7

CHAPTER

दृढ़ पिंण्ड गतिकी (DYNAMICS OF RIGID BODY)

7.1 प्रस्तावना (Introduction)

इस अध्याय में हम कणों के निकाय की द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति, गति का अध्ययन करेंगे। साथ ही विभिन्न नियमित ज्यामितीय आकृति के पिण्डों जैसे वलय, चकती, बेलन, गोला आदि से संबंधित जड़त्व आघूर्णों तथा इनकी गति का अध्ययन करेंगे।

7.2 दृढ़ पिण्ड (Rigid Body)

वह पिण्ड या कणों का निकाय जिस पर बाहरी साधारण बल या बल आघूर्ण लगाने पर कणों के मध्य दूरी अपरिवर्तित रहती है, आदर्श दृढ़ पिण्ड कहलाता है।

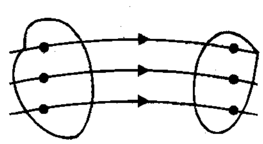
(a) प्रकृति में कोई भी पिण्ड पूर्ण रूप से दृढ़ पिण्ड नहीं है क्योंकि सभी व्यावहारिक पिण्ड बलों के प्रभाव से विकृत हो जाते हैं फिर भी जिन ठोसों पर बाहरी बल लगाने पर उनमें विकृतीय परिवर्तन बहुत कम होता है, उसे दृढ़ पिण्ड कहा जा सकता है।
जैसे-पृथ्वी, बिलियर्ड की गेंद, लोहे का टुकड़ा, स्टील की छड़ आदि।

(b) बोलचाल की भाषा में दृढ़ पिण्ड को केवल पिण्ड या वस्तु कहते हैं।

(c) किसी ठोस वस्तु का दृढ़ पिण्ड होना आवश्यक नहीं है।

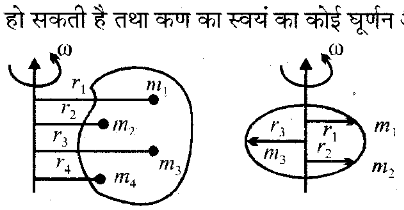
दृढ़ पिण्ड गति दो प्रकार की होती है-

1. **शुद्ध स्थानान्तरीय गति (Translatory motion)**– जब कोई पिण्ड इस प्रकार गति करता है कि उसका प्रत्येक कण निश्चित समय में समान दूरी तथा समान दिशा में विस्थापित होता है तो पिण्ड की गति शुद्ध स्थानान्तरीय गति कहलाती है। शुद्ध स्थानान्तरीय गति में किसी क्षण विशेष पर पिण्ड का प्रत्येक कण समान वेग से चलता है अर्थात् प्रत्येक कण एक दूसरे के समान्तर सरल रैखिक मार्ग में गति करता है।
जैसे-नत तल पर फिसलने वाले गुटके की गति।



चित्र 7.1

2. **घूर्णन गति (Rotational motion)**– ऐसी गति जिसमें कोई दृढ़ पिण्ड किसी स्थिर अक्ष के परित: घूर्णन करता है, घूर्णन गति कहलाती है।
जैसे-छत के पंखे की गति, कुम्हार के चाक की गति।
घूर्णन अक्ष (Rotational axis)– वह अक्ष जिसके परित: पिण्ड घूर्णन करता है, घूर्णन अक्ष कहलाती है। घूर्णन अक्ष पिण्ड के बाहर या अन्दर कहीं भी हो सकती है तथा कण का स्वयं का कोई घूर्णन अक्ष नहीं होता है।



चित्र 7.2

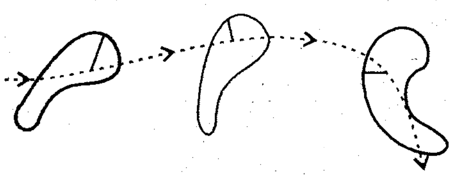
घूर्णन गति की विशेषताएँ-

1. घूर्णन गति में पिण्ड के सभी कण अपने-अपने वृत्ताकार पथों में एक तल पर गति करते हैं जिनके केन्द्र तल के लम्बवत् घूर्णन अक्ष पर स्थित होते हैं।
2. घूर्णन अक्ष पर स्थित सभी कण विरामावस्था में होते हैं।
3. जो कण घूर्णन अक्ष के पास होते हैं वे कम त्रिज्या के वृत्तीय पथ में तथा जो कण घूर्णन अक्ष से दूर होते हैं वे अधिक त्रिज्या के वृत्तीय पथ में गति करते हैं।
4. घूर्णन गति द्विविमीय गति है।
5. घूर्णन गति में सभी कण अपना वृत्तीय पथ समान समय में पूरा करते हैं।
6. घूर्णन गति में विभिन्न कण निश्चित समय अन्तराल में भिन्न-भिन्न रेखीय दूरी तय करते हैं परन्तु प्रत्येक कण का कोणीय विस्थापन समान रहता है।
7. घूर्णन गति में पिण्ड के सभी कणों का कोणीय वेग समान परन्तु रेखीय वेग अलग-अलग होता है।
8. घूर्णन गति में कणों का रेखीय वेग घूर्णन अक्ष से दूरी पर निर्भर करता है। ($v \propto r$) जो कण घूर्णन अक्ष के पास होगा उसका रेखीय वेग कम, जो कण दूर स्थित होगा उसका रेखीय वेग अधिक होगा।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. **कण**–किसी वस्तु का आकार उसके गति के आयाम के सापेक्ष नगण्य हो तो उसे कण कहते हैं।
कण का व्यावहारिक दृष्टि से कोई आकार नहीं होता है।
जैसे-गति करती हुई फुटबाल।
2. कण सिर्फ स्थानान्तरीय गति कर सकता है या फिर बाहर किसी अक्ष के सापेक्ष घूर्णन गति कर सकता है कण का स्वयं का घूर्णन अक्ष नहीं होता है।
3. यदि एक दृढ़ पिण्ड (बेलन) किसी नत तल पर बिना फिसले लुढ़कता है तो इसमें स्थानान्तरीय गति तो होती है परन्तु सभी कण क्षण विशेष पर समान वेग से गति नहीं करते हैं अर्थात् पिण्ड शुद्ध स्थानान्तरीय गति नहीं करता। इसके साथ-साथ पिण्ड घूर्णन गति भी करता है स्थानान्तरीय गति व घूर्णन गति के संयोजन को व्यापक गति या लोटनी गति कहते हैं।
4. एक ऐसा दृढ़ पिण्ड जो न तो किसी चूल (धुरी) पर टिका हो और न ही किसी रूप में स्थिर हों वह दो प्रकार की गति कर सकता है। शुद्ध स्थानान्तरीय गति (फिसलन) अथवा स्थानान्तरीय एवं घूर्णन गति का संयोजन (लुढ़कन) अर्थात् पिण्ड फिसल सकता है या लुढ़क सकता है।
5. एक ऐसा पिण्ड जो किसी चूल पर टिका हो या किसी न किसी रूप में स्थिर हो केवल घूर्णन गति कर सकता है।
6. जब किसी दृढ़ पिण्ड के घूर्णन अक्ष की स्थिति में परिवर्तन हो परन्तु स्थानान्तरण गति नहीं हो तो इस प्रकार की गति को पुरस्सरण गति (Precession motion) कहते हैं। उदाहरण - लट्टू की गति।

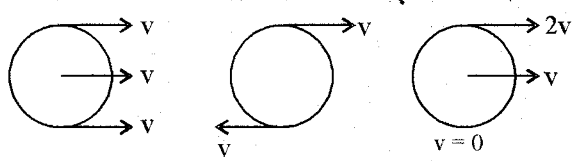
उदा. 1. चित्र में एक पिण्ड की गति को दर्शाया गया है, यह किस प्रकार की गति का उदाहरण है?



चित्र 7.3

हलः चित्र में दिए गए पिण्ड की गति स्थानान्तरीय तथा घूर्णन गति का संयोजन है। बिन्दुकित पथ स्थानान्तरीय गति के पथ को व्यक्त करता है जबकि गहरा पथ घूर्णन गति को व्यक्त करता है।

उदा. 2. चित्र में एक पहिए की तीन स्थितियों में गति दर्शायी गई है। प्रत्येक स्थिति में गति का प्रकार लिखिए।



चित्र 7.4

हल: (i) यह पहिए की स्थानान्तरीय गति को दर्शाता है।

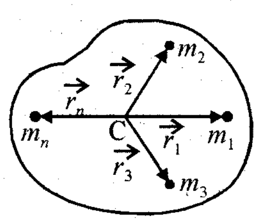
(ii) यह पहिए की घूर्णन गति को दर्शाता है।

(iii) यह पहिए की घूर्णन करते हुए स्थानान्तरीय गति को व्यक्त करता है। अतः यह पहिए की लोटनी गति (Rolling motion) को दर्शाता है।

7.3 द्रव्यमान केन्द्र (Centre of Mass)

(i) किसी पिण्ड अथवा कणों के निकाय में वह बिन्दु जिस पर सम्पूर्ण पिण्ड या निकाय का द्रव्यमान केन्द्रित माना जा सकता है। पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र (C.M.) कहलाता है।

(ii) किसी पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र वह बिन्दु होता है जिसके परितः पिण्ड के सभी कणों के द्रव्यमान आघूर्णो का सदिश योग शून्य होता है। माना किसी पिण्ड के $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_n$ द्रव्यमान के कणों के एक बिन्दु C के सापेक्ष स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \ldots\ldots, \vec{r}_n$ है तो C द्रव्यमान केन्द्र होगा यदि



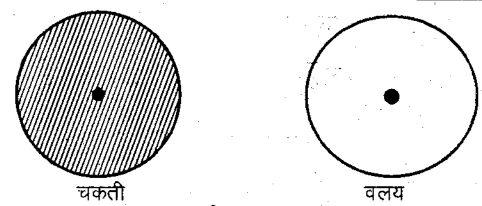
चित्र 7.5

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots\ldots + m_n\vec{r}_n = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i = 0 \qquad \ldots(2)$$

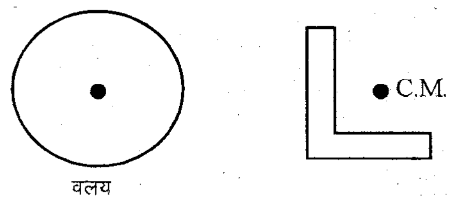
द्रव्यमान केन्द्र से सम्बन्धित महत्त्पूर्ण तथ्य–

(i) द्रव्यमान केन्द्र पर भौतिक रूप से द्रव्यमान उपस्थित हो भी सकता है, नहीं भी हो सकता। जैसे–चकती और वलय



चित्र 7.6

(ii) द्रव्यमान केन्द्र वस्तु के अन्दर या बाहर कहीं भी हो सकता है।



चित्र 7.7

(iii) द्रव्यमान केन्द्र (C.M.) का सम्बन्ध द्रव्यमान से हैं जबकि गुरुत्व केन्द्र (C.G.) का सम्बन्ध वस्तु के भार से होता है।

(iv) सामान्य आकार की वस्तुओं के लिए गुरुत्व केन्द्र तथा द्रव्यमान केन्द्र एक ही बिन्दु पर होते हैं।

(v) नियमित आकार की वस्तुयें जिनका द्रव्यमान वितरण एक समान हो, का द्रव्यमान–केन्द्र वस्तु के ज्यामितीय केन्द्र या सममित केन्द्र पर होता है।

(vi) दी गई आकृति की वस्तु के लिये द्रव्यमान–केन्द्र की स्थिति द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करती है तथा अधिक द्रव्यमान वाले भाग की ओर होती है।

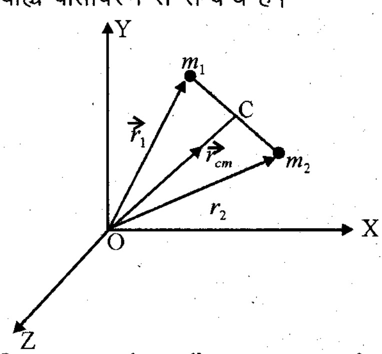
(vii) द्रव्यमान–केद्र की गति हमेशा स्थानान्तरीय होती है।

(viii) द्रव्यमान–केन्द्र की स्थिति अथवा वेग आतंरिक बलों के कारण परिवर्तित नहीं होता है। यह केवल बाह्य बलों द्वारा ही संभव है।

(ix) द्रव्यमान–केन्द्र की स्थिति निर्देश तंत्र की स्थिति पर निर्भर नहीं करती। उदाहरण के लिये वलय का द्रव्यमान–केन्द्र उसके ज्यामितीय केन्द्र पर ही होगा चाहे निर्देश तंत्र कहीं भी स्थित हो।

7.4 दो कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र (Centre of Mass of a Two Particle System)

माना दो कण है जिनके द्रव्यमान क्रमशः m_1 तथा m_2 है तथा निर्देश बिन्दु O से स्थिति सदिश $\vec{r}_1$ व $\vec{r}_2$ एवं इन कणों का आपस में तथा बाह्य वातावरण से सम्बन्ध है।



चित्र 7.8 : दो कणों का द्रव्यमान केन्द्र

माना कि प्रथम कण पर द्वितीय कण द्वारा लगने वाला आन्तरिक बल $\vec{F_1'}$ तथा बाह्य बल $\vec{F_1''}$ कार्यरत है तो कण m_1 पर लगने वाला परिणामी बल

$$\vec{F_1} = \vec{F_1'} + \vec{F_1''}$$

न्यूटन के द्वितीय नियम से कण पर लगने वाला बल उसके संवेग में परिवर्तन की दर के बराबर होता है।

$$\frac{d\vec{p_1}}{dt} = \vec{F_1}$$

इसी प्रकार द्वितीय कण के संवेग में परिवर्तन की दर–

$$\frac{d\vec{p_2}}{dt} = \vec{F_2}$$

अतः दोनों कणों के लिए

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} \quad ...(1)$$

या

$$\vec{F_1'} + \vec{F_1''} + \vec{F_2'} + \vec{F_2''} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} \quad ...(2)$$

परन्तु न्यूटन के तृतीय नियम से दोनों कणों के मध्य आन्तरिक बल बराबर तथा विपरीत दिशा में कार्य करेंगे। अतः दोनों आन्तरिक बल एक–दूसरे को नष्ट कर देंगे।

$$\vec{F_1'} + \vec{F_2'} = 0 \quad ...(3)$$

$$\vec{F_1''} + \vec{F_2''} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p_1} + \vec{p_2}\right)$$

यदि $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ क्रमशः दोनों कणों के वेग हो तो–

$\vec{p_1} = m_1\vec{v_1}$ तथा $\vec{p_2} = m_2\vec{v_2}$

माना $\vec{F_1''} + \vec{F_2''} = F$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}\right)$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m_1\frac{d\vec{r_1}}{dt} + m_2\frac{d\vec{r_2}}{dt}\right)$$

$$\vec{F} = \frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}\right)$$

अंश तथा हर को $(m_1 + m_2)$ से गुणा करने पर–

$$\vec{F} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}\right)(m_1 + m_2)$$

$$= (m_1 + m_2)\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_{CM})$$

यहाँ $\vec{r}_{CM} = \left(\frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}\right)$

यदि $m_1 + m_2 = M$ (निकाय का कुल द्रव्यमान) है तो

$$\vec{F} = M\frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2}$$

$$\vec{F} = M\vec{a}$$

अतः द्विकण निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश–

$$\vec{r}_{CM} = \left(\frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}\right) \quad ...(5)$$

यदि दोनों कणों का द्रव्यमान समान है तो $m_1 = m_2 = m$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r_1} + \vec{r_2}}{2}$$

अर्थात् समान द्रव्यमान वाले कणों का द्रव्यमान केन्द्र उनके मध्य में स्थित होता है।

यदि द्रव्यमान केन्द्र मूल बिन्दु पर स्थित हो तो

$$\vec{r}_{CM} = 0$$

∴ समी. (5) से

अतः $$m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} = 0 \quad ...(6)$$

अतः दोनों कणों के द्रव्यमान आघूर्णो का सदिश योग शून्य होता है।

समी. (6) से

$$m_1\vec{r_1} = -m_2\vec{r_2}$$

$$\left|m_1\vec{r_1}\right| = \left|-m_2\vec{r_2}\right|$$

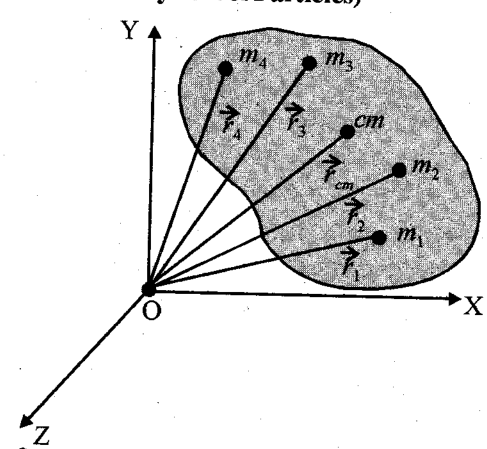
$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

$r_1 \propto \frac{1}{m_1}$ तथा $r_1 \propto \frac{1}{m_2}$

द्रव्यमान केन्द्र के अन्य निष्कर्ष–

- द्रव्यमान केन्द्र का वेग $\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v_i}}{M}$
- द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण $\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a_i}}{M}$

***n* कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र**
(Centre of Mass of a System of Particles)



माना कोई बहुकणीय निकाय या पिण्ड n कणों से मिलकर बना है। जिसके कणों के द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_n$ तथा उनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}, \ldots\ldots, \vec{r_n}$ है।

n कणों के लिए प्रत्येक कण पर बाह्य बल तथा कणों के मध्य अन्योय क्रिया के कारण बल लगते हैं। माना कि विभिन्न कणों पर कार्य करने वाले बाह्य बल क्रमशः $\vec{F_1'}, \vec{F_2'}, \vec{F_3'}, \ldots\ldots, \vec{F_n'}$ तथा आन्तरिक बल क्रमशः $\vec{F_1''}, \vec{F_2''}, \vec{F_3''}, \ldots\ldots, \vec{F_n''}$ है तो परिणामी बल क्रमशः $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots\ldots, \vec{F_n}$ हो तो कण तंत्र पर परिणामी बल $\vec{F}$ होगा–

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots\ldots + \vec{F_n}$$

$$\vec{F} = \left(\vec{F_1'} + \vec{F_2'} + \vec{F_3'} + \ldots + \vec{F_n'}\right) + \left(\vec{F_1''} + \vec{F_2''} + \vec{F_3''} + \ldots + \vec{F_n''}\right) \quad \ldots(1)$$

दो कणों में आपस में आन्तरिक बल एक दूसरे के बराबर तथा विपरीत दिशा में होते हैं। अतः परिणामी आन्तरिक बल का मान शून्य होगा अर्थात्

$$\vec{F_1''} + \vec{F_2''} + \vec{F_3''} + \ldots\ldots + \vec{F_n''} = 0$$

अतः समी.(1) से

$$\vec{F} = \vec{F_1'} + \vec{F_2'} + \vec{F_3'} + \ldots + \vec{F_n'} \quad \ldots(2)$$

न्यूटन के द्वितीय नियम से

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3} + \ldots + \vec{p_n}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} + m_3 \vec{v_3} + \ldots + m_n \vec{v_n}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m_1 \frac{d\vec{r_1}}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r_2}}{dt} + m_3 \frac{d\vec{r_3}}{dt} + \ldots + m_n \frac{d\vec{r_n}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2}{dt^2}\left(m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + m_3 \vec{r_3} + \ldots + m_n \vec{r_n}\right)$$

$(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n)$ से दांये पक्ष को गुणा करने तथा भाग देने पर

$$= (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n) \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + m_3 \vec{r_3} + \ldots + m_n \vec{r_n}}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}\right)$$

यदि कणों के समूह का कुल द्रव्यमान M हो तो

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n = M$$

$$\vec{F} = M \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{CM} \quad \ldots(3)$$

यहाँ
$$\vec{r}_{CM} = \left(\frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + m_3 \vec{r_3} + \ldots + m_n \vec{r_n}}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}\right) \quad \ldots(4)$$

n कणों के समूह के द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश है

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad \ldots(5)$$

यदि सभी कणों के द्रव्यमान समान हो तो

$$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = m_n = m$$

∴ समी. (4) से

$$\vec{r}_{CM} = \left(\frac{m\vec{r_1} + m\vec{r_2} + m\vec{r_3} + \ldots + m\vec{r_n}}{mn}\right)$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r_1} + \vec{r_2} + \vec{r_3} + \ldots + \vec{r_n}}{n} \quad \ldots(6)$$

अर्थात् समान द्रव्यमान वाले कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र का स्थिति सदिश सभी कणों के स्थिति सदिशों के माध्य के बराबर होता है। यदि द्रव्यमान केन्द्र मूल बिन्दु पर स्थित हो तो

$$\vec{r}_{CM} = 0$$

∴ समी. (4) से

$$m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2} + m_3 \vec{r_3} + \ldots + m_n \vec{r_n} = 0 \quad \ldots(7)$$

अर्थात् द्रव्यमान केन्द्र के परितः निकाय के सभी कणों के द्रव्यमान आघूर्णों का सदिश योग शून्य होता है।

द्रव्यमान केन्द्र के कार्तीय निर्देशांक–

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} \quad \ldots(8.1)$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} \quad \ldots(8.2)$$

$$z_{CM} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \ldots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} \quad \ldots(8.3)$$

यदि निकाय में अनन्त संख्या में बिन्दुवत् द्रव्यमान कण सतत् रूप से वितरित हो तो उपरोक्त समीकरणों में चिन्ह Σ को समाकलन ($\int$) से प्रतिस्थापित किया जा सकता है।

यदि निकाय के किसी अल्पांश का द्रव्यमान dm हो तथा उसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है तो

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \quad \ldots(9)$$

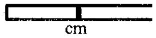
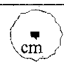
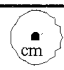
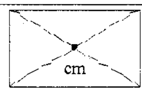
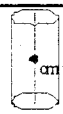
कार्तीय निर्देशांकों का मान निम्न होगा–

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad \ldots(10.1)$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad \ldots(10.2)$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\,dm \quad \ldots(10.3)$$

नियमित ज्यामितीय आकृति के समांगी (homogeneous) पिण्डों का द्रव्यमान केन्द्र वह बिन्दु होता है जिसके चारों ओर पिण्ड सममित (symmetrical) होता है, जैसे–घन, चकती, वलय, गोला आदि का द्रव्यमान केन्द्र उनका केन्द्र बिन्दु होता है।

