જાય છે.



આકૃતિ 13.6

$$\text{આમ } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

ડાબી તથા જમણી બાજુના લક્ષનાં મૂલ્યો સમાન ન હોવાથી, આપણે કહી શકીએ વિધેયનું 0 આગળનું લક્ષ શક્ય નથી.

આ વિધેયનો આલેખ આકૃતિ 13.6 માં આપેલ છે. અહીં, આપણે નોંધીએ કે $x = 0$ આગળ વિધેયની કિંમત વ્યાખ્યાયિત છે અને તે 0 છે. પરંતુ $x = 0$ આગળ વિધેયનું લક્ષ વ્યાખ્યાયિત નથી.

દ્રષ્ટાંત 10 : છેલ્લા ઉદાહરણ તરીકે આપણે $\lim_{x\to 1} f(x)$ શોધીએ, જ્યાં

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x \neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

કોષ્ટક 13.12

x	0.9	0.99	0.999	1.1	1.01	1.001
$f(x)$	2.9	2.99	2.999	3.1	3.01	3.001

દર વખતની જેમ x ની 1 ની નજીકની કિંમતો માટે $f(x)$ નું કોષ્ટક તૈયાર કરીએ. x ની 1 થી નાની કિંમતો માટે $f(x)$ની કિંમતો જોતાં એવું લાગે છે કે $x = 1$ આગળ તેનું મૂલ્ય 3 થવું જોઈએ અર્થાત્

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3.$$

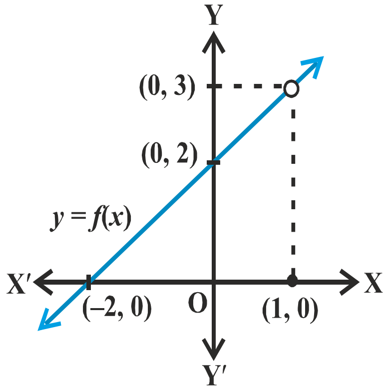
આ જ રીતે, ચર્ચા કર્યા પ્રમાણે x ની 1 થી મોટી કિંમતો માટે પણ $f(x)$ નું મૂલ્ય 3 બનવું જોઈએ અર્થાત્

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3.$$

આથી ડાબી અને જમણી બાજુનાં લક્ષ સમાન છે અને આથી,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

વિધેયના આકૃતિ 13.7 માં દર્શાવેલ આલેખ પરથી લક્ષના આ તારણને સમર્થન મળે છે. અહીં, આપણે નોંધીએ કે વ્યાપક રીતે, આપેલ વિધેયનું મૂલ્ય અને તેનું લક્ષ અલગ હોઈ શકે. (જ્યારે બંને વ્યાખ્યાયિત હોય, ત્યારે પણ)



આકૃતિ 13.7

13.3.1 લક્ષનું બીજગણિત

ઉપરનાં ઉદાહરણોમાં આપણે જોયું કે જો વિચારણા હેઠળના લક્ષ અને વિધેય સુવ્યાખ્યાયિત હોય તો લક્ષની પ્રક્રિયા સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારની પ્રક્રિયાને અનુસરે છે. આ યોગાનુયોગ નથી. અલબત, આપણે સાબિતી આપ્યા વગર નીચેનાં સૂત્રો પ્રમેય તરીકે લઈશું:

પ્રમેય 1: જો f અને g એ બે વિધેયો માટે $\lim_{x \to a} f(x)$ અને $\lim_{x \to a} g(x)$ નાં અસ્તિત્વ હોય, તો

(i) બે વિધેયોના સરવાળાનું લક્ષ, વિધેયના લક્ષના સરવાળા જેટલું હોય છે, અર્થાત્

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

(ii) બે વિધેયોની બાદબાકીનું લક્ષ, વિધેયના લક્ષની બાદબાકી જેટલું હોય છે, અર્થાત્

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x).$$

(iii) બે વિધેયોના ગુણાકારનું લક્ષ, વિધેયના લક્ષના ગુણાકાર જેટલું હોય છે, અર્થાત્

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

(iv) જ્યારે છેદ શૂન્યેતર હોય ત્યારે બે વિધેયોના ભાગાકારનું લક્ષ, વિધેયના લક્ષના ભાગાકાર જેટલું હોય છે અર્થાત્

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

> **નોંધ** ખાસ કરીને ઉપરોક્ત વિકલ્પ (iii) માં જો g અચળ વિધેય હોય કે જેથી $g(x) = \lambda$, λ, કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો
>
> $$\lim_{x \to a} [(\lambda \cdot f)(x)] = \lambda \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

નીચેના બે ઉપવિભાગોમાં આ પ્રમેયોનો ઉપયોગ ખાસ પ્રકારનાં વિધેયોનાં લક્ષ શોધવા કેવી રીતે કરીશું તે જોઈશું.

13.3.2 ***બહુપદી વિધેયનું તથા સંમેય વિધેયનું લક્ષ :*** વિધેય f માટે જો $f(x)$ એ શૂન્ય વિધેય હોય અથવા પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, જ્યાં a_i વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને $a_n \neq 0$ તો વિધેય f ને બહુપદી વિધેય કહેવાય.

આપણે જાણીએ છીએ કે $\lim_{x \to a} x = a$.

આથી, $\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} (x \cdot x) = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x = a \cdot a = a^2$

ગાણિતિક અનુમાનના n પરના સરળ ઉપયોગથી કહી શકાય કે $\lim_{x \to a} x^n = a^n$

હવે, ધારો કે $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ એ બહુપદી વિધેય છે. પ્રત્યેક $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n$ ને વિધેય

તરીકે વિચારતાં,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n\right]$$

$$= \lim_{x\to a} a_0 + \lim_{x\to a} a_1x + \lim_{x\to a} a_2x^2 + \ldots + \lim_{x\to a} a_nx^n$$

$$= a_0 + a_1\lim_{x\to a} x + a_2\lim_{x\to a} x^2 + \ldots + a_n\lim_{x\to a} x^n$$

$$= a_0 + a_1a + a_2a^2 + \ldots + a_na^n$$

$$= f(a)$$

(ખાતરી કરો કે ઉપરના દરેક પદને તમે યોગ્ય રીતે સમજી શકો છો.)

જો $g(x)$ અને $h(x)$ એ બહુપદી વિધેયો હોય અને $h(x) \neq 0$ તો, વિધેય $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ ને સંમેય વિધેય કહેવાય. આથી,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}$$

અલબત્, જો $h(a) = 0$ તો બે પરિસ્થિતિ સર્જાય (i) $g(a) \neq 0$ અને (ii) $g(a) = 0$. પ્રથમ વિકલ્પમાં લક્ષનું અસ્તિત્વ નથી. બીજા કિસ્સામાં $g(x) = (x-a)^k g_1(x)$, જ્યાં k, $g(x)$ માં $(x-a)$ નો મહત્તમ ઘાતાંક છે.