क्र.सं.	सममित वस्तु	चित्र 6.9	द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति
1.	एकसमान पतली छड़		छड़ का मध्य बिन्दु
2.	वृत्तीय वलय		वलय का केन्द्र
3.	वृत्ताकार चकती		चकती का केन्द्र
4.	गोला (खोखला या ठोस)		गोले का केन्द्र
5.	आयताकार समतल पटल		विकर्णों का कटान बिन्दु
6.	बेलन		बेलन की अक्ष का मध्य बिन्दु

7.5 नियमित दृढ़ पिण्डों के द्रव्यमान केन्द्र की गति एवं संवेग का संरक्षण (Motion of Centre of Mass for Regular Rigid Bodies and Conservation of Momentum)

द्रव्यमान केन्द्र की गति (Motion of Centre of Mass)

माना कि कोई निकाय n कणों से मिलकर बना है जिसके कणों के द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ तथा उनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ..., \vec{r}_n$ है तब इस निकाय का द्रव्यमान केन्द्र निम्न प्रकार व्यक्त किया जायेगा–

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + ...+ m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ...+ m_n}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + ...+ m_n\vec{r}_n}{M}$$

$$\Rightarrow \quad M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + ...+ m_n\vec{r}_n$$

समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + m_3\frac{d\vec{r}_3}{dt} + ...+ m_n\frac{d\vec{r}_n}{dt}$$

$$\because \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\therefore M\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + ...+ m_n\vec{v}_n \quad ..(1)$$

यहाँ $\vec{v}_{CM}$ द्रव्यमान केन्द्र का वेग तथा $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ..., \vec{v}_n$ क्रमशः कणों के वेग है।

$$M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} + m_3\frac{d\vec{v}_3}{dt} + ...+ m_n\frac{d\vec{v}_n}{dt}$$

$$\because \quad \text{त्वरण } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + ...+ m_n\vec{a}_n \quad ...(2)$$

न्यूटन के द्वितीय नियम से

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\therefore \quad M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...+ \vec{F}_n \quad .....(3)$$

जहाँ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...+ \vec{F}_n$ क्रमशः $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ कणों पर बाह्य बल है।

समी. (3) से

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{\text{बाह्य}} \quad ....(4)$$

समी. (4) से स्पष्ट है कि द्रव्यमान केन्द्र इस प्रकार गति करता है जैसे कि निकाय का सम्पूर्ण द्रव्यमान, द्रव्यमान केन्द्र पर स्थित है तथा समस्त बाह्य बल इस बिन्दु पर कार्यरत होते हैं।

कणों के निकाय का रेखीय संवेग (Linear momentum of a System of particles)

माना कि एक निकाय n कणों से मिलकर बना है, जिसके कणों का द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ तथा वेग क्रमशः $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ है।

∴ निकाय का संवेग

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + ...+ m_n\vec{v}_n$$

$$\therefore \quad \vec{p} = M\vec{v}_{CM} \quad ....(1)$$

अतः निकाय का कुल रेखीय संवेग निकाय के कुल द्रव्यमान तथा इसके द्रव्यमान केन्द्र के वेग के गुणनफल के तुल्य होता है।

समी. (1) का समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} \quad ....(2)$$

जहाँ $\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$ = निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण

$$\therefore \quad \vec{F}_{\text{बाह्य}} = M\vec{a}_{CM}$$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{बाह्य}} \quad ...(3)$$

यदि $\vec{F}_{\text{बाह्य}} = 0$ हो तब

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = \text{नियतांक}$$

अर्थात् जब किसी निकाय पर आरोपित बाह्य बलों का योग शून्य होता है तब उस निकाय का कुल रेखीय संवेग नियत (संरक्षित) रहता है। यह किसी निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का रेखीय संवेग संरक्षण नियम कहलाता है।

$$\therefore \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \text{ होने पर}$$

$$\frac{d}{dt}(M\vec{v}_{CM}) = 0 \qquad \because M \neq 0$$

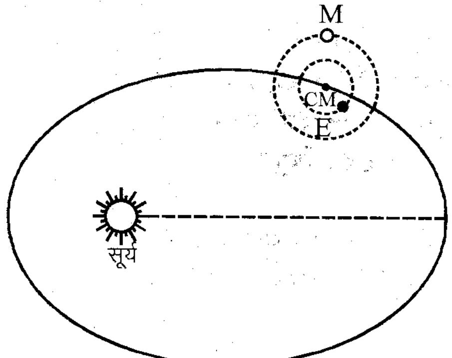
$$\therefore \quad \vec{v}_{CM} = \text{नियतांक}$$

अर्थात् किसी निकाय पर आरोपित बाह्य बलों का योग शून्य होता है तब उस निकाय का वेग नियत रहता है। इस प्रकार किसी निकाय का आन्तरिक बलों के कारण स्वतः त्वरित होना संभव नहीं है।

द्रव्यमान केन्द्र की गति के उदाहरण

(Examples of Centre of Mass Motion)

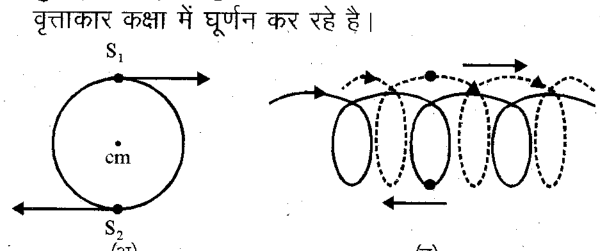
1. **पृथ्वी-चन्द्रमा निकाय (Earth-Moon system)**—पृथ्वी (E), सूर्य के चारों ओर दीर्घ वृत्ताकार कक्षा में घूमती है जबकि चन्द्रमा (M), पृथ्वी के चारों ओर वृत्ताकार कक्षा में घूमता है। पृथ्वी तथा चन्द्रमा अपने उभयनिष्ठ द्रव्यमान केन्द्र (CM) के सापेक्ष वृत्ताकार कक्षा में इस प्रकार घूर्णन करते हैं ताकि वे सदैव इसकी विपरीत दिशा में रहते है। पृथ्वी का चन्द्रमा की तुलना में बहुत भारी होने से द्रव्यमान केन्द्र पृथ्वी के बहुत समीप होता है तथा इसी कारण निकाय का द्रव्यमान केन्द्र सूर्य के चारों ओर दीर्घवृत्ताकार कक्षा में घूर्णन करता है।



चित्र 7.10

यहाँ पृथ्वी तथा चन्द्रमा के मध्य कार्यरत अन्योन्य गुरुत्वाकर्षण बल आन्तरिक बल है जबकि सूर्य द्वारा पृथ्वी व चन्द्रमा पर कार्यरत गुरुत्वाकर्षण बल बाह्य बल है।

2. **युग्म तारे (Binary Stars)**—दो तारे जो परस्पर गुरुत्वीय बल से बद्ध (bound) हो तथा उभयनिष्ठ द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष घूर्णन करते हों, युग्म तारे कहलाते है। चित्र में दो समान द्रव्यमान के युग्म तारे S_1 व S_2 स्थिर उभयनिष्ठ द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष वृत्ताकार कक्षा में घूर्णन कर रहे है।



चित्र 7.11

जब निकाय पर बाह्य बल अनुपस्थित होता है तब युग्म तारे का द्रव्यमान केन्द्र एक मुक्त कण की तरह गतिशील होता है। दोनों तारों का गमन पथ थोड़ा जटिल होता है। यह गमन पथ दो गतियों के संयोजन से निर्मित होता है–

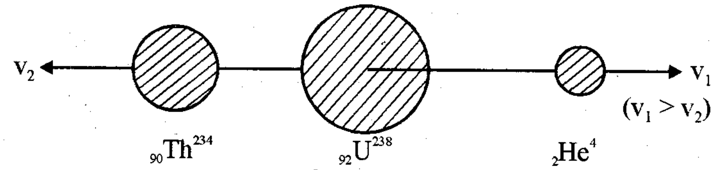
(i) द्रव्यमान केन्द्र की सरल रेखा में एक समान गति

(ii) द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष दोनों तारों की वृत्ताकार कक्षाएँ

यद्यपि दोनों तारे द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष विपरीत दिशा में रहते हैं।

3. **रेडियोएक्टिव क्षय (Radioactive decay):-** यह घटना निकाय के आन्तरिक बलों के कारण होती है। इस स्थिति में निकाय का प्रारंभिक तथा अन्तिम संवेग शून्य होता है अतः विघटित अवयव परस्पर विपरीत दिशाओं में इस प्रकार गति करते हैं, कि द्रव्यमान केन्द्र का वेग सदैव शून्य ही रहता है। भारी द्रव्यमान, हल्के द्रव्यमान की तुलना में कम वेग से गति करता है।

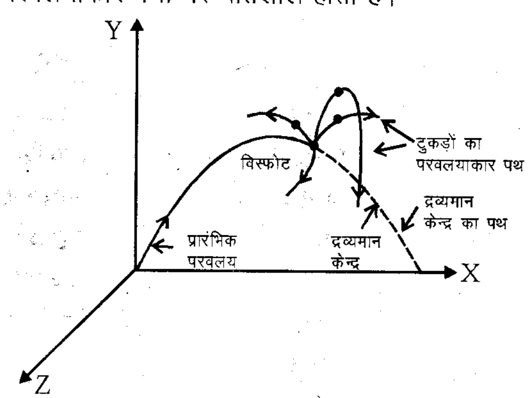
उदाहरण : माना एक रेडियोएक्टिव नाभिक यूरेनियम $\left({}_{92}U^{238}\right)$ प्रारंभ में विरामावस्था में है। यह स्वतः ही दो अवयवों α-कण $\left({}_{2}He^{4}\right)$ तथा थोरियम $\left({}_{90}Th^{234}\right)$ में विभक्त हो जाता है। α-कण (द्रव्यमान 4 amu), थोरियम अवयव (द्रव्यमान 234 amu) की अपेक्षा अधिक वेग से गति करता है।



चित्र 7.12

4. **हवा में विस्फोटित पटाखे के द्रव्यमान केन्द्र की गति (Motion of the cm of fire crackers exploding in air):-**

जब विस्फोट से पूर्व पटाखा एक परवलयाकार पथ पर गतिमान होता है तब विस्फोट के बाद भी प्रत्येक टुकड़ा अपने अलग–अलग परवलयाकार पथों पर गतिशील होता है।



चित्र 7.13

इसका कारण है कि पटाखे में विस्फोट केवल आन्तरिक बलों के कारण होता है। इस स्थिति में पटाखे के टुकड़ों का व्यक्तिगत संवेग तो परिवर्तित हो जाता है परन्तु निकाय का कुल संवेग अपरिवर्तित रहता है। इस प्रकार निकाय का द्रव्यमान केन्द्र अप्रभावित रहता है और विस्फोट के बाद भी वह उसी परवलयाकार पथ का अनुसरण करता है।

उदा.3. एक पिण्ड दो कणों से मिलकर बना है जिनके द्रव्यमान क्रमशः 4 ग्राम व 6 ग्राम है। इन कणों के स्थिति निर्देशांक क्रमशः (1, 4, – 2) तथा (2, 3, 7) सेमी. है। इस कण तंत्र के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात करो।

हल– माना कि द्रव्यमान केन्द्र का निर्देशांक x_{cm}, y_{cm} व z_{cm} है।

∴ निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$m_1 = 4g, m_2 = 6g$
$x_1 = 1 , x_2 = 2$

$$x_{cm} = \frac{4\times1+6\times2}{4+6} = \frac{4+12}{10} = \frac{16}{10} = 1.6 \text{ सेमी.}$$

इसी प्रकार
$y_1 = 4 , y_2 = 3$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1+m_2}$$

$$y_{cm} = \frac{4\times4+6\times3}{4+6} = \frac{16+18}{10} = \frac{34}{10} = 3.4 \text{ सेमी.}$$

$z_1 = -2, z_2 = 7$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1+m_2z_2}{m_1+m_2}$$

$$z_{cm} = \frac{4\times(-2)+6\times7}{4+6} = \frac{-8+42}{10} = 3.4 \text{ सेमी.}$$

अतः पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक (1.6, 3.4, 3.4) सेमी. है।

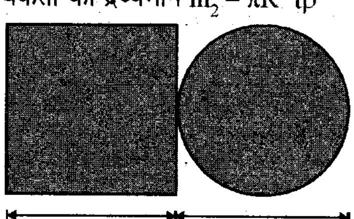
उदा. 4. एक R त्रिज्या की चकती 2R भुजा के वर्ग के सम्पर्क में चित्रानुसार रखी गई है। यदि दोनों वस्तुएँ एक ही पदार्थ से निर्मित हो तथा उनकी मोटाई समान हो तो निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिए। (पुस्तक का उदाहरण 7.1)

हल: माना कि दोनों वस्तुओं के पदार्थ का घनत्व ρ तथा मोटाई t है। तब वर्ग का द्रव्यमान m_1 = क्षेत्रफल × मोटाई × घनत्व

$$m_1 = (2R)^2 \times t \times \rho$$

$$\Rightarrow \quad m_1 = 4R^2 t \rho \quad \text{...(i)}$$

इसी प्रकार चकती का द्रव्यमान $m_2 = \pi R^2 t\rho$ ...(2)



चित्र 7.14

माना कि वर्ग की बांयी भुजा का मध्य बिन्दु मूल बिन्दु पर है तब वर्ग के केन्द्र तथा चकती के केन्द्र की स्थितियाँ क्रमशः R व 3R पर होंगी।

∴ द्रव्यमान केन्द्र की परिभाषा से

$$x_{cm} = \frac{m_1R + m_2\, 3R}{m_1 + m_2}$$

$$x_{cm} = \frac{(4R^2t\rho)\,R + (\pi R^2 t\rho)\,3R}{4R^2\, t\rho + \pi R^2\, t\rho}$$

$$x_{cm} = \frac{4R^3 + 3\pi R^3}{4R^2 + \pi R^2} = \frac{4R + 3\pi R}{4+\pi}$$

$$x_{cm} = \left(\frac{4+3\pi}{4+\pi}\right)R$$

अब यदि वर्ग के केन्द्र को मूल बिन्दु पर माना जाये तब द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

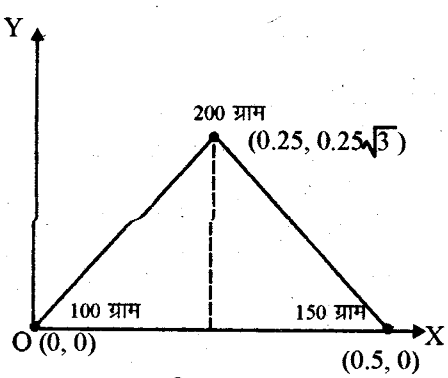
$$x'_{cm} = \frac{m_1\times0 + m_2\times 2R}{m_1+m_2}$$

$$x'_{cm} = \frac{\pi R^2\, t\rho \times 2R}{4R^2 t\rho + \pi R^2 t\rho}$$

$$x'_{cm} = \frac{2\pi R}{4+\pi}$$

उदा.5. एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर रखे गए तीन कणों का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए। कणों के द्रव्यमान क्रमशः 100 g, 150g एवं 200g हैं। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 0.5 *m* है।

हल– माना कि त्रिभुज का एक शीर्ष (O) मूल बिन्दु पर स्थित है तथा एक भुजा X-अक्ष के अनुदिश है। माना द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक x_{CM} तथा y_{CM} है।



चित्र 7.15

∴ निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$$

m_1 = 100 ग्राम, m_2 = 150 ग्राम, m_3 = 200 ग्राम
x_1 = 0 मी., x_2 = 0.5 मी., x_3 = 0.25 मी.

$$\therefore \quad x_{CM} = \frac{100\times0+150\times0.5+200\times0.25}{100+150+200} = \frac{75+50}{450} = \frac{125}{450} = \frac{5}{18} \text{ मी.}$$

इसी प्रकार $y_1 = 0$ मी, $y_2 = 0$ मी., $y_3 = 0.25\sqrt{3}$ मी.

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

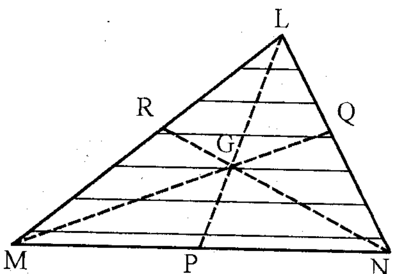
$$= \frac{100\times0+150\times0+200\times0.25\sqrt{3}}{100+150+200}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450} = \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ मी.} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ मी.}$$

उपरोक्त निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक $\left(\frac{5}{18}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ मी. होंगें।

उदा.6. एक त्रिभुजाकार फलक का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए।

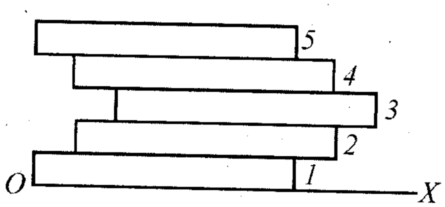
हल– चित्रानुसार फलक (ΔLMN) को आधार MN के समान्तर संकीर्ण पट्टियों में बांटा जा सकता है।



चित्र 7.16

सममिति से प्रत्येक पट्टिका का द्रव्यमान केन्द्र उसका मध्य बिन्दु है। सभी पट्टियों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर माध्यिका LP प्राप्त होती है। इस प्रकार सम्पूर्ण त्रिभुज का द्रव्यमान केन्द्र माध्यिका LP पर कहीं स्थित होगा। इसी प्रकार द्रव्यमान केन्द्र माध्यिका MQ तथा NR पर भी कहीं स्थित होगा। अतः त्रिभुजाकार फलक का द्रव्यमान केन्द्र तीनों माध्यिकाओं का संगामी बिन्दु अर्थात् त्रिभुज का केन्द्रक G है।

उदा.7. चित्र में पाँच समांगी ईंटों को दर्शाया गया है जिसकी प्रत्येक की लम्बाई L है। प्रत्येक ईंट इसके सम्पर्क वाली एक ईंट से $L/5$ विस्थापित है। द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 7.2)



चित्र 7.17

हल: माना कि प्रथम ईंट का बांयी ओर का सिरा मूल बिन्दु पर है तब प्रथम ईंट के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति $\frac{L}{2}$ होगी जबकि द्वितीय ईंट के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति $\frac{L}{2}+\frac{L}{5}$ तथा पाँचवीं ईंट के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति $\frac{L}{2}$ होगी।

इस प्रकार सम्पूर्ण निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4 + m_5x_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}$$

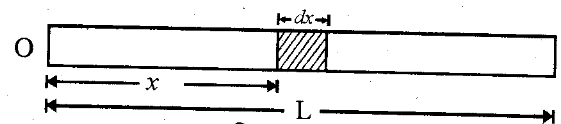
$$\Rightarrow x_{cm} = \frac{m\times\frac{L}{2}+m\times\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{5}\right)+m\times\left(\frac{L}{2}+\frac{2L}{5}\right)+m\times\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{5}\right)+m\times}{m+m+m+m+m}$$

$$\Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{L}{5}+\frac{L}{2}+\frac{2L}{5}+\frac{L}{2}+\frac{L}{5}+\frac{L}{2}}{5}$$

$$\Rightarrow \quad x_{cm} = \frac{5\cdot\frac{L}{2}+\frac{4L}{5}}{5} = \frac{33L}{50}$$

उदा.8. एक पतली छड़ के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिए।

हल– माना कि पतली छड़ का द्रव्यमान M तथा लम्बाई L है। छड़ व X-अक्ष के अनुदिश इस प्रकार रखा गया है कि छड़ का बांयी ओ का सिरा मूल बिन्दु O पर है। O से x दूरी पर dx मोटाई के ए अल्पांश पर विचार करते हैं।



चित्र 7.18

छड़ की एकांक लम्बाई का द्रव्यमान $= \frac{M}{L}$

अल्पांश का द्रव्यमान $dm = \frac{M}{L}.dx$

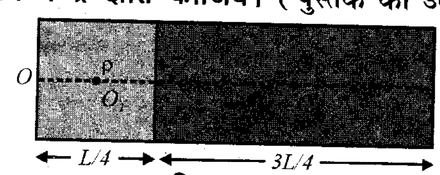
$\because$ द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^L x\,dm$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^L x.\frac{M}{L}.dx = \frac{1}{L}\int_0^L x.dx = \frac{1}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{L}{2}$$

इस प्रकार पतली छड़ का द्रव्यमान केन्द्र छड़ का मध्य बिन्दु होता है।

उदा. 9. चित्र में दर्शाई गई एक आयताकार पट्टी का एक चौथाई भाग ρ घनत्व की एक धातु से बना हुआ है तथा शेष तीन चौथाई भाग 3ρ घनत्व की अन्य धातु से बना हुआ है। यदि छड़ की लम्बाई L हो तो पट्टी का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 7.3)



चित्र 7.19

हल: पट्टी का प्रत्येक भाग सममित है अतः प्रत्येक भाग का द्रव्यमान केन्द्र इसके ज्यामितीय केन्द्र पर स्थित होगा। यदि ρ घनत्व के भाग का

ज्यामितीय केन्द्र O_1 तथा 3ρ घनत्व के भाग का ज्यामितीय केन्द्र O_2 हो तो बांयी ओर के सिरे को मूल बिन्दु पर लेने पर O_1 तथा O_2 की स्थितियाँ क्रमशः $\frac{L}{8}$ तथा $\frac{5L}{8}$ पर होगी।

∵ द्रव्यमान का मान घनत्व के समानुपाती होता है जिससे बांयी ओर से प्रथम भाग का द्रव्यमान Kρ तथा द्वितीय भाग का द्रव्यमान 3Kρ होगा जहाँ K समानुपाती नियतांक है।

∴ आयताकार पट्टी के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

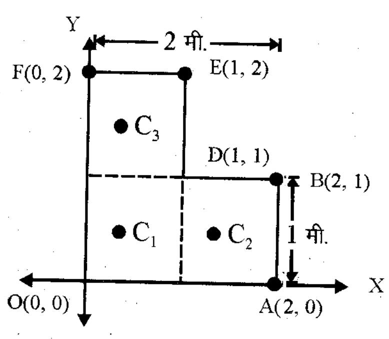
$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_{cm} = \frac{K\rho \cdot \frac{L}{8} + 3K\rho \cdot \frac{5L}{8}}{K\rho + 3K\rho}$$

$$x_{cm} = \frac{\frac{L}{8} + \frac{15L}{8}}{4} = \frac{2L}{4} = \frac{L}{2}$$

अतः आयताकार पट्टी के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति बांयी ओर से $\frac{L}{2}$ स्थिति पर होगी।

उदा.10. एक दिए गए L-आकृति के फलक (एक पतली चपटी प्लेट) का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिए, जिसकी विभिन्न भुजाओं को चित्र में दर्शाया है। फलक का द्रव्यमान 3kg है।



चित्र 7.20

हल– चित्रानुसार L –आकृति को तीन वर्गों से मिलकर बना हुआ माना जा सकता है जिसमें से प्रत्येक वर्ग की भुजा 1 मी. है। फलक समांग होने से प्रत्येक वर्ग का द्रव्यमान 1 किग्रा. है। सममिति से तीनों वर्गों के द्रव्यमान केन्द्र उनके ज्यामितीय केन्द्र C_1, C_2 तथा C_3 हैं। इनके निर्देशांक निम्न प्रकार है–

	C_1	C_2	C_3
x	½	3/2	½
y	½	½	3/2

∴ L–आकृति के फलक के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{1(½) + 1(3/2) + 1(½)}{1+1+1}$$

$$= \frac{5}{6} \text{ मी.}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

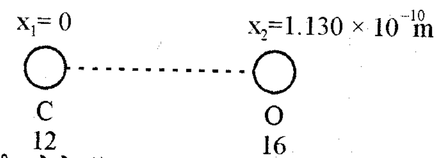
$$= \frac{1(½) + 1(½) + 1(3/2)}{1+1+1}$$

$$= \frac{5}{6} \text{ मी.}$$

इस प्रकार L–आकृति के फलक का द्रव्यमान केन्द्र रेखा OD पर स्थित होता है।

उदा. 11. कार्बन मोनोऑक्साइड अणु में कार्बन एवं ऑक्सीजन परमाणुओं के मध्य की दूरी 1.130×10^{-10} m है। कार्बन के सापेक्ष अणु के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिये।

हलः माना कि कार्बन मोनो ऑक्साइड (CO) अणु X-अक्ष पर स्थित है जबकि कार्बन परमाणु मूल बिन्दु पर स्थित है।



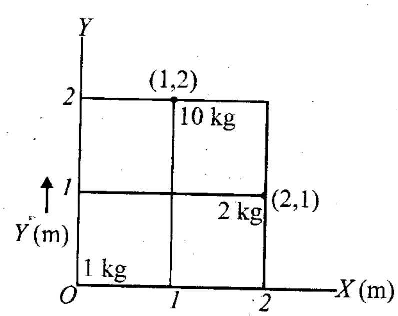
∴ कार्बन मोनोऑक्साइड अणु के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$x_{cm} = \frac{6 \times 0 + 16 \times 1.130 \times 10^{-10}}{12 + 16}$$

$$= 0.6457 \times 10^{-10} \text{ मीटर}$$

उदा.12. चित्र में दर्शाये गये तीन कणों के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति ज्ञात कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 7.5)



चित्र 7.21

हलः चित्र में दिए गए निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_{cm} = \frac{1 \times 0 + 2 \times 2 + 10 \times 1}{1 + 2 + 10}$$

$$x_{cm} = \frac{14}{13} \text{ मीटर}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{cm} = \frac{1\times 0 + 2\times 1 + 10\times 2}{1+2+10}$$

$$y_{cm} = \frac{22}{13} \text{ मीटर}$$

उदा 13. 2, 4 तथा 6g द्रव्यमान वाले कणों का द्रव्यमान केन्द्र (1, 1, 1) बिन्दु पर है। एक 4g द्रव्यमान के चौथे कण की स्थिति क्या होना चाहिए ताकि नये निकाय में द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति (0, 0, 0) बिन्दु पर हो जाए।

हल– हम जानते हैं कि–

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_3\vec{r_3} + m_4\vec{r_4}}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

दिया गया है–

$m_1 = 2g, m_3 = 6g,$

$m_2 = 4g, m_4 = 4g,$

$\vec{r_1} = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}),$ $\vec{r_2} = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$

$\vec{r_3} = (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}),$ $\vec{r_4} = (\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)$

मान रखने पर,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{2(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+4(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+6(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})+4(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)}{16}$$

$$= \frac{\hat{i}(12+4x)+\hat{j}(12+4y)+\hat{k}(12+4z)}{16}$$

दूसरी अवस्था में दिया गया है– $\vec{r}_{CM} = 0$

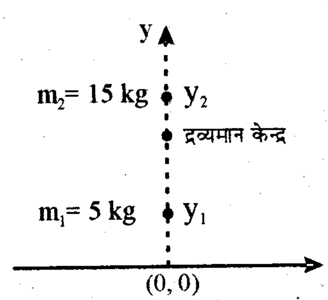
$12+4x=0$ $12+4y=0$ $12+4z=0$

$x=-3$ $y=-3$ $z=-3$

चौथा कण (–3, –3, –3) पर होगा।

उदा. 14. 5 kg व 15 kg के दो द्रव्यमान ऊर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश स्थित है। प्रथम द्रव्यमान को ऊपर की ओर 5 cm दूरी से विस्थापित किया जाता है। द्वितीय द्रव्यमान को कितना विस्थापित किया जाये कि केन्द्र की स्थिति 1 cm ऊपर उठ जाये? (पुस्तक का उदाहरण 7.6)

हल: प्रश्नानुसार द्रव्यमानों की स्थिति Y-अक्ष के अनुदिश लेने पर



चित्र 7.22

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \quad ...(1)$$

अब m_1 द्रव्यमान को 5 सेमी ऊपर की ओर विस्थापित करने पर m_2 की नयी स्थिति y_2 करनी हो जबकि द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति 1 सेमी ऊपर उठ जाये तब

$$y_{cm} + 1 = \frac{m_1(y_1+5) + m_2(y_2+y_2')}{m_1+m_2} \quad ...(2)$$

समी. (2) में से समी. (1) को घटाने पर

$$1 = \frac{5m_1 + m_2y_2'}{m_1+m_2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{5\times 5 + 15\times y_2'}{5+15}$$

$$\Rightarrow \quad 15y_2' = -5$$

$$\Rightarrow \quad y_2' = -\frac{1}{3} \text{ सेमी} = -0.33 \text{ सेमी}$$

इस प्रकार m_2 को ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर 0.33 सेमी विस्थापित करना होगा।

उदा.15. दो पिण्ड जिनके द्रव्यमान क्रमशः 5 kg. तथा 1kg. है। इनके वेग क्रमशः $(\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k})$ मी./से. तथा $(-5\hat{i}+20\hat{j}-2\hat{k})$ मी./से. है। ये द्विकण तंत्र का निर्माण करते हैं। इस कण तंत्र का द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कुल रेखीय संवेग ज्ञात कीजिये।

हल– द्रव्यमान केन्द्र का वेग–

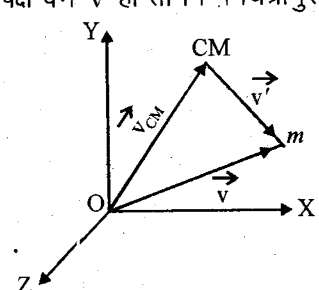
$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{5(\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k}) + 1(-5\hat{i}+20\hat{j}-2\hat{k})}{5+1}$$

$$= \frac{5\hat{i}-25\hat{j}+10\hat{k}-5\hat{i}+20\hat{j}-2\hat{k})}{6}$$

$$= \frac{-5\hat{j}+8\hat{k}}{6} \text{ मी./से.} \quad ...(1)$$

यदि किसी पिण्ड का मूल बिन्दु के सापेक्ष वेग $\vec{v}$ तथा द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष वेग $\vec{v'}$ हो तो निम्न चित्रानुसार



चित्र 7.23

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{v}_{CM}$$

प्रथम पिण्ड के लिए

$$\vec{v_1'} = \vec{v_1} - \vec{v}_{CM}$$

$$= (\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k}) - \left(\frac{-5\hat{j}+8\hat{k}}{6}\right)$$

$$= \frac{6\hat{i} - 30\hat{j} + 12\hat{k} + 5\hat{j} - 8\hat{k}}{6}$$

$$= \frac{6\hat{i} - 25\hat{j} + 4\hat{k}}{6} \text{ मी./से.} \quad ...(2)$$

इसी प्रकार द्वितीय पिण्ड के लिए–

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM}$$

$$= (-5\hat{i} + 20\hat{j} - 2\hat{k}) - \left(\frac{-5\hat{j} + 8\hat{k}}{6}\right)$$

$$= \frac{-30\hat{i} + 120\hat{j} - 12\hat{k} + 5\hat{j} - 8\hat{k}}{6}$$

$$= \frac{-30\hat{i} + 125\hat{j} - 20\hat{k}}{6} \text{ मी./से} \quad ..(3)$$

अतः द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कणों का कुल रेखीय संवेग–

$$\vec{p} = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

$$= 1\left[\frac{6\hat{i} - 25\hat{j} + 4\hat{k}}{6}\right] + 5\left[\frac{-30\hat{i} + 125\hat{j} - 20\hat{k}}{6}\right]$$

$$= \frac{6\hat{i} - 25\hat{j} + 4\hat{k} - 150\hat{i} + 625\hat{j} - 100\hat{k}}{6}$$

$$= \frac{-144\hat{i} - 600\hat{j} - 96\hat{k}}{6}$$

$$= -(24\hat{i} - 100\hat{j} - 16\hat{k}) \text{किग्रा.×मी./से.}$$

उदा. 16. *M* द्रव्यमान का एक पिण्ड चिकनी सतह पर 30 m s^{-1} के वेग से गति करता हुआ अचानक दो समान भागों में टूट जाता है जो उसी दिशा में गति करते हैं। यदि एक भाग 15 m s^{-1} वेग से गति करता है तो दूसरा भाग किस वेग से गति करेगा?(पुस्तक का उदाहरण 7.7)

हल: इस स्थिति में पिण्ड अचानक दो भागों में टूट जाता है अतः रेखीय संवेग संरक्षण नियम से

प्रारंभिक संवेग = अंतिम संवेग

$$\Rightarrow \quad 30M = \frac{M}{2} \times 15 + \frac{M}{2} + v$$

$$\Rightarrow \quad v = 45 \text{ मी/से}$$

उदा. 17. U^{238} की एक नाभिक प्रारम्भ में विराम अवस्था में है तथा अचानक विघटित होकर एल्फा कण को उत्सर्जित करती है जिसका वेग 1.4 × 10^{7} m s^{-1} है। अधिशेष नाभिक Th^{234} का प्रतिक्षेपी वेग का मान ज्ञात कीजिये। यह मानते हुए कि नाभिक का द्रव्यमान उसके द्रव्यमान संख्या के अनुक्रमानुपाती है। (पुस्तक का उदाहरण 7.8)

हल: U^{238} का नाभिक अचानक विघटित होता है

अतः संवेग संरक्षण के नियम से

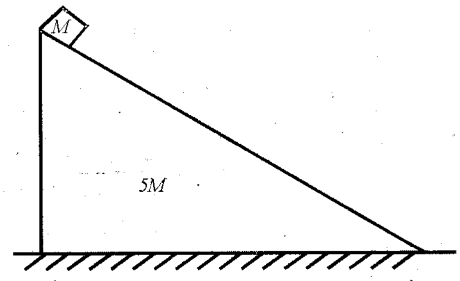
विघटन से पूर्व संवेग = विघटन के पश्चात् संवेग

$$\Rightarrow \quad 0 = 4 \times 1.4 \times 10^7 + 234v$$

$$\Rightarrow \quad v = -\frac{4 \times 1.4 \times 10^7}{234} = -2.4 \times 10^5 \text{ मी/से}$$

अतः Th^{234} नाभिक का प्रतिक्षेपी वेग = 2.4×10^5 मी/से

उदा. 18. चित्र में *M* द्रव्यमान का एक पिण्ड 5*M* द्रव्यमान के एक पिण्ड के ऊपर स्थित है। सभी सतह चिकनी है। यदि निकाय को विरामावस्था से छोड़ा जाये तो बड़े पिण्ड द्वारा तय की गयी दूरी का मान क्या होगा जब छोटा पिण्ड सतह पर पहुँच जाता है? (पुस्तक का उदाहरण 7.9)



चित्र 7.24

हल: माना कि M द्रव्यमान के पिण्ड को छोड़ने पर 5M द्रव्यमान का पिण्ड बांयी ओर x दूरी तक विस्थापित होता है तब M द्रव्यमान का पिण्ड दांयी ओर (1.2 + x) मी. दूरी तक विस्थापित होता है। बाह्य क्षैतिज बल का मान शून्य होने से द्रव्यमान केन्द्र जो प्रारंभ में स्थिर था उसी क्षैतिज स्थिति में बना रहेगा।

$$\therefore \quad M(1.2 + x) = 5Mx$$

$$\Rightarrow \quad 5x = 1.2 + x$$

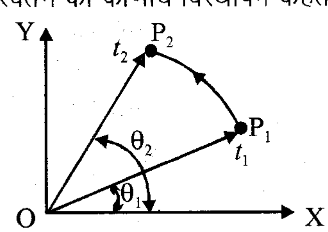
$$\Rightarrow \quad 4x = 1.2$$

$$\Rightarrow \quad x = 0.3 \text{ मी.}$$

अतः 5M द्रव्यमान के पिण्ड द्वारा तय की गई दूरी = 0.3 मीटर होगी।

7.6 कोणीय विस्थापन (Angular Displacement)

(i) वृत्ताकार पथ पर गति कर रहे किसी कण की वृत्त के केन्द्र के सापेक्ष स्थिति में परिवर्तन को कोणीय विस्थापन कहते हैं।



चित्र 7.25

(ii) निश्चित अक्ष के सापेक्ष निश्चित समयान्तराल में किसी कण की कोणीय स्थिति में परिवर्तन को उसका कोणीय विस्थापन कहते हैं। माना कि किसी कण की समय t_1 पर कोणीय स्थिति θ_1 है तथा समय t_2 पर कोणीय स्थिति θ_2 हो जाती है अतः समयान्तराल $(t_2 - t_1) = \Delta t$ में कण वृत्तीय पथ में $P_1P_2 = \Delta s$ दूरी तय करता है तथा कोणीय स्थिति में परिवर्तन $(\theta_2 - \theta_1) = \Delta\theta$ हो जाता है। $\Delta\theta$ कोणीय विस्थापन कहलाता है

अर्थात्

$$\text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{\text{रेखीय विस्थापन}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}$$

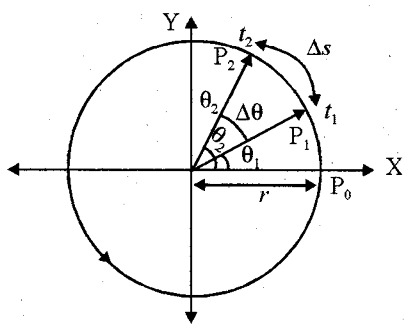
महत्त्वपूर्ण तथ्य

- यह एक सदिश राशि है व इसे रेडियन में मापा जाता है।
- दक्षिणावर्त (Clockwise) में कोणीय विस्थापन ऋणात्मक तथा वामावर्त (Anti-Clockwise) में कोणीय विस्थापन धनात्मक होगा।
- यह विमाहीन राशि है।
- 1 रेडियन = $\frac{360°}{2\pi}$ होता है या π रेडियन = 180°

7.7 कोणीय वेग (Angular Velocity)

(i) घूर्णन गति कर रही वस्तु के कोणीय विस्थापन में परिवर्तन की दर को कोणीय वेग कहते हैं।

(ii) घूर्णन गति कर रही वस्तु एक सेकण्ड में वृत्त के केन्द्र के चारों तरफ जितने कोण से घूमती है उसका कोणीय वेग कहलाता है। इसे सामान्यतः ω (ओमेगा) द्वारा व्यक्त करते हैं।



चित्र 7.26

औसत कोणीय वेग

$$\omega_{av} = \frac{\text{कोणीय विस्थापन में परिवर्तन}}{\text{समय अन्तराल}}$$

$$\omega_{av} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

यह यदि Δt का मान अत्यल्प लें

अर्थात् $\Delta t \to 0$ मानें तो कोणीय वेग तात्क्षणिक कोणीय वेग कहलाता है।

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\hat{n}$$

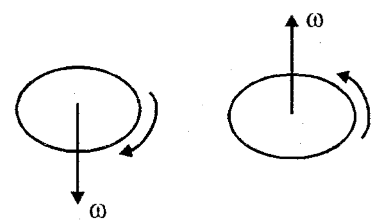
यदि किसी पिण्ड का कोणीय वेग नियत हो तथा समय T में एक चक्कर या 2π रेडियन अक्ष के परितः घूर्णित हो जाता है तो कोणीय वेग होगा–

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \because \text{आवृत्ति } n = \frac{1}{T}$$

$$\therefore \quad \omega = 2\pi n$$

महत्त्वपूर्ण तथ्य

- कोणीय वेग $\vec{\omega}$ एक अक्षीय सदिश (axial vector) राशि है, जिसकी दिशा घूर्णन अक्ष जिसके परितः पिण्ड घूर्णन करता है, के अनुदिश ली जाती है तथा निर्धारण दक्षिणावर्त पेंच नियम द्वारा करते हैं। यदि एक दक्षिणावर्त पेंच को कोणीय विस्थापन की दिशा में घुमाया जाए तो जिस दिशा में पेंच रैखिक गति करता है वही कोणीय वेग की दिशा होती है।
- दक्षिणावर्ती (clock wise) घूर्णन के लिए कोणीय वेग नीचे की ओर तथा वामावर्ती (Anti-clock wise) घूर्णन के लिए ऊपर की ओर कार्यकारी माना जाता है।



चित्र 7.27

- इसका परिमाण कोणीय चाल के बराबर होता है।
- कोणीय चाल को टेकोमीटर द्वारा मापा जाता है।
- जब वस्तु का कोणीय वेग समान नहीं होता है, तब तात्क्षणिक कोणीय वेग $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ काम में लेते हैं।
- कोणीय वेग का मात्रक $\frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}}$ होता है।
- तात्क्षणिक कोणीय वेग को कोणीय वेग कहा जाता है।
- कोणीय वेग का मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है जबकि कोणीय चाल सदैव धनात्मक होती है।

7.8 कोणीय त्वरण (Angular Acceleration)

घूर्णन गति कर रही वस्तु के कोणीय वेग में परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण कहते हैं अर्थात् औसत कोणीय त्वरण

$$\alpha_{av} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

$$\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

यदि α नियत नहीं है तब तात्क्षणिक कोणीय त्वरण होगा

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

कोणीय त्वरण का मात्रक रेडियन/सेकण्ड^2 होता है। यह एक सदिश राशि है जिसकी दिशा कोणीय वेग परिवर्तन की दिशा में होती है।

7.9 घूर्णन गति के समीकरण (Equation of Motion of Rotating Body)

माना कि किसी पिण्ड का t = 0 समय पर कोणीय वेग अर्थात् प्रारंभिक कोणीय वेग ω_0 तथा t समय पश्चात् अंतिम कोणीय वेग ω है तब पिण्ड का नियत कोणीय त्वरण α हो तो

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha t \quad ...(1)$$

नियत कोणीय त्वरण के लिए पिण्ड के कोणीय वेग में परिवर्तन की दर नियत रहती है

$\therefore$ t = 0 से t समयान्तराल में पिण्ड का औसत कोणीय वेग

$$\omega_{av} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$$

परन्तु $\omega_{av} = \frac{\theta - \theta_0}{t}$

$$\therefore \quad \frac{\theta - \theta_0}{t} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$$

समी. (1) से ω का मान रखने पर

$$\frac{\theta - \theta_0}{t} = \frac{\omega_0 + \omega_0 + \alpha t}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad ...(2)$$

$\because$ समी. (1) से

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha}$$

$$\because \quad \frac{\theta - \theta_0}{t} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{(\theta - \theta_0)\alpha}{\omega - \omega_0} = \frac{\omega + \omega_0}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \theta - \theta_0 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$$

यदि $\theta_0 = 0$ हो तो

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \quad ...(3)$$

समीकरण (1), (2) व (3) नियत कोणीय त्वरण के अन्तर्गत घूर्णन गति के समीकरण कहलाते है।

उदा. 19. निम्न कोणीय विस्थापनों का मान रेडियन (Radian) में लिखिए-

(1) 90° (2) 120° (3) 270° (4) 360°

(पुस्तक का उदाहरण 7.10)

हल: $\because$ 2π radian = 360°

$$\Rightarrow \quad 1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ radian} = \frac{\pi}{180} \text{ radian}$$

(1) $90^\circ = 90 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{2}$ radian

(2) $120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$ radian

(3) $270^\circ = 270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$ radian

(4) $360^\circ = 360 \times \frac{\pi}{180} = 2\pi$ radian

उदा.20. यदि कोई धावक वृत्ताकार पथ की परिधि पर पाँच चक्कर पूर्ण करता है, तब धावक का कोणीय विस्थापन कितना होगा ?