આ જ રીતે, $h(x) = (x-a)^l h_1(x)$ કારણ કે $h(a) = 0$. અહીં l એ $h(x)$ માં $x-a$ નો મહત્તમ ઘાતાંક છે. અહીં પણ $g_1(a) \neq 0$, $h_1(a) \neq 0$. હવે, જો $k > l$, તો

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} h(x)} = \frac{\lim_{x\to a}(x-a)^k g_1(x)}{\lim_{x\to a}(x-a)^l h_1(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to a}(x-a)^{(k-l)} g_1(x)}{\lim_{x\to a} h_1(x)} = \frac{0\cdot g_1(a)}{h_1(a)} = 0$$

જો $k < l$ તો, લક્ષ વ્યાખ્યાયિત નથી. જો $k = l$ તો $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{g_1(a)}{h_1(a)}$

ઉદાહરણ 1 : લક્ષ શોધો : (i) $\lim_{x\to 1}\left[x^3 - x^2 + 1\right]$ (ii) $\lim_{x\to 3}\left[x(x+1)\right]$

(iii) $\lim_{x\to -1}\left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right]$

ઉકેલ : આવશ્યક લક્ષ એ બહુપદી વિધેયનાં લક્ષ છે. આથી, લક્ષનાં મૂલ્ય એ વિધેયની તે આગળની કિંમત બને.

(i) $\lim_{x\to 1}\left[x^3 - x^2 + 1\right] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim_{x\to 3}\left[x(x+1)\right] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

(iii) $\lim_{x\to -1}\left[1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}\right] = 1 + (-1) + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{10} = 1 - 1 + 1 - \ldots + 1 = 1$

ઉદાહરણ 2 : લક્ષ શોધો :

(i) $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{x^2+1}{x+100}\right]$ (ii) $\lim_{x\to 2}\left[\dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4}\right]$

(iii) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}\right]$

(iv) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}\right]$

(v) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x-2}{x^2-x}-\dfrac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]$

ઉકેલ : અહીં, તમામ વિધેયો સંમેય વિધેય છે. આથી, આપણે પહેલાં આપેલ બિંદુ આગળ વિધેયનું મૂલ્ય શોધીશું. જો તે $\dfrac{0}{0}$ સ્વરૂપનું હોય, તો તે $\dfrac{0}{0}$ બનાવતા અવયવને દૂર કરી અને ફરી લખવાનો પ્રયત્ન કરીશું.

(i) અહીં, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x+100}=\dfrac{1^2+1}{1+100}=\dfrac{2}{101}$

(ii) વિધેયનું 2 આગળ મૂલ્ય શોધતાં તે $\dfrac{0}{0}$ સ્વરૂપનું છે.

આથી, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)}{(x+2)}$, કારણ કે $x\neq 2$

$= \dfrac{2(2-2)}{2+2}=\dfrac{0}{4}=0$

(iii) વિધેયનું 2 આગળ મૂલ્ય શોધતાં, તે $\dfrac{0}{0}$ સ્વરૂપનું છે.

આથી, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)}{x(x-2)}=\dfrac{2+2}{2(2-2)}=\dfrac{4}{0}$ અવ્યાખ્યાયિત છે.

(iv) વિધેયનું 2 આગળ મૂલ્ય શોધતાં આપણને $\dfrac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

આથી, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{(x-3)}=\dfrac{(2)^2}{2-3}=\dfrac{4}{-1}=-4$

(v) પ્રથમ આપણે વિધેયને સંમેય વિધેય સ્વરૂપે લખીએ.

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]=\left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x\left(x^2-3x+2\right)}\right]$$

$$=\left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$=\left[\frac{x^2-4x+4-1}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$=\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

વિધેયનું 1 આગળ મૂલ્ય શોધતાં આપણને $\frac{0}{0}$ સ્વરૂપ મળે છે.

આથી $$\lim_{x\to1}\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]=\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x(x-2)}=\frac{1-3}{1(1-2)}=2$$

આપણે નોંધીએ કે આપણે $(x-1)$ પદ ગણતરીમાંથી દૂર કરી શકીએ છીએ, કારણ કે $x\neq1$.

જેનો ઉપયોગ આગળની ચર્ચામાં કરીશું, તેવા એક અગત્યના લક્ષની ગણતરી નીચે આપેલ છે:

પ્રમેય 2 : કોઈ પણ ધન પૂર્ણાંક n માટે

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

નોંધ : ઉપરના પ્રમેયમાં આપેલ લક્ષ કોઈ પણ સંમેય સંખ્યા n તથા ધન a માટે પણ સત્ય છે.

સાબિતી : (x^n-a^n) ને $(x-a)$ વડે ભાગતાં, જોઈ શકાય કે

$$x^n-a^n=(x-a)\,(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+x\,a^{n-2}+a^{n-1})$$

આથી, $$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+x\,a^{n-2}+a^{n-1})$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\ldots+a^{n-2}\cdot(a)+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1}+a^{n-1} \qquad (n \text{ પદ})$$

$$=na^{n-1}$$

ઉદાહરણ 3 : ગણતરી કરો :

(i) $\lim_{x\to1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1}$ (ii) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

ઉકેલ : (i) અહીં

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{15}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\div\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\right]\div\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= 15\,(1)^{14}\div 10(1)^{9} \qquad \text{(આગળના પ્રમેય પરથી)}$$

$$= 15\div 10=\frac{3}{2}$$

(ii) $y = 1 + x$, લેતાં, જેમ $x\to 0$ તેમ $y\to 1$

આથી,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{y\to 1}\frac{\sqrt{y}-1}{y-1}$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{y^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{y-1}$$

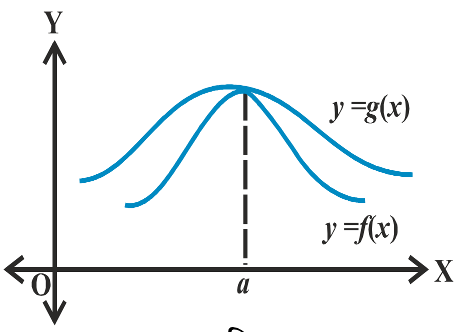
$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1} \qquad \text{(આગળની નોંધ પરથી)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

13.4 ત્રિકોણમિતિય વિધેયનાં લક્ષ

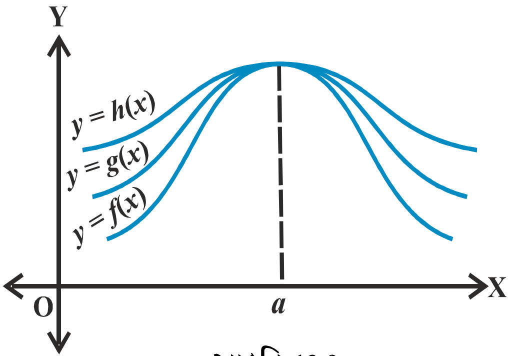
નીચે આપેલ વિધેયની માહિતી (જેનો પ્રમેય તરીકે ઉપયોગ કરેલ છે) ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં લક્ષ શોધવા ઉપયોગી થશે.