हल– 1 चक्कर में कोणीय विस्थापन= 2π रेडियन

5 चक्कर में कोणीय विस्थापन= $2\pi \times 5 = 10\pi$ रेडियन

उदा. 21. घड़ी की सेकण्ड की सुई का कोणीय वेग क्या होगा? (पुस्तक का उदाहरण 7.11)

हल: घड़ी की सेकण्ड की सुई का आवर्तकाल T = 60 सेकण्ड

$\therefore$ सुई का कोणीय वेग

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \ \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}}$$

उदा.22.पृथ्वी का अपनी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कोणीय वेग ज्ञात कीजिये।

हल– पृथ्वी का अपनी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष आवर्त काल T = 24 घण्टे

$$\text{कोणीय वेग } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{24} \text{ रेडियन/घण्टे}$$

$$= \frac{2 \times 3.14}{24 \times 3600}$$

$$= 7.3 \times 10^{-5} \text{ रेडियन/से.}$$

उदा. 23. एक गतिपालक चक्र (Fly wheel) का व्यास 0.36 mहै तथा किसी क्षण *t* पर इसकी कोणीय स्थिति को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है

$$\theta = 3.0\, t^3$$

ज्ञात कीजिये :–

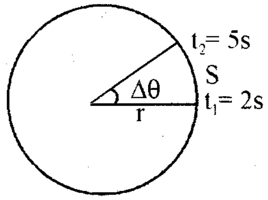
(i) t_1= 2.0 s से t_2 = 5.0 s के समयान्तराल में गतिपालक चक्र की नेमी (Rim) पर स्थित एक कण द्वारा तय की गयी दूरी का मान ज्ञात कीजिये।

(ii) इस अन्तराल में औसत कोणीय वेग का मान ज्ञात कीजिये।

(iii) t_1 = 2.0 s से t_2 = 5.0 s पर तात्क्षणिक कोणीय वेगों का मान ज्ञात कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 7.12)

हल: दिया गया है :

त्रिज्या $r = \frac{0.36}{2} = 0.18$ m, $\theta = 3t^3$



चित्र 7.28

(i) $\because \quad \Delta\theta = (\theta)_{t_2} - (\theta)_{t_1}$

$\Delta\theta = 3(5)^3 - 3(2)^3$

$= 375 - 24$

$= 351$ रेडियन

$\because$ कोण $= \dfrac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$

$\therefore$ गतिपालक चक्र की परिधि पर स्थित कण द्वारा तय की गयी दूरी

= चाप = कोण × त्रिज्या

$= 351 \times 0.18 = 63.2$ मीटर

(ii) औसत कोणीय वेग

$$\omega_{av} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{375 - 24}{5 - 2} = \frac{351}{3}$$

$= 117 \dfrac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}}$

(iii) तात्क्षणिक कोणीय वेग

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^3) = 3 \times 3t^2 = 9t^2$$

$\therefore t_1 = 2s$ पर तात्क्षणिक कोणीय वेग

$$\omega_1 = 9(2)^2 = 36 \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}}$$

$t_2 = 5s$ पर तात्क्षणिक कोणीय वेग

$$\omega_2 = 9(5)^2 = 225 \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}}$$

उदा. 24. एक पहिया 4 rad s^{-2} के स्थिर कोणीय त्वरण से घूर्णन गति कर रहा है। यदि पहिया विरामावस्था से गति प्रारम्भ करे तो 20 s पश्चात् पहिया कितने चक्रण पूरा करेगा? (पुस्तक का उदाहरण 7.13)

हल: दिया गया है:

$$\alpha = 4 \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}^2}, \omega_0 = 0, t = 20 \text{ सेकण्ड}$$

$$\because \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = 0 + \frac{1}{2} \times 4 \times (20)^2 = 800 \text{ रेडियन}$$

$\because 2\pi$ रेडियन कोण से घूमने में चक्रणों की संख्या = 1

$\therefore$ 1 रेडियन कोण से घूमने में चक्रणों की संख्या $= \dfrac{1}{2\pi}$

$\therefore$ 800 रेडियन कोण से घूमने में चक्रणों की संख्या $= \dfrac{1}{2\pi} \times 800$

$$= \frac{400}{\pi} = 125.7$$

उदा.25. किसी दृढ़ पिण्ड का कोणीय विस्थापन θ समय t पर निम्न प्रकार निर्भर करता है-

$$\theta = 2t^3 - 5t^2 + 6$$

समय $t = 2$ सेकण्ड पर तात्क्षणिक कोणीय वेग ज्ञात करो।

हल– कोणीय वेग $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

$$\omega = \frac{d}{dt}(2t^3 - 5t^2 + 6)$$

$= 2 \times 3t^2 - 5 \times 2t + 0$

$= 6t^2 - 10t$

$t = 2$ सेकण्ड रखने पर

$\omega = 6(2)^2 - 10(2)$

$= 24 - 20$

$= 4$ रेडियन/सेकण्ड

उदा. 26. एक मोटर का पहिया विरामावस्था से एक समान त्वरण से गति करता हुआ प्रथम एक सेकण्ड में 5.0 radian घूर्णन करता है। अगले एक सेकण्ड में पहिये द्वारा घूर्णन कोण का मान ज्ञात कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 7.14)

हल: दिया गया है : $\omega_0 = 0$, $t = 1$ सेकण्ड पश्चात् $\theta = 5$ रेडियन,

$t' = 2$ सेकण्ड पश्चात् $\theta' = ?$

$$\because \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\Rightarrow \quad 5 = 0 + \frac{1}{2}\alpha(1)^2 \Rightarrow \alpha = 10 \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}^2}$$

$$\theta' = \omega_0 t' + \frac{1}{2}\alpha t'^2$$

$$\theta' = 0 + \frac{1}{2} \times 10(2)^2 = 20 \text{ रेडियन}$$

$\therefore$ अगले एक सेकण्ड में पहिये द्वारा घूर्णन कोण

$= 20 - 5 = 15$ रेडियन

उदा.27. एक दृढ़ पिण्ड परिवर्ती कोणीय वेग $(a - bt)$ से किसी समय 't' पर घूर्णन अक्ष के सापेक्ष घूर्णन गति कर रहा है। इसके विरामावस्था में आने तक इसके द्वारा बनाया कोण क्या होगा ?

हल– दिया गया है– $\omega = a - bt$ ...(1)

$t = 0$ पर $\omega = \omega_0 = a$

समी. (1) का अवकलन करने पर

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -b$$

घूर्णन गति के तृतीय समीकरण से

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

$$\omega = 0, \omega_0 = a, \alpha = -b$$

$$0 = a^2 + 2(-b)\theta$$

$$\theta = \frac{a^2}{2b}$$

उदा. 28. एक मोटरकार 500 m त्रिज्या के एक वृत्ताकार पथ में $30\ m\ s^{-1}$ के वेग से गति कर रही है। यदि यह अपने वेग में $2\ m\ s^{-2}$ की दर से वृद्धि करे तो इसका त्वरण ज्ञात कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 7.15)

हल: दिया गया है: r = 500 मी, v = 30 मी/से,
स्पर्श रेखीय त्वरण $a_t = 2$ मी/से^{2}, a = ?

$\because$ अभिकेन्द्रीय त्वरण $a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(30)^2}{500} = 1.8$ मी/से^{2}

$\therefore$ त्वरण $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$

$= \sqrt{(2)^2 + (1.8)^2} = 2.7$ मी/से^{2}

उदा.29.एक बिजली का पंखा 600 चक्कर प्रति मिनट की चाल से घूर्णन कर रहा है। जब विद्युत प्रवाह बन्द हो जाता है तो पंखा 60 चक्कर के पश्चात् रुक जाता है तब पंखे को रुकने में कितना समय लगेगा ?

हल– $\because$ $n_0 = 600$ चक्कर/मिनट

$= \frac{600}{60} \frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}}$

$\omega_0 = 2\pi n_0 = \frac{2\pi \times 600}{60}$

$\therefore$ बिजली के पंखे का प्रारम्भिक कोणीय वेग $\omega_0 = 20\pi$ रेडियन/से.
तथा अन्तिम कोणीय वेग $\omega = 0$, कोणीय विस्थापन $\theta = 60$, चक्कर $= 2\pi \times 60$ रेडियन
[$\because$ एक चक्कर में कोणीय विस्थापन $\theta = 2\pi$ रेडियन]

घूर्णन गति के तृतीय समीकरण से– $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

$\therefore$ $0 = (20\pi)^2 + 2\alpha 120\pi$

$\alpha = \frac{-20\pi \times 20\pi}{2 \times 120\pi}$

$\therefore$ $\alpha = \frac{-5\pi}{3}$ रेडियन/से.^{2}

$\therefore$ $\omega = \omega_0 + \alpha t$

$\therefore$ $0 = 20\pi + \left(\frac{-5\pi}{3}\right)t$

$\frac{-5\pi}{3}t = 20\pi$

या $\frac{t}{3} = 4$ $\Rightarrow t = 12$ सेकण्ड

अतः पंखे को रुकने में समय लगेगा = 12 सेकण्ड

उदा.30. A एवं B दो पहिये हैं जिनकी त्रिज्यायें क्रमशः 10 cm एवं 30 cm है। इनको एक बेल्ट से युग्मित किया जाता है पहिया A विरामावस्था से अपने कोणीय चाल में $1.57\ rad\ s^{-2}$ की दर से वृद्धि करता है। वह समय ज्ञात कीजिये जिसमें पहिया B की घूर्णी चाल 100 चक्रण/मिनट हो जाती है। इस सम्पूर्ण गति में युग्मन बेल्ट फिसलता नहीं है। (पुस्तक का उदाहरण 7.16)

हल: दिया गया है: $r_A = 10$ सेमी, $r_B = 30$ सेमी,

$$\alpha = 1.57 \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}^2}$$

$$n_B = 100 \frac{\text{चक्रण}}{\text{मिनट}} = \frac{100}{60} \frac{\text{चक्रण}}{\text{सेकण्ड}} = \frac{5}{3} \frac{\text{चक्रण}}{\text{सेकण्ड}}$$

$t = ?$

प्रश्नानुसार सम्पूर्ण गति में युग्मन बेल्ट नहीं फिसलता हैं अत: पहिये A तथा B की सतह पर किसी कण का रेखीय वेग समान होगा अर्थात्

$v_A = v_B$

$\Rightarrow$ $r_A\omega_A = r_B\omega_B$

$\Rightarrow$ $10\omega_A = 30 \times 2\pi \times \frac{5}{3}$

$\Rightarrow$ $\omega_A = 10\pi \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}}$

$\because$ घूर्णन गति के प्रथम समीकरण से

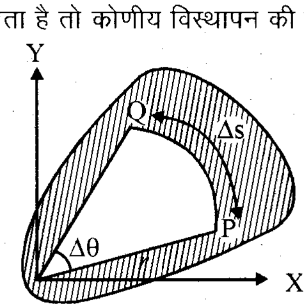
$\omega_A = \omega_0 + \alpha t$

$\Rightarrow$ $10\pi = 0 + 1.57t$

$\Rightarrow$ $t = \frac{10\pi}{1.57} = 20$ सेकण्ड

7.10 रेखीय वेग तथा कोणीय वेग में संबंध (Relation between Linear Velocity and Angular Velocity)

यदि कोई कण समयान्तराल Δt में r त्रिज्या के वृत्तीय पथ में $PQ = \Delta s$ दूरी तय करता है तथा घूर्णन अक्ष पर कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ प्राप्त होता है तो कोणीय विस्थापन की परिभाषा से,



चित्र 7.29

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}$$

दोनों तरफ Δt से भाग देने पर

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

यदि समयान्तराल Δt अत्यल्प है अर्थात् $\Delta t \to 0$ तो

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$\because$ $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega$

तथा $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$

$\therefore$ $\omega = \frac{v}{r}$

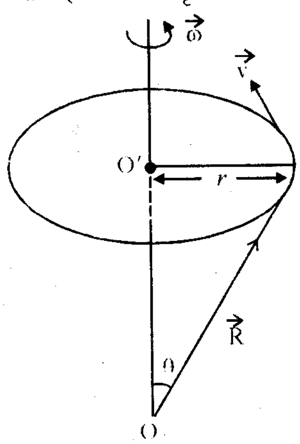
$\Rightarrow$ $v = r\omega$

यदि ω नियत हो तो $v \propto r$

अर्थात् नियत कोणीय वेग से घूर्णन गति करने वाले कणों का रेखीय वेग घूर्णन अक्ष से कणों की दूरी पर निर्भर करता है। जिस कण की दूरी जितनी अधिक होगी कण का रेखीय वेग भी उतना ही अधिक होगा।

कोणीय वेग व रेखीय वेग का सदिश सम्बन्ध

माना एक कण 'P' किसी घूर्णन अक्ष OA के प्रति कोणीय वेग ω से घूर्णन कर रहा है। इसकी दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश $\overrightarrow{OA}$ है। घूर्णन अक्ष के प्रति इस कण के वृत्ताकार पथ की त्रिज्या r है।



चित्र 7.30

यदि किसी समय कण का मूल बिन्दु (निर्देश बिन्दु) O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{R}$ है तो $\overrightarrow{OP} = \vec{R}$

$\because$ $v = \omega r$ तथा $r = R \sin\theta$

$\therefore$ $v = \omega R \sin\theta$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

महत्वपूर्ण तथ्य

1. सभी कणों का कोणीय वेग समान होता है, परन्तु उनका रेखीय वेग भिन्न–भिन्न होता है ($v = r\omega$)।
2. घूर्णन अक्ष पर स्थित प्रत्येक कण का रेखीय वेग शून्य होता है।
3. यदि मूल बिन्दु O, O' पर स्थित हो अर्थात् $\vec{r} = \vec{R}$ तब $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

7.11 रेखीय त्वरण तथा कोणीय त्वरण में संबंध (Relation between Linear acceleration and Angular Acceleration)

हम जानते हैं कि कोणीय वेग तथा रेखीय वेग में सम्बन्ध

$$v = r\omega$$

समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$$

$\Rightarrow$ $a = r\alpha$

कोणीय त्वरण व रेखीय त्वरण में सदिश सम्बन्ध–

हम जानते हैं कि

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

यदि कण नियत त्रिज्या R के वृत्ताकार पथ में घूर्णन कर रहा है तो इस स्थिति को ध्यान में रखते हुए समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर

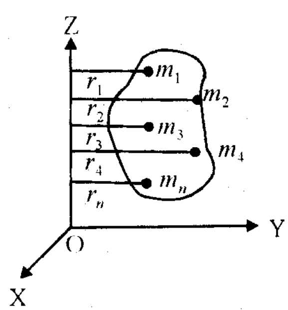
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \vec{R}\right)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right) \times \vec{R} \qquad \because \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} \qquad \because \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$$

7.12 जड़त्व आघूर्ण या घूर्णन जड़त्व (Moment of Inertia)

(i) घूर्णन गति में वस्तु का वह गुण जिसके कारण वह किसी अक्ष के सापेक्ष अपनी घूर्णन अवस्था में परिवर्तन का विरोध करता है घूर्णी जड़त्व कहलाता है। घूर्णी जड़त्व का मापन करने वाली भौतिक राशि उस अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण कहलाती है। इसे I द्वारा प्रदर्शित करते हैं।



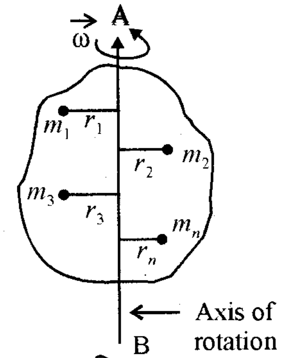
चित्र 7.31

(ii) घूर्णन गति कर रही किसी वस्तु (कण) का किसी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण उस वस्तु के द्रव्यमान व घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है

अर्थात यदि m द्रव्यमान के कण की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी r हो तो, कण का जड़त्व आघूर्ण

$$I = mr^2 \qquad ...(1)$$

दिये गये चित्र के अनुसार M द्रव्यमान को कोई दृढ़ पिण्ड दर्शाया गया है। इसका AB अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। इसके लिए मान लो पिण्ड अनेक छोटे–छोटे कणों से मिलकर बना है। यदि इन कणों के द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ तथा लम्बवत् दूरियाँ क्रमशः $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ हो तो पिण्ड की घूर्णन अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण (I) समस्त कणों के जड़त्व आघूर्णों के योग के बराबर होगा।



चित्र 7.32

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2 \quad \ldots(2)$$

जड़त्व आघूर्ण की निर्भरता–

(i) वस्तु के द्रव्यमान पर

(ii) घूर्णन अक्ष की स्थिति पर

(iii) घूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर अर्थात् वस्तु के आकार, आकृति एवं घनत्व पर।

महत्वपूर्ण तथ्य

- वास्तव में जड़त्व आघूर्ण न तो सदिश न ही अदिश राशि है, क्योंकि दक्षिणावर्ती या वामावर्ती घूर्णन के लिए इसका मान समान होता है, परन्तु यह एक प्रदिश (Tensor) राशि है परन्तु इस स्तर पर (एक नियत घूर्णन अक्ष के लिए) अध्ययन में इसे एक अदिश राशि मान सकते है।
- घूर्णन अक्ष के बिना इसका कोई महत्व नहीं है।
- यदि वस्तु में द्रव्यमान वितरण असतत् हो तो $I = \sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$

  यदि वस्तु में द्रव्यमान वितरण सतत् हो तो $I = \int (dm)r^2$

  जहाँ r, अल्पांश dm की अक्ष से लम्बवत् दूरी है।
- घूर्णन अक्ष के कण में से गुजरने पर घूर्णन अक्ष के सापेक्ष उसका जड़त्व आघूर्ण शून्य होगा। (क्योंकि $r = 0$)
- किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण जितना अधिक होता है उसकी घूर्णन अवस्था में परिवर्तन हेतु उतना ही अधिक बल आघूर्ण आरोपित करना पड़ेगा।
- इसका M.K.S. पद्धति में मात्रक किग्रा × मी.^{2} तथा विमा $[M^1L^2T^0]$ होती है।

जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व
(Physical significance of moment of Inertia)

कोई पिण्ड बाह्य बल की अनुपस्थिति मे अपनी स्थिर या गतिमान अवस्था को परिवर्तित नही कर सकता है। पिण्ड का यह गुण जड़त्व कहलाता है। रेखीय गति में पिण्ड का द्रव्यमान ही इसके जड़त्व का माप है। किसी पिण्ड का द्रव्यमान जितना अधिक होगा उसमें रेखीय त्वरण उत्पन्न करने के लिए उतना ही अधिक बल लगाना होगा। इसी प्रकार घूर्णन गति में पिण्ड में कोणीय त्वरण उत्पन्न करने के लिए बल आघूर्ण लगाया जाता है। किसी अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करने वाला पिण्ड स्वतः ही अपनी घूर्णन गति में परिवर्तन नहीं कर सकता जब तक कि बाह्य बलाघूर्ण नहीं लगाया जाता है। घूर्णन गति में पिण्ड का यह गुण घूर्णी जड़त्व कहलाता है। घूर्णन गति में पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण ही इसके घूर्णी जड़त्व का मापक है अतः घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण का वही महत्व होता है जो रेखीय गति में द्रव्यमान का होता है जड़त्व आघूर्ण पिण्ड के द्रव्यमान के साथ–साथ अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर भी निर्भर करता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. जड़त्व आघूर्ण कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, बल आघूर्ण, कोणीय संवेग व घूर्णन गतिज ऊर्जा पर निर्भर नहीं करता।
2. समान आकृति, द्रव्यमान व त्रिज्या के लिए एक दिये गये अक्ष के परितः ठोस व खोखले पिण्डों में, खोखले पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण अधिक होगा क्योंकि यह कणों या द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करता है।
3. किसी दिये गये पिण्ड का जड़त्व नियत होता है परन्तु जड़त्व आघूर्ण परिवर्ती होता है।

जड़त्व तथा जड़त्व आघूर्ण में अन्तर

जड़त्व	जड़त्व आघूर्ण
1. इसका महत्त्व रैखिक गति में होता है।	1. इसका महत्त्व घूर्णन गति में होता है।
2. जड़त्व किसी वस्तु का वह गुण है जो रैखिक गति में वस्तु की अवस्था परिवर्तन का विरोध करता है।	2. जड़त्व आघूर्ण किसी वस्तु का वह गुण है, जो घूर्णन गति में वस्तु की अवस्था परिवर्तन का विरोध करता है।
3. किसी वस्तु का जड़त्व केवल उसके द्रव्यमान पर निर्भर करता है।	3. किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण उसके द्रव्यमान तथा घूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करता है।
4. किसी एक वस्तु का जड़त्व नियत होता है।	4. किसी एक वस्तु का जड़त्व आघूर्ण भिन्न भिन्न घूर्णन अक्षों के सापेक्ष भिन्न–भिन्न होता है।

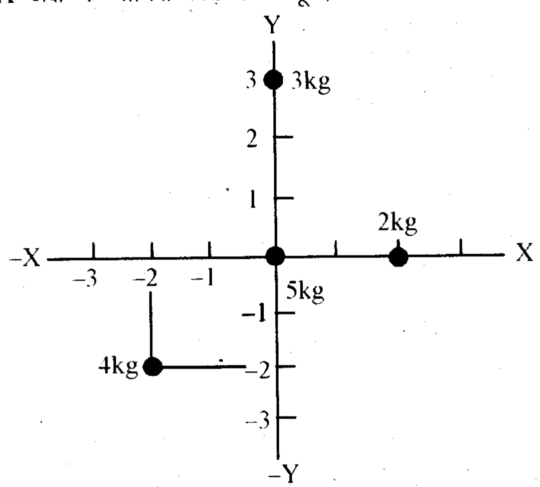
जड़त्व आघूर्ण का दैनिक जीवन में महत्त्वः जड़त्व आघूर्ण का दैनिक जीवन में बहुत महत्त्व है। मोटरकार, स्कूटर, रिक्शा, साइकिल आदि में पहिये का जड़त्व आघूर्ण बढ़ाने के लिये पहियों का अधिकांश द्रव्यमान उनके रिम पर होता है तथा रिम व पहिये की एक्सल का संबंध तानों (spokes) की सहायता से कर दिया जाता है। पहिये के जड़त्व आघूर्ण का मान अधिक होने से साइकिल के पैडिल को पैर से चलाना बन्द कर देने पर भी साइकिल के पहिये कुछ दूरी तक घूमते रहते हैं।

गतिपालक चक्र में भी जड़त्व आघूर्ण का उपयोग होता है इंजिन के एक कार्य–चक्र में शॉफ्ट (shaft) को घुमाने वाला बल आघूर्ण बढ़ता–घटता रहता है जिससे शॉफ्ट का घूर्णन एकसमान नहीं हो पाता है। इसे एकसमान बनाये रखने के लिए शॉफ्ट पर एक बड़ा पहिया लगा

देते हैं जिसे गतिपालक चक्र (flywheel) कहते हैं। इस पहिए का अधिकाधिक द्रव्यमान, इसकी परिधि पर केन्द्रित होता है, अत: इसका जड़त्व आघूर्ण बहुत अधिक होता है। जब शॉफ्ट घूमती है, तो गतिपालक चक्र भी घूमता है। यदि शॉफ्ट को घुमाने वाले बल आघूर्ण का मान घटता या बढ़ता है, तो सम्पूर्ण निकाय का जड़त्व आघूर्ण बहुत अधिक होता है, अत: इसके शॉफ्ट के घूमने की कोणीय चाल पर लगभग कोई प्रभाव नहीं पड़ता है व शॉफ्ट एकसमान चाल से घूमती रहती है। इसके अतिरिक्त, इसका जड़त्व आघूर्ण बहुत अधिक होता है, अत: इसमें अत्यधिक घूर्णन गतिज ऊर्जा संचित हो जाती है जिससे शॉफ्ट को घुमाने वाले स्रोत से ऊर्जा न मिलने पर भी गतिपालक चक्र, शॉफ्ट को कुछ देर तक घुमाता रहता है।

उदा.31. 5 किग्रा., 2 किग्रा., 3 किग्रा. और 4 किग्रा. द्रव्यमान के चार पिण्ड क्रमशः (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 3, 0) और (–2, –2, 0) बिन्दुओं पर रखें गये है। X अक्ष, Y अक्ष, Z अक्ष के सापेक्ष इस निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये। (दूरियों को मीटर में नापा गया है।)
(पुस्तक का उदाहरण 7.17)

हल: X–अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण,



चित्र 7.33

$$I_x = m_1y_1^2 + m_2y_2^2 + m_3y_3^2 + m_4y_4^2$$
$$= 5 \times 0 + 2 \times 0 + 3 \times 3^2 + 4 \times (-2)^2$$
$$= 27 + 16$$
$$= 43 \text{ किग्रा.–मी.}^2$$

Y–अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण,

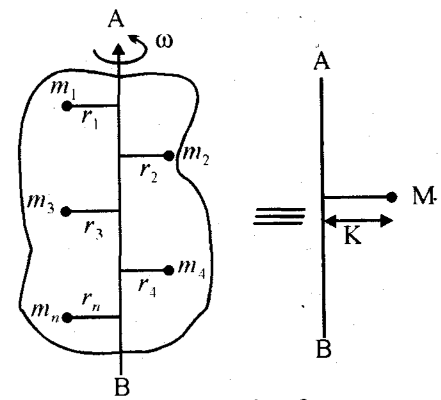
$$I_y = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + m_3x_3^2 + m_4x_4^2$$
$$= 5 \times 0 + 2 \times 2^2 + 3 \times 0 + 4 \times (-2)^2$$
$$= 8 + 16$$
$$= 24 \text{ किग्रा.–मी.}^2$$

Z–अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण,
लम्बवत् अक्षों की प्रमेय से–

$$I_z = I_x + I_y$$
$$= 43 + 24$$
$$= 67 \text{ किग्रा.–मी.}^2$$

घूर्णन त्रिज्या या परिभ्रमण त्रिज्या (K) (Radius of Gyration)

(i) किसी वस्तु की घूर्णन त्रिज्या घूर्णन अक्ष से नापी गया वह लम्बवत् दूरी है जिसके वर्ग को उस वस्तु के द्रव्यमान से गुणा करने पर उस अक्ष के सापेक्ष वस्तु का जड़त्व आघूर्ण प्राप्त हो।



चित्र 7.34 घूर्णन त्रिज्या

(ii) 'K' घूर्णन अक्ष से नापी गयी वह लम्बवत् दूरी है जहाँ पर वस्तु के सम्पूर्ण द्रव्यमान को केन्द्रित मान लेने पर उस अक्ष के सापेक्ष वही जड़त्व आघूर्ण प्राप्त होता है जो वास्तविक द्रव्यमान वितरण से प्राप्त होता है।

अर्थात्

$$I = MK^2$$

जहाँ K घूर्णन त्रिज्या

$$K = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

$$K = \sqrt{\frac{\sum mr^2}{M}}$$

$$\because \quad I = \sum mr^2$$

यदि कणों के द्रव्यमान समान हो अर्थात्

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$$

तब
$$K = \sqrt{\frac{(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)m}{mn}}$$

$$K = \sqrt{\frac{(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2)}{n}}$$

$K = r_{rms}$ अर्थात् घूर्णन त्रिज्या कणों की घूर्णन अक्ष से वर्ग माध्य मूल (root mean square) दूरी के बराबर होती है।

घूर्णन त्रिज्या की निर्भरता–

(i) घूर्णन अक्ष की स्थिति पर

(ii) पिण्ड के द्रव्यमान वितरण पर अर्थात् आकार, आकृति व घनत्व पर।

घूर्णन त्रिज्या पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नही करती है। यदि किसी सममित वस्तु से कोई भाग टूट जाता है तो सममित अलगाव की स्थिति में K का मान नहीं परिवर्तित होता है। परन्तु

असममित अलगाव की स्थिति में K का मान कम हो जाता है।

7.13 जड़त्व आघूर्ण प्रमेय (Theorems of Moment of Inertia)

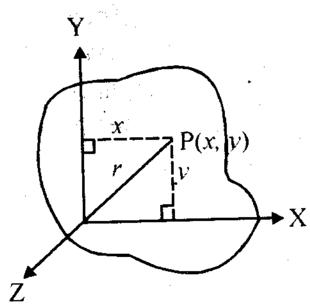
जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने के लिए निम्न प्रमेयों का उपयोग किया जाता है–

(a) समकोणिक (लम्बवत्) अक्षों की प्रमेय

(b) समान्तर अक्षों की प्रमेय

(a) समकोणिक (लम्बवत्) अक्षों की प्रमेय (Theorem of perpendicular axes)

कथन–किसी समतल पटल (lamina) का उसके तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण उसके तल में स्थित दो परस्पर लम्बवत् अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्णो के योग बराबर होता है जबकि अभीष्ट अक्ष उन दोनों अक्षों के कटान बिन्दु से होकर गुजरती है।



चित्र 7.35 समकोणीय अक्षों की प्रमेय

सत्यापन–चित्र में किसी पिण्ड के तल XY में स्थित OX व OY दो अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I_x तथा I_y है। दोनों अक्षों के कटान बिन्दु 'O' से गुजरने वाली तथा पिण्ड के तल के अभिलम्ब अक्ष OZ के सापेक्ष जड़त्व I_z है तो P पर स्थित m द्रव्यमान के कण का OX अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_x = my^2$.

OY अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_y = mx^2$ तथा

Z अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_z = mr^2$ होगा।

सम्पूर्ण पिण्ड का इन अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण होगा–

$$I_x = \sum my^2$$

$$I_y = \sum mx^2$$

$$I_z = \sum mr^2$$

$\because r^2 = x^2 + y^2$

$$\therefore \quad I_z = \sum m(x^2 + y^2)$$

$$I_z = \sum mx^2 + \sum my^2$$

$$\therefore \quad I_z = I_y + I_x$$

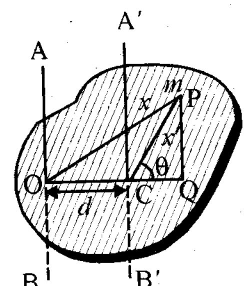
$$I_z = I_x + I_y$$

(b) समान्तर अक्षों की प्रमेय (Theorem of Parallel axes)

कथन–किसी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण (I), पिण्ड के गुरूत्व केन्द्र से गुजरने वाली समान्तर अक्ष के सापेक्ष पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण (I_G) तथा उसका द्रव्यमान (M) तथा दोनों समान्तर अक्षों के मध्य की दूरी (*d*) के वर्ग के गुणनफल के योगफल के बराबर होता है। अर्थात्

$$I = I_G + Md^2$$

सत्यापन– दिये गये प्रमेय चित्र में किसी बिन्दु O से जाने वाली अक्ष AB से कण की लम्बवत् दूरी '*x*' है। अतः जड़त्व आघूर्ण के सूत्र से अक्ष AB के सापेक्ष कण का जड़त्व आघूर्ण = mx^2 तथा AB के सापेक्ष पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण



चित्र 7.36 समान्तर अक्षों की प्रमेय

$$I = \sum mx^2 \qquad ...(1)$$

द्रव्यमान केन्द्र से पारित अक्ष A'B' के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I_G = \sum mx'^2 \qquad ...(2)$$

समकोण ΔOQP में

$$(OP)^2 = (OQ)^2 + (QP)^2$$

$$(OP)^2 = (OC + CQ)^2 + (QP)^2$$

$$= OC^2 + CQ^2 + 2OC.CQ + QP^2$$

$$= OC^2 + (CQ^2 + QP^2) + 2OC.CQ$$

परन्तु समकोण त्रिभुज CQP से

$$CP^2 = (CQ)^2 + (QP)^2$$

तथा $\quad CQ = CP \cos\theta$

$\therefore \quad OP^2 = OC^2 + CP^2 + 2OC.CQ$

$$OP^2 = OC^2 + CP^2 + 2OC.CP \cos\theta \quad ...(3)$$

$$x^2 = d^2 + x'^2 + 2dx' \cos\theta$$

समी. (1) में x^2 का मान रखने पर

$$I = \sum mx^2 = \sum md^2 + \sum mx'^2 + \sum m \times 2dx' \cos\theta$$

$$I = I_G + Md^2$$

$$\because \quad \sum mx' = 0$$

द्रव्यमान केन्द्र की परिभाषा से द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष पिण्ड के सभी कणों के द्रव्यमान आघूर्णों का सदिश योग शून्य होता है।

अतः $I = I_G + Md^2$

महत्वपूर्ण तथ्य

- दो अक्ष हों तथा दोनों परस्पर समान्तर हों।
- कोई एक अक्ष वस्तु के गुरूत्व केन्द्र (द्रव्यमान केन्द्र) से होकर गुजरे।
- यह प्रमेय सभी नियमित तथा अनियमित प्रकार की वस्तुओं के लिए सत्य है।
- गुरूत्व केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष वस्तु का जड़त्व आघूर्ण (I_G) न्यूनतम होता है।

जड़त्व आघूर्ण की गणना (Calculation of Moment of Inertia)

(i) यदि निकाय का द्रव्यमान वितरण विविक्त (discrete) है– जब निकाय का द्रव्यमान वितरण विविक्त (असतत्) हो तब निकाय के परिणामी जड़त्व आघूर्ण का मान प्रत्येक कण के द्रव्यमान तथा उसकी घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी के वर्ग के गुणनफल के योगफल के बराबर होता है अर्थात्

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2$$

(ii) यदि निकाय का द्रव्यमान वितरण सतत् (Continuous) हो– जब निकाय का द्रव्यमान वितरण सतत् हो तब दी गई अक्ष के सापेक्ष वस्तु के अनन्त सूक्ष्म (Infinitesimal) द्रव्यमान dm के जड़त्व आघूर्ण का मान x^2dm प्राप्त करते है जहाँ x अल्प द्रव्यमान dm की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी है। इसके पश्चात् जड़त्व आघूर्ण x^2dm का दिये गये पिण्ड की निर्धारित सीमाओं के मध्य समाकलन द्वारा परिणामी जड़त्व आघूर्ण की गणना करते है। इसके अन्तर्गत आवश्यकतानुसार जड़त्व आघूर्ण प्रमेयों का भी उपयोग किया जा सकता है।

7.14 वृत्ताकार वलय (रिंग) का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of a Circular Ring)

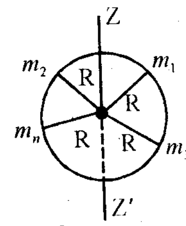
(a) वलय के केन्द्र से पारित तथा उसके तल के लम्बवत् अक्ष (वलय की स्वयं की अक्ष) के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis passing through the centre of the ring and perpendicular to the plane of the ring)

प्रथम विधि– चित्र में M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की एक वलय को प्रदर्शित किया गया है। जिसका केन्द्र O है।

वलय का ZZ' अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है।

माना कि वलय $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ द्रव्यमान अल्पांशों से मिलकर बनी हुई है।

प्रत्येक अल्पांश की अक्ष से दूरी R है। अतः अभीष्ट अक्ष के सापेक्ष सम्पूर्ण वलय का जड़त्व आघूर्ण



चित्र 7.37

$$I = m_1R^2 + m_2R^2 + m_3R^2 + \ldots\ldots + m_nR^2$$
$$I = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n)R^2$$
$$I = MR^2 \quad \ldots(1)$$

द्वितीय विधि-

वलय की परिधि $= 2\pi R$

वलय के एकांक लम्बाई का द्रव्यमान

$$= \frac{M}{2\pi R}$$

वलय के एक अल्पांश (dx) पर विचार करते है जिसका द्रव्यमान–

$$dm = \frac{M}{2\pi R}dx$$

इस विचाराधीन अल्पांश का ZZ' अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$dI = \left(\frac{M}{2\pi R}dx\right)R^2 = \frac{MRdx}{2\pi}$$

ऐसे अल्पांश वलय पर $x = 0$ से $x = 2\pi R$ तक स्थित होते है।

अतः सम्पूर्ण वलय का ZZ' अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I = \int_{x=0}^{x=2\pi R} \frac{MRdx}{2\pi} = \frac{MR}{2\pi}[x]_0^{2\pi R}$$

या $$I = \frac{MR}{2\pi}[2\pi.R - 0] = MR^2$$

या $$I = MR^2 \quad (1)$$

वलय की घूर्णन त्रिज्या K हो तो

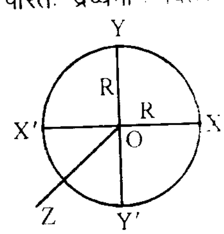
$$I = MK^2$$

समीकरण (1) से $MK^2 = MR^2$

$$K = R \quad (2)$$

(b) वलय के किसी एक व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about a diameter of the ring)

माना वलय का जड़त्व आघूर्ण उसके तल [illegible] व्यास XOX' व YOY' के सापेक्ष क्रमशः [illegible] के सभी व्यासों के परितः द्रव्यमान वितरण [illegible]



चित्र 7.38

$$I_x = I_y = I_d$$

यदि वलय के केन्द्र से पारित उसके [illegible] अक्ष

ZOZ' के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I हो तो

$$I = MR^2$$

समकोणिक अक्षों की प्रमेय से–

$$I_z = I_x + I_y$$
$$I_z = I_d + I_d = 2I_d$$

$$MR^2 = 2I_d$$

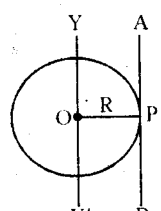
$$I_d = \frac{MR^2}{2} \quad ...(1)$$

घूर्णन त्रिज्या $K = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{MR^2}{2M}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ...(2)

(c) वलय के तल में स्थित स्पर्श रेखीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis parallel to one of the diameters and touching the ring)

माना वलय के तल में उसके बिन्दु 'P' पर स्पर्श रेखा APB के परित: जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है।

यदि गुरुत्वीय केन्द्र से पारित अक्ष YOY' हो तो यह वलय का व्यास होगा।



चित्र 7.39

अत: समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$$I = I_G + Md^2$$

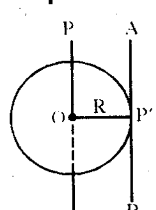
$$I_d = I_G = \frac{1}{2}MR^2 \text{ तथा } d = R$$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$$

$$I = \frac{3}{2}MR^2 \quad ...(1)$$

घूर्णन त्रिज्या $K = R\sqrt{\frac{3}{2}}$ ...(2)

(d) वलय के तल के लम्बवत् स्पर्श रेखीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis tangential to the ring and perpendicular to the plane of the ring)



चित्र 7.40

POQ से पारित अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण–

$$I_G = MR^2$$

समान्तर अक्षों की प्रमेय से–

$$I = I_G + Md^2 \quad \because d = R$$

$$I = MR^2 + MR^2$$

$$I = 2MR^2 \quad ...(1)$$

घूर्णन त्रिज्या $K = R\sqrt{2}$ ...(2)

उदा.32. एक वलय का द्रव्यमान 0.1 किग्रा तथा त्रिज्या 0.08 मीटर हैं। उस अक्ष के सापेक्ष जो इसके केन्द्र से गुजरे तथा तल में स्थित हो, वलय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

हल– वलय का जड़त्व आघूर्ण उसके व्यास के सापेक्ष ज्ञात करना है।

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

दिया गया है– M = 0.1 किग्रा. तथा R = 0.08 मीटर

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2} \times 0.1 \times 0.08 \times 0.08$$

$$= 3.2 \times 10^{-4} \text{ किग्रा–मीटर}^2$$

उदा.33. एक वलय का उसके अक्ष के अनुदिश जड़त्व आघूर्ण 8 मात्रक है। वलय का उसके तल में स्थित व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

(पुस्तक का उदाहरण 7.19)

हल: दिया गया है :

वलय का उसके अक्ष के अनुदिश जड़त्व आघूर्ण I = 8 मात्रक

अर्थात् $I = MR^2 = 8$ मात्रक

∴ वलय का उसके तल में स्थित व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$= \frac{MR^2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ मात्रक}$$

7.15 वृत्ताकार चकती (डिस्क) का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of a Circular Disc)

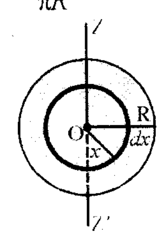
(a) चकती के केन्द्र से पारित तथा तल के लम्बवत् अक्ष (स्वयं की अक्ष) के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis passing through the centre of the disc and perpendicular to the plane to the disc)

कागज के तल में स्थित M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की एक ठोस चकती प्रदर्शित है जिसका केन्द्र O है।

चकती का क्षेत्रफल = πR^2

∴ चकती के प्रति एकांक क्षेत्रफल का द्रव्यमान

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \quad ...(1)$$



चित्र 7.41

चकती के तल के लम्बवत् तथा केन्द्र से पारित अक्ष ZZ' के सापेक्ष चकती को विभिन्न वलयों से बना माना जा सकता है।

अतः वलय जिसकी त्रिज्या x तथा मोटाई 'dx' हो तो

वलय का क्षेत्रफल = परिधि × चौड़ाई

$= 2\pi x dx$

वलय का द्रव्यमान

$$dm = (2\pi x dx)\sigma$$

अतः वलय का ZZ' अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$dI = (dm)x^2$$

$$dI = (2\pi x dx.\sigma)x^2$$

समाकलन करने पर

$$I = \int dI = \int_0^R 2\pi x^3 dx\sigma$$

$$I = 2\pi\sigma\int_0^R x^3 dx$$

$$I = 2\pi\sigma\left[\frac{x^4}{4}\right]_O^R$$

$$I = 2\pi\sigma\left[\frac{R^4}{4}\right]$$

समीकरण (1) से σ का मान रखने पर

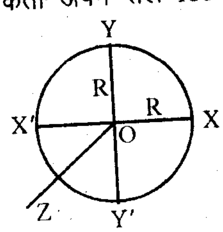
$$I = \frac{2\pi \times M}{\pi R^2} \times \frac{R^4}{4}$$

$$I = \frac{MR^2}{2} \quad \ldots(2)$$

घूर्णन त्रिज्या $K = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ...(3)

(b) चकती का व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about a diameter of the disc)

चकती के तल में स्थित दो समकोणिक व्यास XOX' तथा YOY' प्रदर्शित है जिनके सापेक्ष चकती का जड़त्व आघूर्ण क्रमशः I_x तथा I_y है। चकती अपने तल XY में सममित है।



चित्र 7.42

अतः $I_x = I_y = I_d$

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

समकोणिक अक्षों की प्रमेय से

$$I_z = I_x + I_y$$

$$I = I_d + I_d = 2I_d$$

$$2I_d = \frac{MR^2}{2}$$

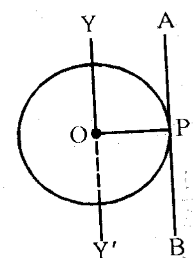
$$I_d = \frac{MR^2}{4} \quad \ldots(1)$$

आघूर्ण त्रिज्या $K = \frac{R}{2}$ ...(2)

(c) चकती के तल में स्थित स्पर्श रेखीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis parallel to one of the diameters and touching the disc)

केन्द्र O से पारित अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (जब अक्ष तल में स्थित हो तो)

$$I_G = \frac{MR^2}{4}$$



चित्र 7.43

समान्तर अक्षों की प्रमेय से स्पर्श रेखीय अक्ष APB के प्रति जड़त्व आघूर्ण– $I = I_G + MR^2$

$$I = \frac{MR^2}{4} + MR^2$$

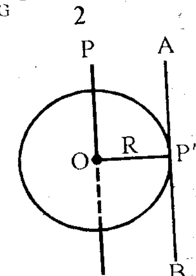
$$I = \frac{5}{4}MR^2 \quad (1)$$

घूर्णन त्रिज्या $K = \frac{\sqrt{5}R}{2}$ (2)

(d) चकती के तल के लम्बवत् स्थित स्पर्श रेखीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis tangential to the disc and perpendicular to the plane of the disc)

केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I_G = \frac{MR^2}{2}$$



चित्र 7.44

समान्तर अक्ष प्रमेय से

$$I = I_G + Md^2 \quad d = R$$

$$I = \frac{MR^2}{2} + MR^2$$

$$I = \frac{3}{2}MR^2 \quad \ldots(1)$$

घूर्णन त्रिज्या

$$K = R\sqrt{\frac{3}{2}}$$

उदा.34. 0.2 मीटर त्रिज्या और 2 किग्रा. द्रव्यमान की एक चकती स्वयं के अक्ष के परितः परिभ्रमण कर रही है। चकती का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

हल: स्वयं के अक्ष के परितः चकती का जड़त्व आघूर्ण,

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

दिया गया है–

M = 2 किग्रा., R = 0.2 मीटर

$$\therefore \quad I = \frac{1}{2} \times 2 \times 0.2 \times 0.2$$

= 0.04 किग्रा–मीटर^2

उदा.35. धातु की बनी दो चकतियों के द्रव्यमान व मोटाई समान हो परन्तु घनत्व भिन्न–भिन्न हों तो किस चकती का जड़त्व आघूर्ण उसकी अक्ष के परितः अधिक होगा? (पुस्तक का उदाहरण 7.21)

हल: माना चकतियों की त्रिज्याएँ क्रमशः R_1 व R_2 तथा धातुओं के घनत्व क्रमशः d_1 व d_2 है।

∴ चकतियों का द्रव्यमान

$$M = \pi R_1^2 t d_1 = \pi R_2^2 t d_2$$

t दोनों चकतियों की मोटाई है।

$$\therefore \quad \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{d_2}{d_1}$$