પ્રમેય 3 : ધારો કે f અને g વાસ્તવિક સંખ્યા પરના સમાન પ્રદેશવાળાં વિધેય છે અને વ્યાખ્યામાં આવતા પ્રદેશના પ્રત્યેક x માટે $f(x) < g(x)$ છે. કોઈ a માટે જો $\lim_{x\to a} f(x)$ અને $\lim_{x\to a} g(x)$નું અસ્તિત્વ હોય, તો $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$. આ હકીકત આકૃતિ 13.8 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ13.8

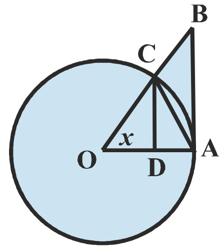
પ્રમેય 4 : (સેન્ડવિચ પ્રમેય) ધારો કે f, g અને h વાસ્તવિક વિધેયો છે, અને વ્યાખ્યામાં આવતા પ્રદેશના પ્રત્યેક x માટે $f(x) < g(x) < h(x)$. કોઈક વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે, જો $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$, તો $\lim_{x\to a} g(x) = l$. આ આકૃતિ 13.9માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 13.9

ત્રિકોણમિતિય વિધેયની એક અગત્યની અસમતા માટે નીચે સુંદર ભૌમિતિક સાબિતી આપેલ છે:

$$0<|x|<\frac{\pi}{2} \text{ માટે } \cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \qquad (*)$$



આકૃતિ 13.10

સાબિતી : આપણે જાણીએ છીએ કે $\sin(-x) = -\sin x$ અને $\cos(-x) = \cos x$.

આથી, આ સાબિતી અસમતા $0<x<\frac{\pi}{2}$ માટે આપવી પૂરતી છે. આકૃતિ 13.10 માં, $\angle AOC$, x રેડિયન માપનો છે અને $0<x<\frac{\pi}{2}$ થાય તે રીતે O કેન્દ્રવાળું એકમ વર્તુળ છે. રેખાખંડ BA અને CD OAને લંબ છે. હવે, AC જોડો.

આથી, ΔOAC નું ક્ષેત્રફળ < વૃત્તાંશ OAC નું ક્ષેત્રફળ < ΔOAB નું ક્ષેત્રફળ.

અર્થાત્ $\frac{1}{2}OA \cdot CD < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot (OA)^2 < \frac{1}{2}OA \cdot AB.$

અર્થાત્ $CD < x \cdot OA < AB.$

ΔOCD માં, $\sin x = \frac{CD}{OA}$ (કેમ કે OC = OA). તેથી $CD = OA \sin x$. વળી, $\tan x = \frac{AB}{OA}$. તેથી $AB = OA \tan x$.

આમ, $OA \cdot \sin x < OA \cdot x < OA \tan x$

લંબાઈ OA ધન હોવાથી, આપણને $\sin x < x < \tan x$ મળે.

વળી, $0<x<\frac{\pi}{2}$ હોવાથી $\sin x$ ધન છે. આથી $\sin x$ વડે ભાગતાં,

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

બધાં જ પદનાં વ્યસ્ત લેતાં, $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$

આમ, સાબિતી પૂર્ણ થઈ.

પ્રમેય 5 : નીચેનાં બે લક્ષ મહત્ત્વપૂર્ણ છે.

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

સાબિતી : (i) ઉપરોક્ત અસમતા (*) પરથી કહેવાય કે $\frac{\sin x}{x}$ વિધેયનાં મૂલ્ય એ વિધેય $\cos x$ અને જેની કિંમત 1 હોય તેવા અચળ વિધેયની વચ્ચે આવેલાં છે.

વળી, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, હોવાથી આપણે જોઈ શકીએ કે સેન્ડવિચ પ્રમેયની મદદથી (i) સાબિતી થાય.

(ii) સાબિત કરવા, ત્રિકોણમિતિય નિત્યસમ $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ યાદ કરીએ.

આથી, $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1\cdot 0 = 0$$

આપણે જોયું કે માહિતી $x \to 0$ ને $\frac{x}{2} \to 0$ તરીકે લીધેલ છે. આ હકીકત $y = \frac{x}{2}$ લઈને સાર્થક સિદ્ધ કરી શકાય.

ઉદાહરણ 4 : ગણતરી કરો : (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

ઉકેલ : (i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot 2\right]$

$$= 2 \cdot \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$= 2 \cdot \lim_{4x\to 0} \left[\frac{\sin 4x}{4x}\right] \div \lim_{2x\to 0} \left[\frac{\sin 2x}{2x}\right] \qquad (x \to 0, \text{ હોવાથી } 4x \to 0 \text{ અને } 2x \to 0)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$

આ લક્ષની ગણતરી કરતી વખતે જે સામાન્ય ખ્યાલ મનમાં રાખવો જોઈએ તે નીચે પ્રમાણેનો છે:

ધારો કે $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ નું અસ્તિત્વ છે અને આપણે આ લક્ષ શોધવું છે. પ્રથમ આપણે $f(a)$ અને $g(a)$ ની કિંમતો ચકાસીશું. જો બંને 0 હોય તો, આપણે જોઇ શકીએ કે આપણને એવો અવયવ મળે, જેને કારણે પદો 0 બને. અર્થાત્ આપણે $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ લખી શકીએ કે જેથી $f_1(a) = 0$ અને $f_2(a) \neq 0$. આ જ રીતે, આપણે $g(x) = g_1(x)\, g_2(x)$ લખી શકીએ કે જેથી $g_1(a) = 0$ અને $g_2(a) \neq 0$. $f(x)$ અને $g(x)$ નો સામાન્ય અવયવ શક્ય હોય, તો દૂર કરી $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$ લખો, જ્યાં $q(a) \neq 0$.

આમ, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$.

સ્વાધ્યાય 13.1

નીચેના લક્ષની ગણતરી કરો: (ક્રમાંક 1 to 22)

1. $\lim_{x\to 3} (x+3)$ **2.** $\lim_{x\to \pi} \left(x - \frac{22}{7}\right)$ **3.** $\lim_{r\to 1} \pi r^2$

4. $\lim_{x\to 4} \frac{4x+3}{x-2}$ **5.** $\lim_{x\to -1} \frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$ **6.** $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^5 - 1}{x}$

7. $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$ **8.** $\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$ **9.** $\lim_{x\to 0} \frac{ax+b}{cx+1}$

10. $\lim\limits_{z \to 1} \dfrac{z^{\frac{1}{3}} - 1}{z^{\frac{1}{6}} - 1}$

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}, a + b + c \neq 0$

12. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{2}}{x + 2}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{bx}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}, a, b \neq 0$

15. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{\pi - x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax + x\cos x}{b \sin x}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} x \sec x$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$ $a, b, a + b \neq 0$,

21. $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

22. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

23. જો $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 0 \\ 3(x + 1), & x > 0 \end{cases}$ તો $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ અને $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ શોધો.

24. જો $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$ તો $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ શોધો.

25. જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ તો $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ની ગણતરી કરો.

26. જો $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ તો $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ શોધો.

27. જો $f(x) = |x| - 5$ તો $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ શોધો.

28. ધારો કે $f(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$

અને જો, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ તો a અને b ની શક્ય કિંમતો કઈ છે?

29. ધારો કે $a_1, a_2, \ldots, a_n$ એ નિશ્ચિત વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે અને

$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ વ્યાખ્યાયિત કરો,

તો $\lim\limits_{x \to a_1} f(x)$ શું થાય? કોઈક $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$ હોય તો $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ગણો.