स्वय की अक्ष के प्रति चकतियों का जड़त्व आघूर्ण

$$I_1 = \frac{1}{2}MR_1^2$$

तथा

$$I_2 = \frac{1}{2}MR_2^2$$

$$\therefore \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{d_2}{d_1}$$

या

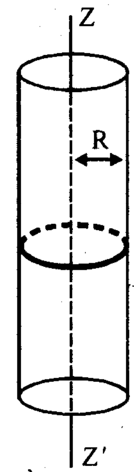
$$I \propto \frac{1}{d}$$

अर्थात् जिस चकती का घनत्व कम होगा उसका स्वयं की अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण अधिक होगा।

7.16 ठोस बेलन का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of a solid cylinder)

(a) बेलन के अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis)

बेलन का ZZ' अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना हैं। बेलन अनेक समाक्षीय डिस्कों के रूप में विभाजित किया जा सकता है। यदि ऐसी किसी चकती जिसका द्रव्यमान dm है तो उसका दी गई अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण



चित्र 7.45–बेलन का जड़त्व आघूर्ण

$$dI = \frac{1}{2}(dm)R^2$$

बेलन का उसकी अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण

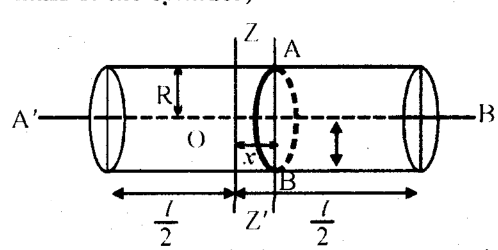
$$I = \sum \frac{1}{2}(dm)R^2$$

$$= \frac{1}{2}R^2 \sum dm$$

$$= \frac{1}{2}MR^2$$

$$I = \frac{MR^2}{2} \quad \ldots(1)$$

(b) बेलन की लम्बाई के लम्बवत् तथा इसके द्रव्यमान केन्द्र से जाने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis perpendicular to the length and passing through centre of mass of the cylinder)



चित्र 7.46 : बेलन की लम्बाई के लम्बवत् तथा इसके द्रव्यमान केन्द्र से जाने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

माना एक ठोस बेलन जिसकी लम्बाई l तथा त्रिज्या R है। बहुत सी छोटी–छोटी चकतियों से मिलकर बना है। सभी चकतियों की त्रिज्या समान है। ZZ' अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात

करना है। ZZ' अक्ष से 'x' दूरी पर 'dx' मोटाई की एक पतली चकती की कल्पना करते है। एकांक लम्बाई के बेलन का द्रव्यमान $\frac{M}{l}$ होगा तब चकती का द्रव्यमान dm हो तो

$$dm = \left(\frac{M}{l}\right)dx$$

दी गयी अक्ष ZZ' के समान्तर चकती के द्रव्यमान केन्द्र से पारित अक्ष व्यास AB होगी। अतः व्यास AB के सापेक्ष चकती का जड़त्व आघूर्ण

$$(dI)_0 = (dM)\,\frac{R^2}{4}$$

$$= \frac{M}{l}dx\frac{R^2}{4}$$

समान्तर अक्षों के प्रमेय से ZZ' अक्ष के सापेक्ष चकती का जड़त्व आघूर्णः

$$dI = (dI)_0 + (dM)x^2$$

$$= \frac{MR^2}{4l}dx + \frac{M}{l}dx.x^2$$

$$dI = \frac{M}{l}\left(\frac{R^2}{4}+x^2\right)dx$$

सम्पूर्ण बेलन के लिए जड़त्व आघूर्ण उपरोक्त समीकरण का $x = 0$ से $x = l/2$ के मध्य समाकलन का दुगुना करके ज्ञात किया जा सकता है।

$$I = 2\int_0^{\frac{l}{2}} dI$$

$$I = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M}{l}\left(\frac{R^2}{4}+x^2\right)dx$$

$$I = \frac{2M}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{R^2}{4}+x^2\right)dx$$

$$I = \frac{2M}{l}\left(\frac{R^2x}{4}+\frac{x^3}{3}\right)_0^{\frac{l}{2}}$$

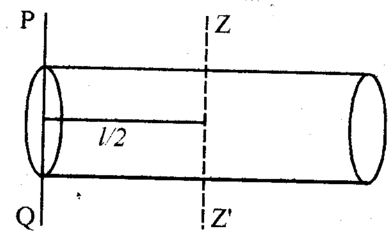
$$= \frac{2M}{l}\left(\frac{R^2l}{8}+\frac{l^3}{24}\right)$$

$$= \frac{2M}{l}\times\frac{R^2l}{8}+\frac{2Ml^3}{l\times 24}$$

$$I = M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right) \qquad ...(1)$$

(c) बेलन के एक फलक के व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about a diameter of a face of the cylinder)

बेलन का PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। समान्तर अक्षों की प्रमेय से–



चित्र 7.47

$$I = I_G + Md^2$$

$$\because \quad I_G = M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$$

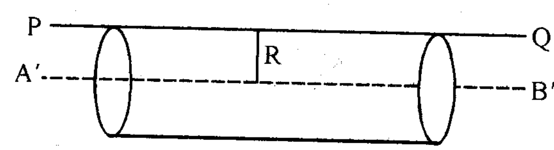
तथा $\quad d = \frac{l}{2}$

$$\therefore \quad I = M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)+\frac{Ml^2}{4}$$

$$I = M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{3}\right) \qquad ...(1)$$

घूर्णन त्रिज्या $\quad K = \sqrt{\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{3}} \qquad ...(2)$

(d) बेलन के अक्ष के समान्तर स्पर्श रेखीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about tangential axis parallel to the axis of the cylinder)



चित्र 7.48

बेलन का PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$$I = I_G + Md^2$$

$$\because \quad I_G = \frac{MR^2}{2}$$

तथा $\quad d = R$

$$\therefore \quad I = \frac{MR^2}{2}+MR^2$$

$$I = \frac{3}{2}MR^2 \qquad ...(1)$$

घूर्णन त्रिज्या $\quad K = R\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad ...(2)$

उदा.36. एक ठोस बेलन का द्रव्यमान 1 किग्रा., त्रिज्या 0.05 मीटर व लम्बाई 0.10 मीटर है, तो इसके लम्बाई के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

ज्ञात कीजिए।

हल: ठोस बेलन का लम्बाई के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I = M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{l^2}{12}\right)$$

दिया गया है– M = 1 किग्रा., R = 0.05 मीटर, l = 0.10 मीटर

$$\therefore \quad I = 1\left(\frac{0.05^2}{4}+\frac{0.10^2}{12}\right)$$

$$= 14.58 \times 10^{-4} \text{ किग्रा.–मीटर}^2$$

उदा. 37. एक M द्रव्यमान, R त्रिज्या, L लम्बाई के ठोस बेलन का स्वयं की अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण उसकी लम्बाई के लम्बवत् तथा केन्द्र से पारित अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण के समतुल्य है। L / R का मान ज्ञात कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 7.22)

हल: बेलन का स्वयं के अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण,

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

तथा लम्बाई के लम्बवत् तथा द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण,

$$I' = M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right)$$

दिया गया है– I = I'

$$\therefore \quad \frac{1}{2}MR^2 = M\left(\frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right)$$

या $$\frac{R^2}{4} = \frac{L^2}{12}$$

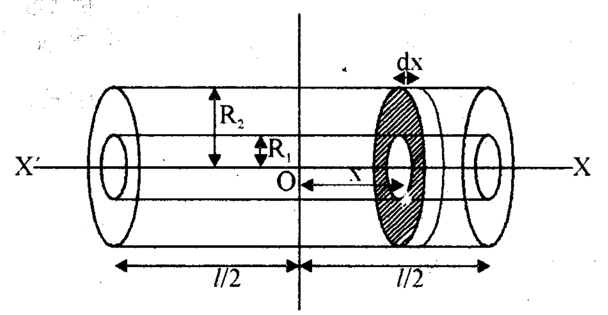
$$R = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

या $$\frac{L}{R} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

अतः बेलन की लम्बाई तथा त्रिज्या का अनुपात $\sqrt{3}:1$ होगा।

उदा. 38. सिद्ध कीजिये कि किसी खोखले बेलन का उसके अक्ष के सममित जड़त्व आघूर्ण का मान $I = \frac{M}{2}(R_1^2+R_2^2)$ होता है। (जहाँ M खोखले बेलन का द्रव्यमान, R_1 व R_2 बेलन की क्रमशः भीतरी व बाहरी त्रिज्या है।) (पुस्तक का उदाहरण 7.23)

हल: चित्रानुसार एक खोखला बेलन प्रदर्शित है जिसकी लम्बाई l, द्रव्यमान M, आन्तरिक त्रिज्या R_1 व बाह्य त्रिज्या R_2 है। बेलन की एकांक लम्बाई का द्रव्यमान = $\frac{M}{l}$ तथा घनत्व $\rho = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)l}$ होगा।



चित्र 7.49

बेलन के केन्द्र से x दूरी पर dx लम्बाई, y त्रिज्या तथा dy मोटाई के वलय का XOX' अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$= \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)l} \times 2\pi dx\, y dy \times y^2$$

$\therefore$ R_1 से R_2 त्रिज्याओं के बीच की वलयाकार चकती का XOX' अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{M\,dx}{\pi(R_2^2 - R_1^2)l} \times 2\pi y dy \times y^2$$

$$= \frac{2M dx}{(R_2^2 - R_1^2)l}\left(\frac{y^4}{4}\right)_{R_1}^{R_2} = \frac{M}{2}\frac{(R_1^2 + R_2^2)dx}{l}$$

अब सम्पूर्ण खोखले बेलन का उसकी ज्यामितीय अक्ष XOX' के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{M}{2}\left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{l}\right)dx$$

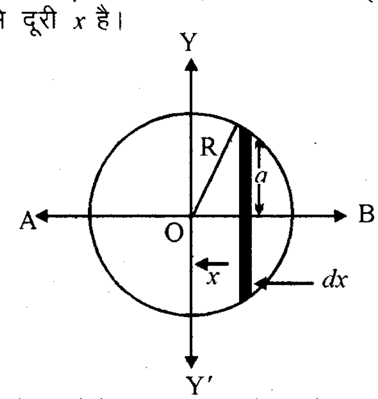
$$I = \frac{M}{2}\frac{(R_1^2 + R_2^2)}{l}(x)_{-l/2}^{+l/2} = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2) \quad ...(1)$$

7.17 ठोस गोले का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of a solid sphere)

(a) ठोस गोले का उसके व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. of a solid sphere about a diameter)

माना एक ठोस गोला है जिसकी त्रिज्या R तथा द्रव्यमान M है। यदि केन्द्र O हो तो व्यास AB के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। हम गोले को व्यास AB के लम्बवत् समान्तर पृष्ठ वाली चकतियों में विभाजित कर सकते है। जिनकी दूरियाँ केन्द्र O से –R से +R तक होगी।

माना एक चकती है जिसकी मोटाई dx तथा इसकी केन्द्र से दूरी x है।



चित्र 7.50–ठोस गोले का व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

अतः चकती की त्रिज्या

$$a = \sqrt{R^2 - x^2}$$

चकती का आयतन

$$V = \pi(R^2 - x^2)\, dx$$

गोले का घनत्व $\rho = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{3M}{4\pi R^3}$ ...(1)

चकती का द्रव्यमान $(dm) = \rho\pi(R^2 - x^2)\,dx$ ...(2)

AB अक्ष के पारितः (चकती की स्वयं की अक्ष) चकती का जड़त्व आघूर्ण

$$dI = \frac{1}{2} dm (R^2 - x^2)$$

$$dI = \frac{1}{2}\pi\rho(R^2 - x^2)^2\, dx \quad ...(3)$$

∴ AB व्यास के सापेक्ष सम्पूर्ण गोले का जड़त्व आघूर्ण

$$I = 2\int_0^R dI$$

$$I = 2\int_0^R \frac{1}{2}\pi\rho(R^2 - x^2)^2\, dx$$

$$I = \pi\rho\int_0^R (R^4 + x^4 - 2R^2x^2)\,dx$$

$$= \pi\rho\left[R^4 \cdot x + \frac{x^5}{5} - 2R^2 \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^R$$

$$= \pi\rho\left[R^5 + \frac{R^5}{5} - \frac{2R^5}{3}\right]$$

$$= \pi\rho R^5\left[1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right]$$

$$= \pi\rho R^5\left[\frac{8}{15}\right]$$

समीकरण (1) से ρ का मान रखने पर

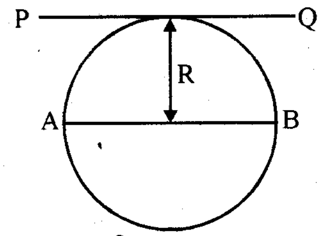
$$I = \frac{3M}{4\pi R^3} \times \pi R^5 \times \frac{8}{15}$$

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \quad ...(5)$$

घूर्णन त्रिज्या $K = \sqrt{\frac{2}{5}}R$

(b) स्पर्श रेखीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. of a solid sphere about a tangent to the sphere)

PQ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। इसके समान्तर तथा द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष व्यास AB है। अतः समान्तर अक्षों की प्रमेय से



चित्र 7.51

$$I = I_G + Md^2$$

∵ $I_G = \frac{2}{5}MR^2$

तथा $d = R$

$$I = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2$$

$$= \frac{7}{5}MR^2$$

$$I = \frac{7}{5}MR^2 \quad ...(1)$$

घूर्णन त्रिज्या $K = \sqrt{\frac{7}{5}}R$ ...(2)

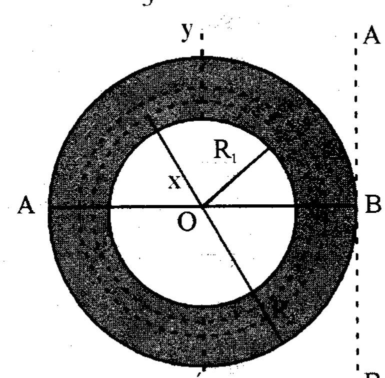
7.18 खोखले गोले का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of a Hollow Sphere)

(a) खोखले गोले का व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. of a hollow sphere about a diameter):

चित्र में एक खोखला गोला दर्शाया गया है जिसकी आन्तरिक त्रिज्या R_1 तथा बाह्य त्रिज्या R_2 है। हमें इस खोखले गोले के केन्द्र O से गुजरते व्यास AB के परितः जड़त्व आघूर्ण की गणना करनी है। यदि खोखले गोले का द्रव्यमान M हो तो गोले का घनत्व

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)$$



चित्र 7.52

इस खोखले गोले को अनेक संकेन्द्रीय पतले गोलीय खोलों से मिलकर बना माना जा सकता है। माना एक ऐसी ही पतले गोलीय खोल की त्रिज्या x तथा मोटाई dx है तो इस गोलीय खोल का आयतन $= 4\pi x^2 dx$ तथा गोलीय खोल का द्रव्यमान $dm = 4\pi x^2\, dx\, \rho$

समी. (1) की सहायता से

$$dm = 4\pi x^2\, dx \times \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)} = \frac{3Mx^2 dx}{(R_2^3 - R_1^3)}$$

∵ पतले खोल का इसके व्यास के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$= \frac{2}{3} \times \text{द्रव्यमान} \times (\text{त्रिज्या})^2 = \frac{2}{3} \times dm \times x^2$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{3Mx^2 dx}{(R_2^3 - R_1^3)} \times x^2 = \frac{2M}{(R_2^3 - R_1^3)} x^4 dx$$

अब सम्पूर्ण खोखले गोले का जड़त्व आघूर्ण उपरोक्त व्यंजक को x के मान $x = R_1$ से $x = R_2$ तक समाकलित करके प्राप्त किया जा सकता है। अत: सम्पूर्ण खोखले गोले का व्यास AB के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2Mx^4 dx}{(R_2^3 - R_1^3)} = \frac{2M}{(R_2^3 - R_1^3)}\left(\frac{x^5}{5}\right)_{R_1}^{R_2}$$

$$I = \frac{2M}{5(R_2^3 - R_1^3)}(R_2^5 - R_1^5) = \frac{2M}{5}\left(\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}\right) \quad ...(2)$$

स्थिति: यदि उपरोक्त व्यंजक में $R_1 = 0$ तथा $R_2 = R$ रखें तो ठोस गोले का व्यास के परित: जड़त्व आघूर्ण $I = \frac{2}{5}MR^2$

(b) खोखले गोले का स्पर्श रेखीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. of a hollow sphere about a tangent to the sphere):

समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$$I_{AB} = I_{yy'} + MR_2^2$$

$$I_{AB} = \frac{2}{5}M\left(\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}\right) + MR_2^2$$

7.19 छड़ का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of a Rod)

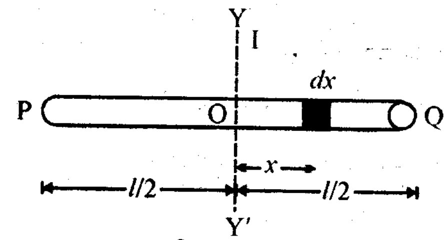
(1) पतली छड़ (Thin rod)

(a) लम्बाई के लम्बवत् केन्द्र गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis passing through the centre and perpendicular to its length)

एक समान पतली छड़ जिसका द्रव्यमान M एवं लम्बाई l है। इसके केन्द्र O से पारित एवं लम्बाई के लम्बवत् घूर्णन अक्ष YY' है। अक्ष YY' से x दूरी पर dx मोटाई का एक अल्पांश लेते है। छड़ का एकांक लम्बाई का द्रव्यमान $\left(\frac{M}{l}\right)$ होगा। YY' अक्ष के सापेक्ष अल्पांश का जड़त्व आघूर्ण

$$dI = \left(\frac{M}{l}dx\right)x^2 \quad ...(1)$$

YY' अक्ष के सापेक्ष सम्पूर्ण छड़ का जड़त्व आघूर्ण उपरोक्त समीकरण का $x = 0$ से $x = l/2$ के मध्य समाकलन का दुगुना करके ज्ञात किया जा सकता है।



चित्र 7.53

$$I = 2\int_0^{l/2} dI$$

$$I = 2\int_0^{l/2}\left(\frac{M}{l}dx\right)x^2$$

$$I = \frac{2M}{l}\int_0^{l/2} x^2\, dx$$

$$I = \frac{2M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

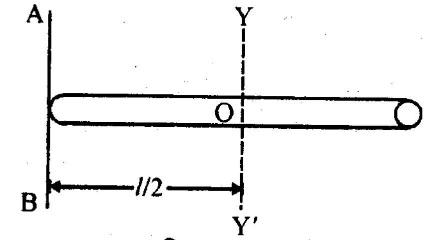
$$I = \frac{2M}{l} \times \frac{1}{3} \times \frac{l^3}{8}$$

$$I = \frac{Ml^2}{12} \quad ...(1)$$

घूर्णन त्रिज्या $K = \frac{l}{\sqrt{12}}$ ...(2)

(b) लम्बाई के लम्बवत् तथा किनारे से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis perpendicular to the length and passing through one edge)

छड़ का AB अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। समान्तर अक्षों की प्रमेय से



चित्र: 7.54

$$I = I_G + Md^2$$

$$\because \quad I_G = \frac{Ml^2}{12}$$

तथा $d = \frac{l}{2}$

$$I = \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$= \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4}$$

$$I = \frac{Ml^2}{3} \quad ....(1)$$

घूर्णन त्रिज्या $K = \frac{l}{\sqrt{3}}$ ...(2)

उदा.39. 0.2 किग्रा. द्रव्यमान तथा 1 मीटर लम्बाई की पतली छड़ को उसके केन्द्र से गुजरने वाली व लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के परितः घूर्णित किया जाता है। छड़ की घूर्णन त्रिज्या ज्ञात करो।

हल: पतली छड़ का जड़त्व आघूर्ण,

$$I = M\frac{l^2}{12} \text{ परन्तु } I = MK^2$$

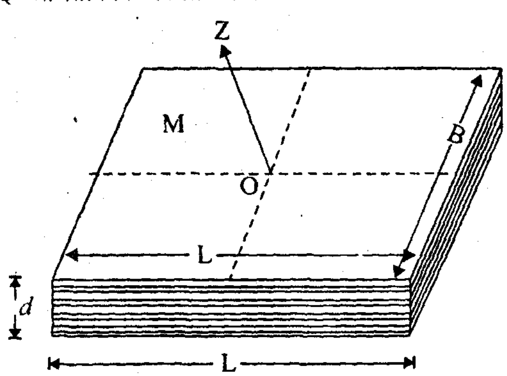
$\therefore$ घूर्णन त्रिज्या $K = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{l^2}{12}} = \frac{l}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}$ मी.

$= 0.29$ मी.

(2) आयताकार अनुप्रस्थ काट की ठोस छड़ (Solid rod of rectangular cross section)

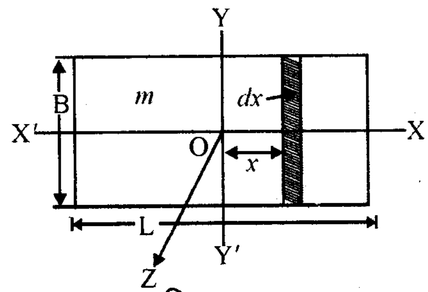
(a) लम्बाई के लम्बवत् तथा द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M.I. about an axis passing through the centre of mass and perpendicular to its length)

चित्र में एक आयताकार ठोस छड़ प्रदर्शित की गयी है। जिसकी लम्बाई L, चौड़ाई B, मोटाई d तथा द्रव्यमान M है। यह छड़ कई आयताकार पटलों से मिलकर बनी मानी जा सकती है।



चित्र 7.55

अतः एक पटल (lamina) का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करेगें। माना एक आयताकार पटल का द्रव्यमान m है एवं YY' अक्ष से x दूरी पर dx चौड़ाई की एक आयताकार पट्टिका है। यदि पटल का एकांक क्षेत्रफल का द्रव्यमान σ हो तो पट्टी का द्रव्यमान $(Bdx)\sigma$ होगा। जबकि $\sigma = \frac{m}{BL}$ है। अतः YY' अक्ष के सापेक्ष पट्टिका का जड़त्व आघूर्ण $= (Bdx)\sigma x^2$ अतः सम्पूर्ण आयताकार पटल का YY' अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण



चित्र 7.56

$$dI_y = 2\int_0^{\frac{L}{2}} (Bdx)\sigma x^2$$

$$= 2B\sigma\int_0^{\frac{L}{2}} x^2 dx$$

$$= 2B\sigma\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{2B\sigma}{3}\left[\frac{L^3}{8}\right] \qquad \because \sigma = \frac{m}{BL}$$

$$\therefore \quad dI_y = \frac{2B}{3}\cdot\frac{m}{BL}\cdot\frac{L^3}{8}$$

$$dI_y = \frac{mL^2}{12} \quad ...(1)$$

इसी प्रकार सम्पूर्ण आयताकार पटल का XX' अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$dI_x = \frac{mB^2}{12} \quad ...(2)$$

सम्पूर्ण आयताकार पटल का Z अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण– समकोणिक अक्षों की प्रमेय से

$$dI_z = dI_x + dI_y$$

समी. (1) व (2) से

$$dI_z = \frac{mB^2}{12} + \frac{mL^2}{12}$$

$$dI_z = m\left(\frac{L^2 + B^2}{12}\right) \quad ...(3)$$

आयताकार छड़ की लम्बाई के लम्बवत् तथा द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I = \sum dI_z$$

$$= \sum m\left(\frac{L^2 + B^2}{12}\right)$$

समी. (3) से मान रखने पर

$$I = \left(\frac{L^2 + B^2}{12}\right)\sum m$$

$$I = M\left(\frac{L^2+B^2}{12}\right) \quad ...(4)$$

घूर्णन त्रिज्या–

$$K = \sqrt{\left(\frac{L^2+B^2}{12}\right)} \quad ...(5)$$

7.20 बल आघूर्ण (τ)(Torque)

एक कण पर आरोपित बल आघूर्ण–

किसी वस्तु पर आरोपित बल का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण को बल आघूर्ण कहते हैं।

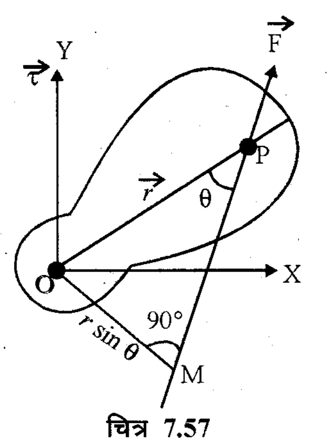
बल आघूर्ण= बल का परिमाण × आघूर्ण भुजा

बल आघूर्ण= (बल का परिमाण) × (घूर्णन अक्ष से बल की क्रिया रेखा की लम्बवत् दूरी)

घूर्णन गति में बल आघूर्ण का वही महत्व होता है जो रेखीय गति में बल का होता है। इसे प्रायः 'τ' से प्रदर्शित किया जाता है।

दिये गये चित्र में कण 'P' पर बल '$\vec{F}$' आरोपित है। जिससे यह O से पारित तथा कागज के तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष घूर्णन गति करता है। माना कण की O से दूरी 'r' है तथा आघूर्ण भुजा $r\sin\theta$ है। अतः बल आघूर्ण बल F तथा आघूर्ण भुजा $r\sin\theta$ के गुणनफल के बराबर होता है।

बल आघूर्ण τ = बल का परिमाण × आघूर्ण भुजा = बल का परिमाण × घूर्णन अक्ष से बल की क्रिया रेखा (line of action) की लम्बवत् दूरी



चित्र 7.57

$$\tau = F\,(OM)$$
$$= Fr\sin\theta$$
$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} \quad ....(1)$$

स्थिति–I यदि $\theta = 0^0$ हो तो बल आघूर्ण का मान शून्य अथवा न्यूनतम होगा।

$\because \quad \sin 0° = 0 \quad \therefore \tau = rF\sin 0° = 0 =$ (न्यूनतम मान)

स्थिति–II यदि $\theta = 90°$ तो बल आघूर्ण अधिकतम होगा।

$\because \quad \sin 90° = 1 \quad \therefore \tau = rF\sin 90° = rF =$ (अधिकतम मान)

कणों के निकाय पर आरोपित बल आघूर्ण–यदि किसी निकाय के n- कण जिनके द्रव्यमान $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ हों तथा आरोपित बल क्रमशः $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ हों तब निकाय पर आरोपित बल आघूर्ण भिन्न–भिन्न कणों पर आरोपित बल आघूर्णो का सदिश योग होगा अर्थात्

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + ... + \vec{\tau}_n$$
$$= \vec{r}_1\times\vec{F}_1 + \vec{r}_2\times\vec{F}_2 + \vec{r}_3\times\vec{F}_3 + ... + \vec{r}_n\times\vec{F}_n$$
$$\Rightarrow \vec{\tau} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

जहाँ $\vec{r}_i$ = i वें कण का स्थिति सदिश तथा

$\vec{F}_i$ = i वें कण पर आरोपित बल

यदि बल आघूर्ण पिण्ड को दक्षिणावर्त दिशा (clock wise) घुमाता है तो यह ऋणात्मक तथा यदि पिण्ड को वामावर्त दिशा (Anti-clock wise) घुमाता है तो यह धनात्मक होता है

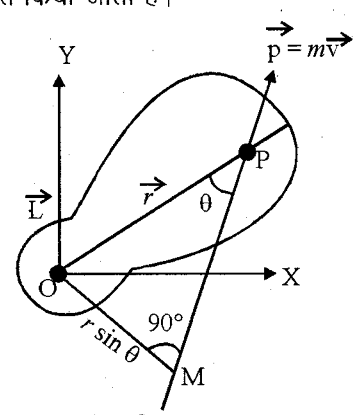
अर्थात् जितनी ज्यादा घूर्णन अक्ष से आरोपित बल की क्रिया रेखा की लम्बवत् दूरी अधिक होगी उतना ही बल आघूर्ण अधिक होगा तथा उतना ही बल कम लगाना होगा।

बल आघूर्ण के उदाहरण

- खिड़की व दरवाजों को खोलने के लिए तथा बंद करने के लिए हत्थे कब्जों से दूर लगाये जाते हैं।
- पानी निकालने के लिए हैण्डपम्प का हत्था अधिक लम्बा लिया जाता है।
- पेंच को घुमाने के लिए पेचकस का हत्था चौड़ा बनाया जाता है।
- कुम्हार के चाक को घुमाने के लिए गढ्डा परिधि के निकट होता है।

7.21 कोणीय संवेग (L) (Angular Momentum)

किसी वस्तु के रेखीय संवेग के घूर्णन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण को कोणीय संवेग कहते हैं। कोणीय संवेग का घूर्णन गति में वही महत्व होता है तो रेखीय गति में रेखीय संवेग का होता है। इसे 'L' से प्रदर्शित किया जाता है।



चित्र 7.58

माना m द्रव्यमान का एक कण रेखीय वेग $\vec{v}$ से O से पारित तथा

ऊर्ध्वाधर अक्ष के प्रति घूर्णन गति करता है। माना कण की O से दूरी 'r' है तो कण का रेखीय संवेग $\vec{p} = m\vec{v}$ कण का घूर्णन अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर रेखीय संवेग का आघूर्ण

= रेखीय संवेग × घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी

$$= (mv) \times OM$$

$$= (r \sin\theta)\, mv$$

$$L = r\, p \sin\theta\, \hat{n}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad ...(1)$$

यहाँ $\hat{n}$ दाहिने हाथ के पेंच के नियमानुसार घूर्णन अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश है।

कोणीय संवेग की इकाई $\frac{\text{किग्रा.} \times \text{मी.}^2}{\text{सेकण्ड}}$ या जूल × सेकण्ड होती है तथा विमा $[M^1L^2T^{-1}]$ होती है।

कणों के निकाय का कोणीय संवेग—यदि किसी निकाय के n-कण जिनके द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ हों तथा रेखीय संवेग क्रमशः $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, ..., \vec{p_n}$ हों तो निकाय का कोणीय संवेग भिन्न–भिन्न कणों के कोणीय संवेग का सदिश योग होता है अर्थात्

परिणामी कोणीय संवेग $\vec{L} = \vec{L_1} + \vec{L_2} + \vec{L_3} + ... + \vec{L_n}$

$$= \vec{r_1} \times \vec{p_1} + \vec{r_2} \times \vec{p_2} + \vec{r_3} \times \vec{p_3} + ... + \vec{r_n} \times \vec{p_n}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{p_i}$$

जहाँ $\vec{r_i}$ = i वें कण का स्थिति सदिश तथा

$\vec{p_i}$ = i वें कण का रेखीय संवेग

कोणीय संवेग को कार्तीय निर्देशांक पद्धति में निम्न प्रकार व्यक्त करते हैं–

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$= m\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{L} = m[\hat{i}(yv_z - zv_y) + \hat{j}(zv_x - xv_z) + \hat{k}(xv_y - yv_x)]$$

$$= \hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z$$

जहाँ $L_x = m(yv_z - zv_y)$

$L_y = m(zv_x - xv_z)$

$L_z = m(xv_y - yv_x)$

7.22 बल आघूर्ण (τ) तथा कोणीय संवेग (L) में सम्बन्ध (Relation between Torque and Angular Momentum)

1. **एकल कण के लिए**–
माना कोई m द्रव्यमान का पिण्ड घूर्णन अक्ष के सापेक्ष घूर्णन गति कर रहा है तथा निर्देश बिन्दु के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{r}$ है यदि संवेग $\vec{p}$ तथा आरोपित बल $\vec{F}$ हो तो कण पर बल आघूर्ण

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad ...(1)$$

तथा कण का कोणीय संवेग

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad ...(2)$$

समय t के सापेक्ष कोणीय संवेग का अवकलन करने पर

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$= \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}$$

परन्तु $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{v} \times \vec{p} \qquad \because \vec{p} = m\vec{v}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F} + \vec{v} \times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} + 0 \qquad \because \vec{v} \times \vec{v} = 0$$

∴ समीकरण (1) से

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad ...(3)$$

अर्थात् कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर आरोपित बल–आघूर्ण के बराबर होती है जो रेखीय गति के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम के तुल्य है।

2. **कणों के निकाय के लिए**–यदि किसी निकाय के n कण जिनके द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ स्थिति सदिश $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}, ..., \vec{r_n}$ तथा रेखीय संवेग $\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, ..., \vec{p_n}$ हों तब निकाय का कोणीय संवेग

$$\vec{L} = \vec{L_1} + \vec{L_2} + \vec{L_3} + ... + \vec{L_n}$$

$$= \vec{r_1} \times \vec{p_1} + \vec{r_2} \times \vec{p_2} + \vec{r_3} \times \vec{p_3} + ... + \vec{r_n} \times \vec{p_n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{p_i}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum^{n} \frac{d}{dt}(\vec{r_i} \times \vec{p_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r_i}\times\frac{d\vec{p_i}}{dt}+\frac{d\vec{r_i}}{dt}\times\vec{p_i}\right)$$

परन्तु $\frac{d\vec{r_i}}{dt} = \vec{v_i}$ = i वें कण का रेखीय वेग

$\vec{p_i} = m_i\vec{v_i}$ = i वें कण का रेखीय संवेग

$\frac{d\vec{p_i}}{dt} = \vec{F_i}$ = i वें कण पर बल

[गति के द्वितीय नियम से]

$$\therefore \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}[\vec{r_i}\times\vec{F_i} + (\vec{v_i}\times m_i\vec{v_i})]$$

परन्तु $\vec{v_i}\times m_i\vec{v_i} = m_i(\vec{v_i}\times\vec{v_i}) = 0$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r_i}\times\vec{F_i})$$

∵ कणों के निकाय में प्रत्येक कण पर आन्तरिक तथा बाह्य बल दोनों कार्यरत होते है। जिसमें गति के तृतीय नियमानुसार आन्तरिक बल परस्पर बराबर व विपरीत बलों के युग्मों के रूप में उत्पन्न होने से सम्पूर्ण निकाय के लिए इनके कारण बल आघूर्ण शून्य होगा अर्थात् बल आघूर्ण केवल बाह्य बलों के कारण ही होगा।

अतः $\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\times\vec{F}_{i\,(\text{आन्तरिक})} = 0$

जिससे $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\times\vec{F}_{i\,(\text{बाह्य})}$$

∵ $\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\times\vec{F}_{i\,(\text{बाह्य})} = \vec{\tau}_{(\text{बाह्य})}$ = बाह्य बलों के कारण परिणामी बल आघूर्ण

$$\therefore \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{(\text{बाह्य})}$$

अर्थात् किसी निकाय के कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर उस पर आरोपित परिणामी बाह्य बल आघूर्ण के बराबर होती है।

उदा. 40. मूल बिन्दु के परितः बल $7\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}$ का बल आघूर्ण ज्ञात कीजिये। बल जिस कण पर लगता है उसका स्थिति सदिश $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ है। (पुस्तक का उदाहरण 7.25)

हलः दिया गया है : $\vec{F} = 7\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}$

तथा $\vec{r} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

तब बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 7 & 4 & -4\end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(4-4)+\hat{j}(7+4)+\hat{k}(4+7)$$

$$= 11\hat{j} + 11\hat{k}$$

7.23 घूर्णन गतिज ऊर्जा (Rotational Kinetic Energy)

माना कि एक पिण्ड घूर्णन गति कर रहा है। इस पिण्ड के d.kkd snØeku Øe'k/ $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ तथा इनकी घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ है तथा इनके रेखीय वेग क्रमशः $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ है तथा पिण्ड के प्रत्येक कण का कोणीय वेग ω है।

गति के कारण m_1 द्रव्यमान वाले कण की गतिज ऊर्जा–

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$$

$\because v = r\omega$

$$= \frac{1}{2}m_1(r_1\omega)^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2$$

इसी प्रकार अन्य कणों के लिए

$$E_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2$$

$$E_3 = \frac{1}{2}m_3r_3^2\omega^2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$E_n = \frac{1}{2}m_nr_n^2\omega^2$$

सम्पूर्ण पिण्ड की गतिज ऊर्जा

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n$$

$$= \frac{1}{2}(m_1r_1^2\omega^2 + m_2r_2^2\omega^2 + m_3r_3^2\omega^2 + \ldots + m_nr_n^2\omega^2)$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2)$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2 I$$

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \ldots(1)$$

जहाँ $I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots + m_nr_n^2$ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण है। यदि $\omega = 1$ रेडियन/सेकण्ड हो तो

$$I = 2E \qquad \ldots(2)$$

अर्थात किसी नियत अक्ष के सापेक्ष पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण का मान संख्यात्मक रूप से घूर्णन गतिज ऊर्जा के दुगुने के बराबर होता है जबकि पिण्ड का कोणीय वेग एकांक हो।

घूर्णन गतिज ऊर्जा

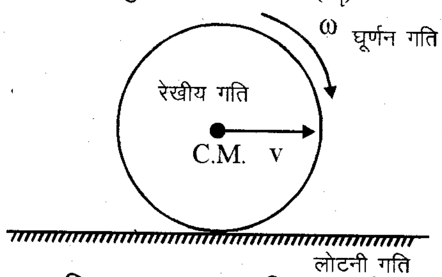
$$E = \frac{L^2}{2I} \qquad \ldots(3)$$

यदि कोई वस्तु घूर्णन गति के साथ–साथ रेखीय गति भी करती है तो कुल गतिज ऊर्जा

$$KE = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

उदाहरण–पिण्ड की लोटनी गति (rolling motion)

दूसरें शब्दों में कुल गतिज ऊर्जा (E_t) –



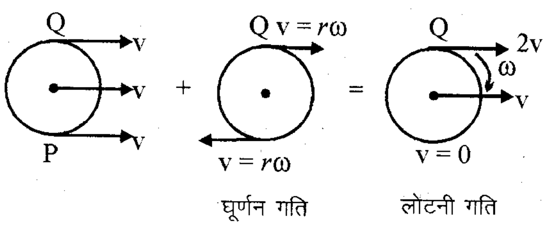
चित्र 7.59. कुल गतिज ऊर्जा

- किसी वस्तु की कुल गतिज ऊर्जा उसके रैखिक गतिज ऊर्जा व घूर्णन गतिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है अर्थात्

$$E_{roll} = E_{trans.} + E_{rot}$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

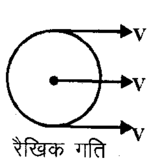
जहाँ v वस्तु के द्रव्यमान केन्द्र का वेग है।

- यह वस्तु की लोटनी गति (घूर्णन व रैखिक गति) है जब वस्तु बिना फिसले लुढ़कती है। इसे रैखिक गति व घूर्णन गति के सदिश संयोजन से निम्न प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।



चित्र 7.60

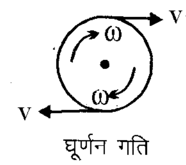
- लोटनी गति में निर्देश बिन्दु के सापेक्ष द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति व विस्थापन समयानुसार परिवर्तित होते रहते है। जैसे– लुढ़कती गेंद, वाहन का पहिया आदि।
- यदि वस्तु केवल शुद्ध रैखिक गति (बिना लुढ़के फिसलती है) कर रही हों तो कुल ऊर्जा $E_t = E_k = \frac{1}{2}mv^2$ होगी।



चित्र 7.61

उदाहरण–मनुष्य की रैखिक गति

- यदि वस्तु केवल शुद्ध घूर्णी गति (एक ही स्थान पर घूमती है) करती है तो कुल ऊर्जा $E_t = E_r = \frac{1}{2}I\omega^2$ होगी।



चित्र 7.62

उदाहरण–विद्युत पंखे की घूर्णन गति

उदा.41. 16 किग्रा. मी.^{2} तथा 4 किग्रा. मी.^{2} जड़त्व आघूर्ण वाले गतिशील दो पिण्डों की घूर्णन गतिज ऊर्जाएँ समान है। उनके कोणीय संवेगों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: किसी पिण्ड की घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

प्रथम पिण्ड के लिए $E_1 = \frac{L^2_1}{2I_1}$

द्वितीय पिण्ड के लिए $E_2 = \frac{L^2_2}{2I_2}$

दिया गया है–$E_1 = E_2$, I_1 = 16 किग्रा.–मी.^{2} I_2=4 किग्रा.–मी.^{2}

$$\therefore \quad \frac{L_1^2}{L_2^2} = \frac{I_1}{I_2}$$

या $$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = \frac{2}{1}$$

उदा.42.एक छल्ला अपने अक्ष पर $\frac{20}{\pi}$ चक्कर प्रति सेकण्ड के कोणीय वेग से घूम रहा है। छल्ले का उसके अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण 10^{-3} किग्रा.-मी.^{2} है। इसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया है– $n = \frac{20}{\pi}$ चक्कर/सेकण्ड

छल्ले का अपने अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$I = 10^{-3}$ किग्रा. × मी.^{2}

पिण्ड की घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$\because \quad \omega = 2\pi n$

$\therefore \quad \omega = 2\pi \times \frac{20}{\pi} = 40$

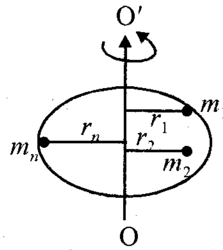
$\therefore \quad E_r = \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times (40)^2$

$= \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times 1600 = 0.8$ जूल

7.24 बल आघूर्ण (τ), जड़त्व आघूर्ण (I) तथा कोणीय त्वरण (α) में सम्बन्ध (Relation between torque, Moment of Inertia and Angular Momentum)

दिये गये चित्र में पिण्ड OO' के सापेक्ष घूर्णन गति कर

रहा है तथा तल के लम्बवत् वामावर्त दिशा में घूर्णन कर रहा है। पिण्ड के विभिन्न कणों के द्रव्यमान $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरियाँ क्रमशः $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ है। माना पिण्ड का कोणीय त्वरण α है जो कि सभी कणों पर समान है परन्तु रैखिक त्वरण भिन्न–भिन्न होगा।



चित्र 7.63

m_1 द्रव्यमान के कण का रैखिक त्वरण

$$a_1 = r_1\alpha$$
$$F_1 = m_1 a_1$$
$$F_1 = m_1 r_1 \alpha$$

इस बल का घूर्णन अक्ष के प्रति बल आघूर्ण

$$\tau_1 = F_1 \times r_1$$
$$= (m_1 r_1 \alpha) \times r_1$$
$$\tau_1 = m_1 r_1^2 \alpha$$

इसी प्रकार अन्य कणों के लिए

$$\tau_2 = m_2 r_2^2 \alpha$$
$$\tau_3 = m_3 r_3^2 \alpha$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\tau_n = m_n r_n^2 \alpha$$

यदि सभी बल आघूर्ण एक ही दिशा में हो तो परिणामी बल आघूर्ण

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n$$
$$\tau = m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + m_3 r_3^2 \alpha + \ldots + m_n r_n^2 \alpha$$
$$\tau = \alpha (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots + m_n r_n^2)$$
$$\tau = I\alpha$$

जहाँ जड़त्व आघूर्ण

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots + m_n r_n^2$$

अर्थात् किसी पिण्ड का किसी अक्ष के सापेक्ष बल आघूर्ण, उस अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण तथा उसमें उत्पन्न कोणीय त्वरण के गुणनफल के बराबर होता है।

कोणीय संवेग (L), जड़त्व आघूर्ण (I) तथा कोणीय वेग (ω) में सम्बन्ध (Relation between Angular momentum, Moment of Inertia and Angular velocity)

माना कि कोई पिण्ड आघूर्ण अक्ष के परितः कोणीय वेग ω से घूर्णन गति कर रहा है। पिण्ड के सभी कणों के रेखीय वेग भिन्न–भिन्न तथा कोणीय वेग समान होगा।

माना कि पिण्ड के कणों के द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ है, घूर्णन अक्ष से कणों की लम्बवत् दूरियाँ क्रमशः $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ है तथा रेखीय वेग क्रमशः $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ है।

m_1 द्रव्यमान के कण का रेखीय संवेग

$$p_1 = m_1 v_1$$

$\because$ $$v_1 = r_1\omega$$

$\Rightarrow$ $$p_1 = m_1 r_1 \omega$$

कोणीय संवेग $$L_1 = r_1 p_1 = r_1 m_1 r_1 \omega$$

$$L_1 = m_1 r_1^2 \omega$$

वस्तु के समस्त कणों के द्रव्यमानों के संवेग के आघूर्णों का योग सम्पूर्ण वस्तु के कोणीय संवेग के बराबर होता है।

$\therefore$ पिण्ड का कोणीय संवेग

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n$$
$$L = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + m_3 r_3^2 \omega + \ldots + m_n r_n^2 \omega$$
$$L = \omega (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots + m_n r_n^2)$$
$$L = I\omega$$

जहाँ $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots + m_n r_n^2$ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण है।