30. જો $f(x)=\begin{cases}|x|+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ |x|-1, & x>0\end{cases}$.

a ની કઈ કિંમત (કે કિંમતો) માટે $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ નું અસ્તિત્વ છે?

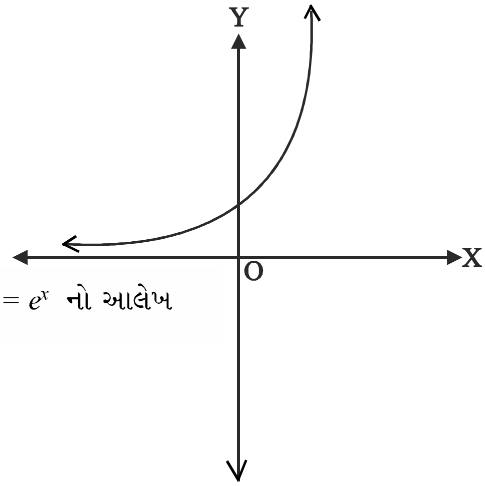
31. જો વિધેય $f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x^2-1}=\pi$ ને સંતોષે, તો $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ શોધો.

32. જો $f(x)=\begin{cases}mx^2+n, & x<0\\ nx+m, & 0\le x\le 1\\ nx^3+m, & x>1\end{cases}$ તો કયા પૂર્ણાંકો m અને n માટે $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ અને $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ એ બંને લક્ષનાં અસ્તિત્વ હોય?

13.5 ઘાતાંકીય અને લઘુગણકીય વિધેય

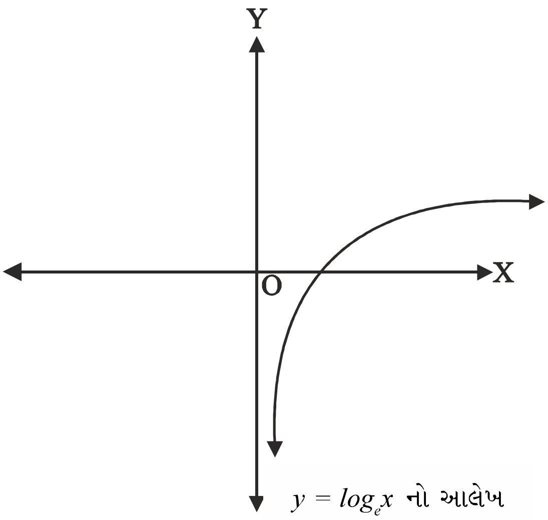
ઘાતાંકીય અને લઘુગણકીય વિધેયને આવરી લેતી અભિવ્યક્તિઓના લક્ષના મૂલ્યાંકનની ચર્ચા કરતાં પહેલાં આપણે બે વિધેયોના પ્રદેશ, વિસ્તાર અને તેમના કાચા આલેખોનું આલેખન કરી તેમનો પરિચય કરીએ.

જેનું મૂલ્ય 2 અને 3 ને વચ્ચે છે એવી સંખ્યા e નો પરિચય મહાન સ્વિસ ગણિતશાસ્ત્રી ***Leonhard Euler*** એ (1707-1783) કરાવ્યો. આ સંખ્યાનો ઘાતાંકીય વિધેયની વ્યાખ્યામાં ઉપયોગ થાય છે અને તેની વ્યાખ્યા $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$ તરીકે કરવામાં આવી છે. તેનો પ્રદેશ $\mathbf{R}$ અને વિસ્તાર ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે. આકૃતિ 13.11 માં ઘાતાંકીય વિધેય $y = e^x$ નો આલેખ આપ્યો છે.



આકૃતિ 13.11

તે જ પ્રમાણે લઘુગણકીય વિધેય $log_e : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$. જો $e^y = x$ તો અને તો જ $log_e x = y$ વડે દર્શાવાય છે. તેનો પ્રદેશ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ $\mathbf{R}^+$ અને વિસ્તાર $\mathbf{R}$ છે. લઘુગણકીય વિધેય $y = log_e x$ નો આલેખ આકૃતિ 13.12 માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 13.12

પરિણામ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ સાબિત કરવા માટે આપણે અભિવ્યક્તિ $\dfrac{e^x-1}{x}$ નો સમાવેશ કરતી એક અસમતાનો ઉપયોગ કરીશું. તે આગળ દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે :

$\frac{1}{1+|x|} \le \frac{e^x - 1}{x} \le 1 + (e-2)\,|x|$. આ અસમતા $[-1, 1] - \{0\}$ ના પ્રત્યેક x માટે સત્ય છે.

પ્રમેય 6 : સાબિત કરો કે $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

સાબિતી : ઉપરની અસમતાનો ઉપયોગ કરતાં,

$$\frac{1}{1+|x|} \le \frac{e^x - 1}{x} \le 1 + |x|\,(e-2),\ x \in [-1, 1] - \{0\}$$

વળી, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+\lim\limits_{x \to 0}|x|} = \frac{1}{1+0} = 1$

અને $\lim\limits_{x \to 0}\left[1 + (e-2)|x|\right] = 1 + (e-2)\lim\limits_{x \to 0}|x| = 1 + (e-2)0 = 1$

આથી, સેન્ડવિચ પ્રમેય પરથી,

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ થાય.

પ્રમેય 7 : સાબિત કરો કે $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

સાબિતી : ધારો કે $\frac{\log_e(1+x)}{x} = y$

તો, $\log_e(1+x) = xy$

$\therefore\ 1 + x = e^{xy}$

$\therefore\ \frac{e^{xy} - 1}{x} = 1$

અથવા $\frac{e^{xy} - 1}{xy} . y = 1$

હવે $\lim\limits_{xy \to 0} \frac{e^{xy} - 1}{xy} \lim\limits_{x \to 0} y = 1$ (કારણ કે $x \to 0$ પરથી $xy \to 0$)

$\therefore\ \lim\limits_{x \to 0} y = 1$ $\left(\text{કારણ કે } \lim\limits_{xy \to 0} \frac{e^{xy} - 1}{xy} = 1\right)$

$\therefore\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

ઉદાહરણ 5 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$ શોધો.

ઉકેલ :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{3x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3$$

$$= 3\left(\lim_{y \to 0} \frac{e^{y} - 1}{y}\right), \quad \text{જ્યાં } y = 3x$$

$$= 3 \cdot 1 = 3$$

ઉદાહરણ 6 : ગણતરી કરો $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - \sin x - 1}{x}$

ઉકેલ :
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \sin x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x - 1}{x} - \frac{\sin x}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$$

ઉદાહરણ 7 : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log_e x}{x-1}$ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 1 + h$ લેતાં, $x \to 1$ તો $h \to 0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_e x}{x-1} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)}{h}$$

$$= 1 \qquad \left(\text{કારણ કે } \lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1\right)$$

સ્વાધ્યાય 13.2

નીચેનાં લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવે તો મેળવો :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x} - 1}{x}$ **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2+x} - e^2}{x}$ **3.** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{e^x - e^5}{x - 5}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x} - 1}{x}$ **5.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x - e^3}{x - 3}$ **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_e(1 + 2x)}{x}$ **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1 + x^3)}{\sin^3 x}$

13.6 વિકલન

આપણે વિભાગ 13.2માં જોઈ ગયાં કે પદાર્થના અલગ અલગ સમય અંતરાલના સ્થાન પરથી એ શોધવું શક્ય બને કે તેના સ્થાનનો બદલાવનો દર કેટલો છે. જીવનમાં બનતી એવી ઘણી ઘટનાઓ છે કે જ્યાં આ પ્રક્રિયા ઉપયોગી બને. દાખલા તરીકે, ડેમની ઊંડાઈ પરથી તે ક્યારે છલકાશે તે ડેમની સંભાળ રાખતા માણસે જાણવું જરૂરી બને છે. રૉકેટશાસ્ત્રમાં વૈજ્ઞાનિકોને રોકેટની ઊંચાઈની માહિતી પરથી ઉપગ્રહ છોડવાની ગતિની ગણતરી કરવાની હોય છે. કોઈ શૅરના વર્તમાનભાવ પરથી તેમાં થનારા ફેરફારની આગાહી નાણા સંસ્થાઓ કરતી હોય છે. આ બધામાં કોઈ રાશિ (સાપેક્ષ ચલ)માં અન્ય કોઈ રાશિ (નિરપેક્ષ ચલ)ને સાપેક્ષ થતાં ફેરફારની માહિતી જરૂરી છે. આ બધી જ માહિતીનું હાર્દ વિધેયના પ્રદેશમાં રહેલ નિશ્ચિત બિંદુએ તેનું વિકલન શોધવાનું છે.

વ્યાખ્યા 1 : ધારો કે f વાસ્તવિક વિધેય છે અને a તેની વ્યાખ્યાના પ્રદેશનું બિંદુ છે. જો $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો *તેને $f(x)$ નું a આગળનું વિકલિત કહે છે અને તેને સંકેત $f'(a)$ વડે દર્શાવાય છે.*

ઉદાહરણ 8 : વિધેય $f(x)=3x$ નું $x = 2$ આગળ વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : અહીં,
$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3(2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{6+3h-6}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

વિધેય $3x$ નું $x = 2$ આગળનું વિકલિત 3 છે.

ઉદાહરણ 9 : વિધેય $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ નું $x = -1$આગળનું વિકલિત શોધો તથા સાબિત કરો કે $f'(0) + 3f'(-1) = 0$.

ઉકેલ : આપણે પ્રથમ વિધેય $f(x)$ ના $x = -1$ અને $x = 0$ આગળના વિકલિત શોધીશું.

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(-1+h)^2+3(-1+h)-5\right]-\left[2(-1)^2+3(-1)-5\right]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2h-1) = 2(0)-1 = -1$$

અને
$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[2(0+h)^2+3(0+h)-5\right]-\left[2(0)^2+3(0)-5\right]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(2h+3) = 2(0)+3 = 3$$

સ્પષ્ટ છે કે, $f'(0)+3f'(-1)=0$

નોંધ : આ તબક્કે નોંધો કે કોઈ બિંદુ આગળ વિકલિત શોધવા લક્ષના ઘણાબધા નિયમોનો અસરકારક ઉપયોગ થાય છે. આગળનું ઉદાહરણ આ બતાવે છે:

ઉદાહરણ 10 : $sin\ x$ નું $x = 0$ આગળ વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = sin\ x$.

$$\text{આથી } f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sin(0+h)-sin(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sin\ h}{h} = 1$$

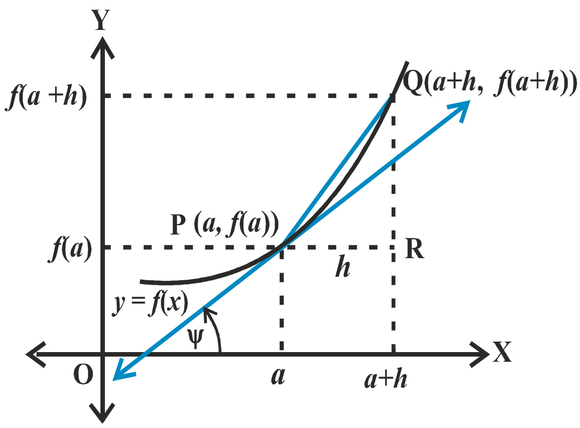
ઉદાહરણ 11 : વિધેય $f(x) = 3$ નું $x = 0$ અને $x = 3$ આગળ વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : વિકલિત એ વિધેયમાં થતા ફેરફારનો દર છે. આથી, પ્રથમ દૃષ્ટિએ રીતે સ્પષ્ટ છે કે અચળ વિધેયનું પ્રત્યેક બિંદુએ વિકલિત શૂન્ય થાય. નીચેની ગણતરીથી આ ધારણાને સમર્થન મળે છે:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.$$

$$\text{આ જ રીતે, } f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h} = 0.$$

હવે, આપણે કોઈ બિંદુએ વિકલિતની સંકલ્પનાનું ભૌમિતિક અર્થઘટન કરીશું. ધારો કે $y = f(x)$ એક વિધેય છે અને $P = (a, f(a))$ અને $Q = (a + h, f(a + h))$ એ વિધેયના આલેખ પરનાં બે નજીકનાં બિંદુઓ છે. આ આકૃતિ 13.11 માં સ્વયંસ્પષ્ટ છે.



આકૃતિ 13.13

આપણે જાણીએ છીએ કે, $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

ત્રિકોણ PQR પરથી, એ સ્પષ્ટ છે કે આપણે જેનું લક્ષ શોધીએ છીએ તે ગુણોત્તર એ જીવા PQ ના ઢાળ $tan\ \angle QPR$ જેટલો છે. લક્ષની પ્રક્રિયામાં જેમ h એ 0 ને અનુલક્ષે તેમ બિંદુ Q એ P ને અનુલક્ષે અને આથી,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{Q\to P}\frac{QR}{PR}$$

આ હકીકત વક્ર $y = f(x)$ માટે જીવા PQ એ P આગળના સ્પર્શકને અનુલક્ષે છે તે રીતે સમજી શકાય. આથી, લક્ષ સ્પર્શકના ઢાળ બરાબર છે. આથી, $f'(a) = \tan\psi$.

આપેલ વિધેય f નું આપણે તેના પ્રદેશના પ્રત્યેક બિંદુએ વિકલિત કરી શકીએ તો તે એક નવું વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરે. તેને f નું વિકલિત કહેવાય. ઔપચારિક રીતે, આપણે વિકલિતની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપીશું:

વ્યાખ્યા 2 : *ધારો કે વિધેય f વાસ્તવિક વિધેય છે. જો લક્ષનું અસ્તિત્વ હોય, તો*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ને વિધેય f નું x આગળનું વિકલિત કહીશું અને તેને $f'(x)$ વડે દર્શાવીશું. વ્યાખ્યાથી શોધાતા વિકલિતને પ્રથમ સિદ્ધાંતથી મેળવેલ વિકલિત કહીશું.

આમ, $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

જે પ્રદેશમાં ઉપરનું લક્ષ મળે તે $f'(x)$ ની વ્યાખ્યાનો પ્રદેશ છે. વિધેયના વિકલિતને દર્શાવતાં અલગ અલગ સંકેતો છે. કેટલીક વખત $f'(x)$ ને $\frac{d}{dx}(f(x))$ અથવા જો $y=f(x)$ તો તે $\frac{dy}{dx}$ દ્વારા દર્શાવાય છે. તેનો અર્થ $f(x)$ અથવા y નું x ને સાપેક્ષ વિકલિત, એમ થાય. તેને D$(f(x))$ વડે પણ દર્શાવાય. વળી, f નું $x=a$ આગળનું વિકલિત $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_a$ અથવા $\left.\frac{df}{dx}\right|_a$ અથવા $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ વડે પણ દર્શાવાય છે.

ઉદાહરણ 12: $f(x)=10x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{10(x+h)-10(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{10h}{h}=\lim_{h\to 0}(10)=10$$

ઉદાહરણ 13 : $f(x)=x^2$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ: અહીં, $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$$

ઉદાહરણ 14 : અચળ વિધેય $f(x)=a$ નું કોઈ નિશ્ચિત વાસ્તવિક અચળ કિંમત માટે વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,\text{ કારણ કે } h\neq 0$$

ઉદાહરણ 15 : $f(x)=\frac{1}{x}$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

13.6.1 વિધેયના વિકલિતનું બીજગણિત: વિકલનની વ્યાખ્યામાં લક્ષના બધા જ નિયમો ઉપયોગમાં લેવાતાં હોવાથી આપણે અપેક્ષા રાખીએ કે વિકલનના નિયમો લક્ષના નિયમોને અનુસરશે. આપણે નીચેના પ્રમેય તરીકે તેમની ચર્ચા કરીશું:

પ્રમેય 8 : ધારો કે વિધેયો f અને g સામાન્ય પ્રદેશમાં વિકલનીય હોય, તો

(i) બે વિધેયના સરવાળાનું વિકલિત એ તેમના વિકલિતના સરવાળા જેટલું હોય.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x).$$

(ii) બે વિધેયના તફાવતનું વિકલિત એ તેમના વિકલિતના તફાવત જેટલું હોય.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x).$$

(iii) બે વિધેયના ગુણાકારનું વિકલિત એ નીચેના ગુણાકારના વિકલિતના નિયમ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

(iv) જ્યારે છેદ શૂન્યેતર હોય ત્યારે બે વિધેયના ભાગાકારના વિકલિતનો નિયમ નીચેના ભાગાકારના નિયમ દ્વારા દર્શાવી શકાય:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

આની સાબિતી લક્ષના પ્રમેયોની સાબિતીને જ અનુસરશે. આપણે આ સાબિતીઓ અહીં આપીશું નહિ. લક્ષની જેમ જ આ પ્રમેયોનો ઉપયોગ કેટલાંક વિશિષ્ટ વિધેયોના વિકલિત મેળવવા માટે કરી શકાય. છેલ્લા બે પ્રમેયોને ફરીથી યાદ ફરીથી યાદ રાખવાનું સરળ બને તે રીતે નીચે પ્રમાણે લખી શકાય:

ધારો કે $u=f(x)$ અને $v=g(x)$, તો

$$(uv)' = u'v+uv'$$

આને લિબનિટ્ઝનો વિકલિતના ગુણાકારનો નિયમ અથવા ગુણાકારનો નિયમ કહીશું. આ જ રીતે, ભાગાકારનો નિયમ

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

હવે, કેટલાંક પ્રમાણિત વિધેયના વિકલનની ક્રિયા હાથ ધરીએ. એ જોવું સરળ છે કે વિધેય $f(x)=x$ નું વિકલિત અચળ વિધેય 1 છે.

કારણ કે $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}1=1$.

આપણે આ અને ઉપરના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી.

$f(x) = 10x = x + ... + x$ (10 વખત) નું વિકલિત શોધીએ. ઉપરના પ્રમેય (*i*) મુજબ,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x+...+x) \qquad \text{(દસ પદ)}$$

$$= \frac{d}{dx}x+...+\frac{d}{dx}x \qquad \text{(દસ પદ)}$$

$$= 1+...+1 \qquad \text{(દસ પદ)}$$

$$= 10$$

આપણે નોંધીએ કે આ લક્ષ ગુણાકારના નિયમથી પણ શોધી શકાય. $f(x) = 10x = uv$ લખો, જ્યાં u એ અચળ વિધેય છે અને તેનું મૂલ્ય 10 અને $v(x) = x$ છે. અહીં, ગુણાકારના નિયમ મુજબ

$$f'(x) = (10x)' = (uv)' = u'v + uv' = 0 \cdot x + 10 \cdot 1 = 10$$

આ જ રીતે $f(x) = x^2$ નું વિકલિત મેળવી શકાય. અહીં, $f(x) = x^2 = x \cdot x$ અને આથી,

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x \cdot x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot x + x \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

$$= 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

વ્યાપક રીતે આપણે નીચેનું પ્રમેય લઈએ.

પ્રમેય 9 : જો n એ ધન પૂર્ણાંક હોય તો $f(x) = x^n$ નું વિકલત nx^{n-1} છે.

સાબિતી : વિકલનની વ્યાખ્યાથી,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

દ્વિપદી પ્રમેયથી, $(x + h)^n = \left({}^nC_0\right)x^n + \left({}^nC_1\right)x^{n-1}h + {}^nC_2 x^{n-2}h^2 + ... + \left({}^nC_n\right)h^n$ અને

આથી, $(x + h)^n - x^n = h(nx^{n-1} + {}^nC_2 x^{n-2}h + ... + h^{n-1})$.

આમ,
$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(nx^{n-1} + {}^nC_2 x^{n-2}h + ... + h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(nx^{n-1} + {}^nC_2 x^{n-2}h + ... + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

બીજી રીત : n પરના ગાણિતિક અનુમાનના સિદ્ધાંતથી પણ આ પ્રમેય સાબિત કરી શકાય.

આ પરિણામ $n = 1$ માટે સત્ય છે, તે આગળ સાબિત કરેલ છે

હવે, $$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(x \cdot x^{n-1}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x) \cdot \left(x^{n-1}\right) + x \cdot \frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\right) \qquad \text{(ગુણાકારના નિયમ પરથી)}$$

$$= 1\cdot x^{n-1} + x\cdot\left((n-1)x^{n-2}\right)$$ (અનુમાનની પૂર્વધારણા)

$$= x^{n-1} + (n-1)x^{n-1}$$

$$= nx^{n-1}$$

નોંધ : ઉપરનું પ્રમેય x ના પ્રત્યેક ઘાતાંક માટે સત્ય છે. અર્થાત્ n કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોઈ શકે. (પરંતુ આપણે અહીં તેની સાબિતી આપીશું નહિ.)

13.6.2 બહુપદી અને ત્રિકોણમિતિય વિધેયોનાં વિકલિત

આપણે નીચેના બહુપદી વિધેયના વિકલિતના પ્રમેયથી શરૂઆત કરીએ:

પ્રમેય 10: જો પ્રત્યેક a_i વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને $a_n \neq 0$ તો બહુપદી વિધેય $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ નું વિકલિત

$$\frac{df(x)}{dx} = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + \ 2a_2x + a_1.$$

આની સાબિતી પ્રમેય 8નો ભાગ (i) અને પ્રમેય 9 સાથે લેવાથી મળે.

ઉદાહરણ 16 : $6x^{100} - x^{55} + x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : ઉપરના પ્રમેયનો પ્રત્યક્ષ ઉપયોગ કરતાં વિકલિત $600x^{99} - 55x^{54} + 1$ મળે.

ઉદાહરણ 17: $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{50}$ નું $x = 1$ આગળ વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : ઉપરના પ્રમેય 9 નો ઉપયોગ કરતાં, વિકલિત $1 + 2x + 3x^2 + . . . + 50x^{49}$ મળે.

$x = 1$ આગળ આ વિધેયનું મૂલ્ય $1 + 2(1) + 3(1)^2 + .. . + 50(1)^{49} = 1 + 2 + 3 + . . . + 50 = \frac{(50)(51)}{2} = 1275.$

ઉદાહરણ 18: $f(x) = \frac{x+1}{x}$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : સ્પષ્ટ છે કે વિધેય $x = 0$ સિવાય વ્યાખ્યાયિત છે. $u = x + 1$ અને $v = x$ લઈ ભાગાકારનો નિયમ વાપરીએ. $u' = 1$ અને $v' = 1$.

આથી, $$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1(x)-(x+1)1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

ઉદાહરણ 19: $sin\,x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $f(x) = sin\,x$.

આથી, $$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{sin(x+h)-sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{2cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$ (sin A $- sin$ Bના સૂત્રથી)

$$= \lim_{h\to 0} cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= cosx \cdot 1 = cosx$$

ઉદાહરણ 20 : *tan x* નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે $f(x) = tan\, x$

આથી, $$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{tan(x+h)-tan(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{sin(x+h)}{cos(x+h)}-\frac{sin\, x}{cosx}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{sin(x+h)cos\, x - cos(x+h)sinx}{hcos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sin(x+h-x)}{hcos(x+h)cos\, x}$$ (*sin* (A + B)ના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{sin\, h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{cos(x+h)cos\, x}$$

$$= 1.\frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$$

ઉદાહરણ 21 : $f(x) = sin^2 x$ નું વિકલિત મેળવો.

ઉકેલ : આપણે લિબનિટ્ઝના ગુણાકારના નિયમનો ઉપયોગ કરીએ.

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(sin\, x\, sin\, x)$$

$$= (sin\, x)'\, sin\, x + sin\, x(sin\, x)'$$

$$= (cos\, x)sin\, x + sin\, x(cos\, x)$$

$$= 2sin\, xcos\, x = sin\, 2x$$

સ્વાધ્યાય 13.3

1. x^2-2 નું $x=10$ આગળનું વિકલિત મેળવો.

2. $99x$ નું $x=100$ આગળનું વિકલિત મેળવો.

3. x નું $x=1$ આગળનું વિકલિત મેળવો.

4. નીચેનાં વિધેયોના વિકલિત પ્રથમ સિદ્ધાંતથી શોધો :

(i) x^3-27 (ii) $(x-1)(x-2)$ (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

5. વિધેય $f(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+...+\frac{x^2}{2}+x+1$ માટે સાબિત કરો કે $f'(1)=100f'(0)$.

6. કોઈક નિશ્ચિત વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે $x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+...+a^{n-1}x+a^n$ નું વિકલિત શોધો.

7. કોઈ અચળ a અને b માટે વિકલિત શોધો :

(i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\frac{x-a}{x-b}$

8. કોઈક અચળ a માટે $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ નું વિકલિત શોધો.

9. વિકલિત શોધો:

(i) $2x-\frac{3}{4}$ (ii) $(5x^3+3x-1)(x-1)$ (iii) $x^{-3}(5+3x)$

(iv) $x^5(3-6x^{-9})$ (v) $x^{-4}(3-4x^{-5})$ (vi) $\frac{2}{x+1}-\frac{x^2}{3x-1}$

10. પ્રથમ સિદ્ધાંતથી $\cos x$ નું વિકલિત શોધો :

11. નીચેનાં વિધેયોનાં વિકલિત શોધો :

(i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x+4\cos x$

(iv) $\operatorname{cosec} x$ (v) $3\cot x+5\operatorname{cosec} x$ (vi) $5\sin x-6\cos x+7$

(vii) $2\tan x-7\sec x$

પ્રકીર્ણ ઉદાહરણો

ઉદાહરણ 22 : f નું પ્રથમ સિદ્ધાંતથી વિકલિત શોધો, જ્યાં

(i) $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ (ii) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

ઉકેલ : (i) આપણે નોંધીએ કે $x=2$ આગળ વિધેય વ્યાખ્યાયિત નથી.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(x+h)+3}{x+h-2}-\frac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h+3)(x-2)-(2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2x+3)(x-2)+2h(x-2)-(2x+3)(x-2)-h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-7}{(x-2)(x+h-2)}$$

$$= -\frac{7}{(x-2)^2}$$

ફરી નોંધો કે વિધેય f' પણ $x = 2$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી, વિધેય પોતે જ $f = 2$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી. વિકલિતની વ્યાખ્યા અનુસાર f એ $x = a$ આગળ વ્યાખ્યાયિત હોય તે જરૂરી છે.

(ii) વિધેય $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h+\frac{1}{x+h}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h+\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h+\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[h\left(1-\frac{1}{x(x+h)}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[1-\frac{1}{x(x+h)}\right]$$

$$= 1-\frac{1}{x^2}$$

ફરી નોંધો કે, વિધેય f' એ $x = 0$ આગળ વ્યાખ્યાયિત નથી. (કેમ ?)

ઉદાહરણ 23 : $f(x)$= (i) $\sin x+\cos x$ (ii) $x\sin x$ નું પ્રથમ સિદ્ધાંતથી વિકલિત શોધો.

ઉકેલ : (i) અહીં, $f'(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)+\cos(x+h)-\sin x-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h+\cos x\cos h-\sin x\sin h-\sin x-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h(\cos x-\sin x)+\sin x(\cos h-1)+\cos x(\cos h-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}(\cos x-\sin x)+\lim_{h\to 0}\sin x\frac{(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\frac{(\cos h-1)}{h}$$

$$=\cos x-\sin x$$

(ii) $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sin(x+h)-x\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(\sin x\cos h+\sin h\cos x)-x\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)+x\cos x\sin h+h(\sin x\cos h+\sin h\cos x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}x\cos x\frac{\sin h}{h}+\lim_{h\to 0}(\sin x\cos h+\sin h\cos x)$$

$$=x\cos x+\sin x$$

ઉદાહરણ 24 : વિકલિત શોધો :

(i) $f(x)=\sin 2x$ (ii) $g(x)=\cot x$

ઉકેલ : (i) ત્રિકોણમિતિના સૂત્ર $\sin 2x=2\sin x\cos x$ ને યાદ કરીએ.

આથી, $$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(2\sin x\cos x)$$

$$=2\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$$

$$=2\left[(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'\right]$$

$$=2\left[(\cos x)\cos x+\sin x(-\sin x)\right]$$

$$=2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$

(ii) વ્યાખ્યા મુજબ, $g(x)=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. આપણે આ વિધેય પર, જ્યાં પણ વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યાં, ભાગાકારનો નિયમ

વાપરીએ. $\frac{dg}{dx}=\frac{d}{dx}(cot\,x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{cos\,x}{sin\,x}\right)$

$$=\frac{(cos\,x)'(sin\,x)-(cos\,x)(sin\,x)'}{(sin\,x)^2}$$

$$=\frac{(-sin\,x)(sin\,x)-(cos\,x)(cos\,x)}{(sin\,x)^2}$$

$$=-\frac{sin^2x+cos^2x}{sin^2x}=-cosec^2x$$

બીજી રીતે, આની ગણતરી $cot\,x=\frac{1}{tan\,x}$ લઈને પણ કરી શકાય. અહીં, આપણે એ માનીશું કે, $tan\,x$ નો વિકલિત sec^2x થાય. તે આપણે ઉદાહરણ 20 માં જોયું અને અચળ વિધેયનો વિકલત 0 થાય.

આથી, $\frac{dg}{dx}=\frac{d}{dx}(cot\,x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{tan\,x}\right)$

$$=\frac{(1)'(tan\,x)-(1)(tan\,x)'}{(tan\,x)^2}$$

$$=\frac{(0)(tan\,x)-(sec\,x)^2}{(tan\,x)^2}$$

$$=\frac{-sec^2x}{tan^2x}=-cosec^2x$$

ઉદાહરણ 25 : વિકલિત શોધો :

(i) $\frac{x^5-cos\,x}{sin\,x}$ (ii) $\frac{x+cos\,x}{tan\,x}$

ઉકેલ : (i) ધારો કે જ્યાં પણ વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યાં, $h(x)=\frac{x^5-cos\,x}{sin\,x}$ પર આપણે આ વિધેયના વિકલિત માટે ભાગાકારનો નિયમ વાપરીએ.

$$h'(x)=\frac{(x^5-cos\,x)'\,sin\,x-(x^5-cos\,x)(sin\,x)'}{(sin\,x)^2}$$

$$=\frac{(5x^4+sin\,x)\,sin\,x-(x^5-cos\,x)\,cos\,x}{sin^2x}$$

$$=\frac{-x^5cos\,x+5x^4sin\,x+1}{(sin\,x)^2}$$

(ii) વિધેય જ્યાં પણ વ્યાખ્યાયિત હોય ત્યાં, $h(x)=\frac{x+cos\,x}{tan\,x}$ પર આપણે ભાગાકારનો નિયમ વાપરીએ.

આથી, $h'(x)=\frac{(x+cos\,x)'\,tan\,x-(x+cos\,x)(tan\,x)'}{(tan\,x)^2}$

$$=\frac{(1-sin\,x)\,tan\,x-(x+cos\,x)\,sec^2x}{(tan\,x)^2}$$

પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય 13

1. વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેના વિકલિત મેળવો :

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x+1)$ (iv) $\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$

નીચેનાં વિધેયોના વિકલિત મેળવો :

(એ માની લો કે a, b, c, d, p, q, r અને s નિશ્ચિત શૂન્યેતર અચળ અને m તથા n પૂર્ણાંક છે.)

2. $(x+a)$

3. $(px+q)\left(\frac{r}{x}+s\right)$

4. $(ax+b)(cx+d)^2$

5. $\frac{ax+b}{cx+d}$

6. $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

7. $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

8. $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$

9. $\frac{px^2+qx+r}{ax+b}$

10. $\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\cos x$

11. $4\sqrt{x}-2$

12. $(ax+b)^n$

13. $(ax+b)^n(cx+d)^m$

14. $\sin(x+a)$

15. $\operatorname{cosec} x \cot x$

16. $\frac{\cos x}{1+\sin x}$

17. $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

18. $\frac{\sec x-1}{\sec x+1}$

19. $\sin^n x$

20. $\frac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$

21. $\frac{\sin(x+a)}{\cos x}$

22. $x^4(5\sin x-3\cos x)$

23. $(x^2+1)\cos x$

24. $(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

25. $(x+\cos x)(x-\tan x)$

26. $\frac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$

27. $\frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

28. $\frac{x}{1+\tan x}$

29. $(x+\sec x)(x-\tan x)$

30. $\frac{x}{\sin^n x}$

સારાંશ

- આપેલ બિંદુની ડાબી બાજુનાં બિંદુઓ દ્વારા મળતા વિધેયના અપેક્ષિત મૂલ્યને ડાબી બાજુનું લક્ષ કહેવાય. આ જ રીતે જમણી બાજુનું લક્ષ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય.
- જો ડાબી તથા જમણી બાજુના લક્ષનાં મૂલ્યો સમાન હોય, તો તે મૂલ્ય આ બિંદુ આગળ વિધેયનું લક્ષ કહેવાય.
- વિધેય f અને વાસ્તવિક સંખ્યા a માટે $\lim_{x\to a} f(x)$ અને $f(a)$ સમાન ના પણ હોય. (અલબત, એક વ્યાખ્યાયિત હોય અને એક ના પણ હોય.)

◆ વિધેયો f અને g માટે નીચેનાં વિધાન સત્ય છે:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

◆ નીચે કેટલાંક પ્રમાણિત લક્ષ આપેલ છે:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=0$$

◆ વિધેય f નું a આગળનું વિકલિત

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

◆ વિધેય f નું કોઈ બિંદુ x આગળનું વિકલિત

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

◆ વિધેયો u અને v માટે

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$. શરત માત્ર એટલી કે તમામ વિકલિત વ્યાખ્યાયિત હોય.

◆ નીચે કેટલાંક પ્રમાણિત વિકલન આપેલ છે:

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(sin\ x)=cos\ x$$

$$\frac{d}{dx}(cos\ x)=-\ sin\ x$$

Historical Note

In the history of mathematics two names are prominent to share the credit for inventing calculus, Issac Newton (1642 – 1727) and G.W. Leibnitz (1646 – 1717). Both of them independently invented calculus around the seventeenth century. After the advent of calculus many mathematicians contributed for further development of calculus. The rigorous concept is mainly attributed to the great mathematicians, A.L. Cauchy, J.L.Lagrange and Karl Weierstrass. Cauchy gave the foundation of calculus as we have now generally accepted in our textbooks. Cauchy used D' Alembert's limit concept to define the derivative of a function. Starting with definition of a limit, Cauchy gave examples such as the limit of

$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ for $\alpha = 0$. He wrote $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$, and called the limit for $i \to 0$, the "function derive'e, y' for $f'(x)$".

Before 1900, it was thought that calculus is quite difficult to teach. So calculus became beyond the reach of youngsters. But just in 1900, John Perry and others in England started propagating the view that essential ideas and methods of calculus were simple and could be taught even in schools. F.L. Griffin, pioneered the teaching of calculus to first year students. This was regarded as one of the most daring act in those days.

Today not only the mathematics but many other subjects such as Physics, Chemistry, Economics and Biological Sciences are enjoying the fruits of calculus.