इस प्रकार किसी पिण्ड का किसी अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग उसके उसी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण व उसके कोणीय वेग के गुणनफल के बराबर होता है।

7.25 कोणीय संवेग संरक्षण का नियम (Law of Conservation of Angular momentum)

- किसी कण के कोणीय संवेग में समय के साथ होने वाले परिवर्तन की दर उस समय कार्य करने वाले बल आघूर्ण के बराबर होती है।

अतः $$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

यहाँ $\vec{\tau}$ बल आघूर्ण, $\vec{L}$ कोणीय संवेग

यदि बल आघूर्ण अनुपस्थित हो अर्थात् $\vec{\tau} = 0$

तब $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ अथवा $\vec{L}$ = नियतांक (Constant)

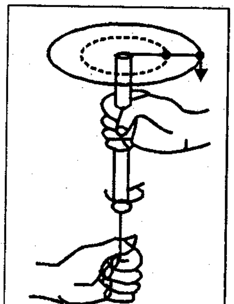
या $I\vec{\omega}$ = नियतांक

अतः बल आघूर्ण की अनुपस्थिति के कण का कोणीय संवेग नियत रहता है अर्थात् यदि बाह्य बल आघूर्ण लगाये बिना निकाय का जड़त्व आघूर्ण परिवर्तित कर दिया जाये तो उसका कोणीय वेग इस प्रकार बदलेगा कि कोणीय संवेग नियत रहे।

उदाहरण-

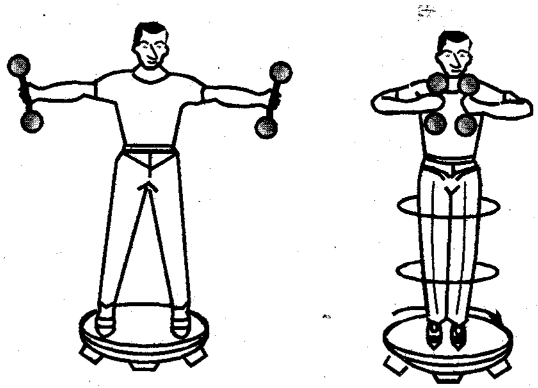
(i) चित्र के अनुसार धागे के सिरे पर गेंद बाँधकर तथा दूसरा सिरा एक उर्ध्वाधर नली में से निकालकर हाथ में पकड़कर गेंद को तेजी से वृत्ताकार पथ में घुमाया जाता है। अब यदि धागे को खींच कर वृत्ताकार पथ की त्रिज्या कम कर दें तो हम देखते है कि गेंद पहले से अधिक तेजी से घूमती है।

इसका कारण त्रिज्या कम होने पर गेंद का जड़त्व आघूर्ण कम होगा तथा कोणीय वेग का मान बढ़ जायेगा।



चित्र 7.64

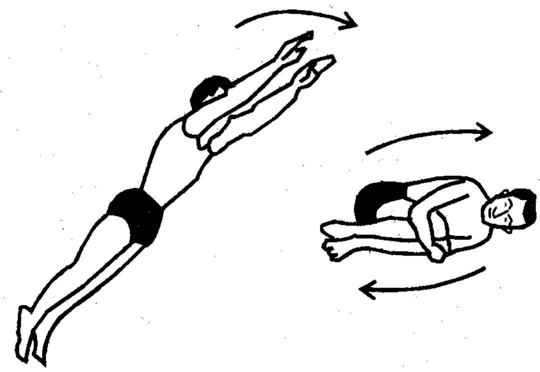
(ii) चित्र के अनुसार–एक व्यक्ति अपने दोनों हाथों को फैलाकर भारी डम्बल लिए घूमते हुए मंच पर खड़ा है। व्यक्ति को किसी कोणीय वेग से घूर्णन कराया जाता है। जब व्यक्ति अपनी भुजाओं को चित्रानुसार समेट लेता है। तब उसका जड़त्व आघूर्ण कम होने से उसका कोणीय वेग अधिक हो जाता है।



(i) (ii)

चित्र 7.65

(iii) जब कोई गोताखोर ऊपर से जल में कूदता है तो वह सीधे कूदने के बजाय हवा में अपने शरीर को मोड़ते हुए कूदता है। [चित्र] गोताखोर जितना अधिक अपने शरीर को मोड़ लेता है, हवा में वह उतनी ही अधिक कलैयाँ लेते हुए पानी में अधिक गहराई तक जा सकता है। कूदने पर गोताखोर अपने में से गुजरते हुए क्षैतिज अक्ष के परितः घूर्णन भी करता है। शरीर को मोड़ लेने पर इस अक्ष के परितः उसका जड़त्व–आघूर्ण I घट जाता है, अतः संवेग–संरक्षण के नियम के अनुसार उसका कोणीय वेग ω बढ़ जाता है। जिससे वह कलैयाँ लेता हुआ पानी में कूदता है।



चित्र-7.66

- मुक्त कण का कोणीय संवेग सदैव नियत रहता है।
- केन्द्रीय बल क्षेत्र में परिभ्रमण कर रहें ग्रहों या उपग्रहों का कोणीय संवेग सदैव नियत रहता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

पृथ्वी की त्रिज्या परिवर्तन का उसके आवर्तकाल पर प्रभाव–

पृथ्वी का कोणीय संवेग

$$L = I\omega = \text{नियतांक}$$

$$L = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T} = \text{नियतांक}$$

$$T \propto R^2 \text{ [यदि M नियत हो]}$$

रैखिक तथा घूर्णन गतियों की तुलनात्मक सारणी (Comparison between Linear and Rotational Motion)

	रैखिक गति	घूर्णन गति
1.	जड़त्व या द्रव्यमान या जड़त्वीय द्रव्यमान (M)	जड़त्व आघूर्ण $I = MR^2$
2.	विस्थापन $\vec{s}$ व $\vec{r}$	कोणीय विस्थापन θ
3.	**रैखिक वेग (v)** $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	**कोणीय वेग (ω)** $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$
4.	**रैखिक त्वरण (*a*)** $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$	**कोणीय त्वरण (α)** $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$
5.	**रैखिक संवेग (p)** (i) $\vec{p} = m\vec{v}$ (ii) $p = \sqrt{2mE_k}$	**कोणीय संवेग (L)** (i) $\vec{L} = I\vec{\omega}$ (ii) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (iii) $L = \sqrt{2IE_r}$

	रैखिक गति	घूर्णन गति
6.	**बल (F)** (i) $\vec{F}=m\vec{a}$ (ii) $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$	**बल आघूर्ण (τ)** (i) $\vec{\tau}=I\vec{\alpha}$ (ii) $\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt}$ (iii) $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$
7.	**कार्य (W)** (i) $W=\vec{F}\cdot\vec{s}=\int\vec{F}\cdot d\vec{s}$ (ii) $W=\frac{1}{2}M(v_2^2-v_1^2)$	**कार्य (W_r)** (i) $W_r=\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}=\int\vec{\tau}\cdot d\vec{\theta}$ (ii) $W_r=\frac{1}{2}I(\omega_2^2-\omega_1^2)$
8.	**रैखिक आवेग** $\vec{F}\cdot(dt)=\Delta\vec{p}$	**कोणीय आवेग** $\vec{\tau}\cdot(dt)=\Delta\vec{L}$
9.	**शक्ति (P)** (i) $P=\frac{dW}{dt}$ (ii) $P=\vec{F}\cdot\vec{v}$	**घूर्णन शक्ति (P_r)** (i) $P_r=\frac{dW_r}{dt}$ (ii) $P_r=\vec{\tau}\cdot\vec{\omega}$
10.	**रैखिक गतिज ऊर्जा (E*k*)** (i) $E_k=\frac{1}{2}Mv^2$ (ii) $E_k=\frac{P^2}{2M}$	**घूर्णन गतिज ऊर्जा (E*r*)** (i) $E_r=\frac{1}{2}I\omega^2$ (ii) $E_r=\frac{L^2}{2I}$
11.	**रेखीय गति में न्यूटन के नियम-** (i) प्रथम नियम जब $F=0$ है तब $v=$ नियत (ii) द्वितीय नियम $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt},\vec{F}=m\vec{a}$ (iii) तृतीय नियम $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$	**घूर्णन गति में न्यूटन के नियम-** (i) प्रथम नियम जब $\tau=0$ है तब $\omega=$ नियत (ii) द्वितीय नियम $\vec{\tau}=\frac{d\vec{L}}{dt},\vec{\tau}=I\vec{\alpha}$ (iii) तृतीय नियम $\vec{\tau}_{12}=-\vec{\tau}_{21}$
12.	n वें सेकण्ड में तय की गई दूरी $s_n=u+\frac{1}{2}a(2n-1)$	n वें सेकण्ड में तय किया गया कोण $\theta_n=\omega_0+\frac{1}{2}\alpha(2n-1)$
13.	रैखिक गति के समीकरण (i) $v=u+at$ (ii) $s=ut+\frac{1}{2}at^2$ (iii) $v^2=u^2+2as$	घूर्णन गति के समीकरण (i) $\omega=\omega_0+\alpha t$ (ii) $\theta=\omega_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$ (iii) $\omega^2=\omega_0^2+2\alpha\theta$

उदा. 43. एक 5 kg द्रव्यमान तथा 0.4 m व्यास के रिंग को उसके अक्ष के चारों ओर घुमाया जाता है। यह 2100 चक्कर प्रति मिनट लगाता है। निम्न का परिकलन करो–
(i) जड़त्व आघूर्ण (ii) कोणीय संवेग
(iii) घूर्णन गतिज ऊर्जा (पुस्तक का उदाहरण 7.18)

हल: दिया गया है: $M=5\text{kg},\ R=\frac{0.4}{2}=0.2\text{ m},\ n=2100\ \frac{\text{चक्कर}}{\text{मिनट}}=$

$$\frac{2100}{60}\ \frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}}=35\ \frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}}$$

(i) जड़त्व आघूर्ण $I=MR^2$

$$I=5(0.2)^2=0.2\text{ kg}\times\text{m}^2$$

(ii) कोणीय संवेग $L=I\omega=I(2\pi n)$

$$L=0.2\times2\pi\times35=44\ \frac{\text{kg}\times\text{m}^2}{\text{s}}$$

(iii) घूर्णन गतिज ऊर्जा $=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}I(2\pi n)^2$

$$=\frac{1}{2}\times0.2\left(2\times\frac{22}{7}\times35\right)^2=4840\text{ जूल}$$

उदा. 44. एक वृत्ताकार चकती जिसकी त्रिज्या 0.5 m एवं द्रव्यमान 25 kg है अपनी धुरी पर 120 चक्कर/मिनट की रफ्तार से घूर्णन करती है। चकती का जड़त्व आघूर्ण एवं घूर्णन की गतिज ऊर्जा का परिकलन कीजिये। (पुस्तक का उदाहरण 7.20)

हल: दिया गया है: $R=0.5\text{ m},M=25\text{ kg},n=120\ \frac{\text{चक्कर}}{\text{मिनट}}=\frac{120}{60}\ \frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}}$

$$=2\ \frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}}$$

चकती का जड़त्व आघूर्ण $I=\frac{MR^2}{2}$

$$I=\frac{25\times(0.5)^2}{2}=3.12\text{ kg}\times\text{m}^2$$

चकती की घूर्णन गतिज ऊर्जा $=\frac{1}{2}I\omega^2$

$$=\frac{1}{2}I(2\pi n)^2$$

$$=\frac{1}{2}\times3.12\times\left(2\times\frac{22}{7}\times2\right)^2$$

$$=2.46\times10^2\text{ जूल}$$

उदा.45. पृथ्वी एक ठोस गोले की तरह अपने अक्ष पर घूर्णन कर रही है। पृथ्वी का घूर्णन काल 24 घण्टे, त्रिज्या 6.37×10^6 मीटर तथा द्रव्यमान 5.94×10^{24} किग्रा. है, तो पृथ्वी का कोणीय संवेग ज्ञात करो।

हल: पृथ्वी का कोणीय वेग $\omega=\frac{2\pi}{T}$

$$\omega=\frac{2\pi}{24\times60\times60}\text{ रेडियन/सेकंड}$$

∴ पृथ्वी का कोणीय संवेग

$$L = I\omega$$

परन्तु पृथ्वी का जड़त्व आघूर्ण

$$L = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\therefore \quad L = \frac{2}{5}MR^2\omega$$

दिया गया है– $M = 5.94 \times 10^{24}$ किग्रा., $R = 6.37 \times 10^6$ मीटर

$$\therefore \quad L = \frac{2\times5.94\times10^{24}\times(6.37\times10^6)^2\times2\times3.14}{5\times24\times60\times60}$$

$$\therefore \quad L = 7.07 \times 10^{33} \text{ जूल–सेकण्ड}$$

उदा. 46. इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान 9.0×10^{-31} kg है। यह हाइड्रोजन परमाणु के नाभिक के चारों ओर 0.529Å त्रिज्या की वृत्तीय कक्षा में 8.0×10^6 m s^{-1} की चाल से घूमता है। प्रोटॉन के सापेक्ष इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग ज्ञात करो। (पुस्तक का उदाहरण 7.26)

हल: दिया गया है: $m = 9 \times 10^{-31}$ kg, $r = 0.529$ Å $= 0.529 \times 10^{-10}$m, $v = 8 \times 10^6$ m/s

कोणीय संवेग $L = mvr$

$= 9\times10^{-31} \times 8 \times 10^6 \times 0.529 \times 10^{-10}$

$= 3.8 \times 10^{-34}$ जूल × सेकण्ड

उदा. 47. यदि पृथ्वी सहसा इतनी संकुचित हो जाये कि उसकी परिवर्तित त्रिज्या वर्तमान त्रिज्या की आधी रह जाये तो दिन की अवधि कितनी होगी? (पुस्तक का उदाहरण 7.27)

हल: यदि पृथ्वी की वर्तमान त्रिज्या R, द्रव्यमान M तथा कोणीय वेग ω_1 हो तो पृथ्वी का कोणीय संवेग $L_1 = I_1\omega_1 = \frac{2}{5}MR^2\omega_1$

जब पृथ्वी की त्रिज्या सिकुड़कर आधी रह जाती है तो अब कोणीय संवेग–

$$L_2 = I_2\omega_2 = \frac{2}{5}M\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_2$$

इस प्रक्रिया के अन्तर्गत कोई बाह्य बल आघूर्ण कार्यरत नहीं होता है अत:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

या $$\frac{2}{5}MR^2\omega_1 = \frac{2}{5}M\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_2$$

या $$\omega_2 = 4\omega_1$$

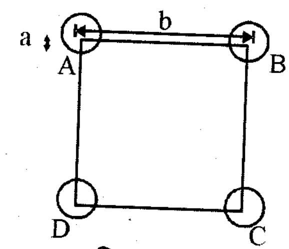
अर्थात् पृथ्वी का कोणीय वेग 4 गुना हो जायेगा।

यदि पृथ्वी का वर्तमान तथा नया आवर्तकाल क्रमश: $T_1 = 24$ घण्टे व T_2 हो तब $\frac{T_2}{T_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{4}$ या $T_2 = \frac{T_1}{4} = \frac{24}{4} = 6$ घण्टे

उदा.48. चार गोले इस प्रकार है कि उनके केन्द्र एक वर्ग के चारों कोनों पर स्थित है। वर्ग की भुजा की लम्बाई b है। प्रत्येक गोले का द्रव्यमान m तथा त्रिज्या a है। पूरे निकाय का, एक भुजा को अक्ष मानकर जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए। (पुस्तक का उदाहरण 7.24)

हल: स्वयं की अक्ष के सापेक्ष गोले का जड़त्व आघूर्ण

$$I_0 = \frac{2}{5}ma^2$$



चित्र-7.67

चित्र की ज्यामिती से B तथा C गोले का BC अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I_{BC} = \frac{2}{5}ma^2 + \frac{2}{5}ma^2 = \frac{4}{5}ma^2$$

इसी प्रकार A व D गोले का AD अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I_{AD} = \frac{4}{5}ma^2$$

∴ सम्पूर्ण निकाय का AD अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{4}{5}ma^2 + \left(\frac{2}{5}ma^2 + mb^2\right) + \left(\frac{2}{5}ma^2 + mb^2\right)$$

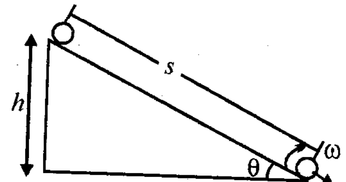
$$I = \frac{4}{5}ma^2 + \frac{4}{5}ma^2 + 2mb^2$$

$$I = \frac{8}{5}ma^2 + 2mb^2 = m\left(\frac{8}{5}a^2 + 2b^2\right)$$

7.26 नत तल पर दृढ़ पिण्ड की लोटनी गति (Rolling Motion of a Rigid Body)

वह तल जो क्षैतिज धरातल से θ कोण पर झुका हुआ हो नत तल कहलाता है।

माना कि किसी नत तल का झुकाव कोण θ तथा ऊँचाई *h* है। कोई पिण्ड नत तल के शीर्ष बिन्दु से लुढ़कना शुरू करता है। पिण्ड का द्रव्यमान m तथा उसकी त्रिज्या R है।



चित्र 7.68 नत तल पर पिण्ड की लोटनी गति

जब पिण्ड नत तल पर लुढ़केगा तो उसकी गति स्थानान्तरीय तथा घूर्णी दोनों प्रकार की होगी अतः पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा:

$$E = E_t + E_r$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad ...(1)$$

जब पिण्ड नत तल के शीर्ष पर होगा दो उसकी कुल ऊर्जा केवल स्थितिज ऊर्जा होगी तथा इसका मान mgh के बराबर होता है। जब पिण्ड लुढ़कना प्रारम्भ करेगा तब स्थितिज ऊर्जा गतिज ऊर्जा में परिवर्तित होगी। अतः ऊर्जा संरक्षण के नियम से

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad ...(2)$$

यदि पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या K हो तो

$I = mK^2$ तथा $\omega = \frac{v}{R}$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mK^2\left(\frac{v^2}{R^2}\right)$$

$$2gh = v^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)$$

$$v^2 = \frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{(1+K^2/R^2)}} \qquad ...(3)$$

$\because h = s \sin\theta$, जहाँ s नत तल की लम्बाई है।

$$v = \sqrt{\frac{2gs\sin\theta}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}} \qquad ...(4)$$

यदि गति मे त्वरण a उत्पन्न होता है तो

$$v^2 = u^2 + 2as \qquad \because u = 0$$

$$\therefore \quad v^2 = 2as$$

$$a = \frac{v^2}{2s}$$

$$a = \frac{1}{2s} \times \frac{2gs\sin\theta}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}$$

$$a = \frac{g\sin\theta}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)} \qquad ...(5)$$

द्वितीय समीकरण से

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \qquad \because u = 0$$

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2s\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}{g\sin\theta}} \qquad ...(6)$$

जब भिन्न–भिन्न आकृति के पिण्ड एक साथ शीर्ष बिन्दु से लुढ़काये जाये तो धरातल तक पहुँचने में लगा समय $\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$ पर निर्भर करता है। समी. (6) से स्पष्ट है कि $\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$ का मान अधिक होने पर समय t भी अधिक होगा।

विभिन्न वस्तुओं के लिए $\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$ के मान–

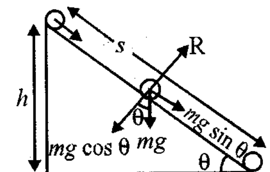
वलय के लिए $\left(\frac{K^2}{R^2}\right) = 1$

चकती के लिए $\frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$, ठोस बेलन के लिए $\frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$

खोखले गोले के लिए $\frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{3}$, ठोस गोले के लिए $\frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{5}$

अतः वलय जिसके लिए $\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$ का मान अधिकतम है नीचे पहुँचने में सर्वाधिक समय लेगी तथा ठोस गोला जिसके लिए $\left(\frac{K^2}{R^2}\right)$ का मान न्यूनतम है सर्वप्रथम नीचे पहुँचेगा।

नत तल पर फिसलता पिण्ड-



चित्र 7.69

$\therefore$ पिण्ड पर बल $F = mg \sin\theta$ ...(1)

$\because$ $F = ma$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) की तुलना करने पर

त्वरण $a = g \sin\theta$ ...(3)

धरातल तक पहुँचने में लगा समय

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g\sin\theta}} \qquad ...(4)$$

महत्वपूर्ण तथ्य

1. $\frac{K^2}{R^2}$ पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण का माप है। इसका मान पिण्ड की विशिष्ट आकृति के लिए नियत होता है व पिण्ड के द्रव्यमान अथवा त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता।
2. यदि एक ठोस व खोखला पिण्ड (समान आकृति के) नत समतल पर बिना फिसले लुढ़कते है तो ठोस पिण्ड अधिक वेग से व कम समय में निम्नतम बिन्दु पर पहुँचेगा क्योंकि–

$$\left(\frac{K^2}{R^2}\right)_{\text{ठोस}} < \left(\frac{K^2}{R^2}\right)_{\text{खोखला}}$$

3. झुकाव कोण के मान का वेग पर कोई प्रभाव नहीं होता है परन्तु त्वरण तथा निम्नतम बिन्दु तक पहुँचने में लगा समय इस पर निर्भर होता है।

वेग $\propto \theta^{\circ}$

निम्न–बिन्दु तक पहुँचने में लगा समय $\propto \theta^{-1}$ तथा त्वरण $\propto \theta$

4. किसी पिण्ड का लुढ़कना– $\frac{K^2}{R^2} \neq 0$

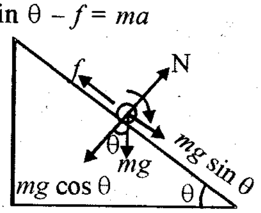
किसी पिण्ड का फिसलना– $\frac{K^2}{R^2} = 0$

किसी पिण्ड का मुक्त रूप से गिरना– $\frac{K^2}{R^2} = 0$ तथा $\theta = 90^{\circ}$

5. घर्षण बल की उपस्थिति में नत तल पर बिना फिसले लुढ़कता पिण्ड–

यदि पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र का रेखीय त्वरण a हो तब द्रव्यमान केन्द्र की रेखीय गति के लिए

$$mg \sin\theta - f = ma \quad \ldots(1)$$



यदि वस्तु के घूर्णन का कोणीय त्वरण α हो तो

$$a = R\alpha \quad \ldots(2)$$

जहाँ R = पिण्ड की त्रिज्या

पिण्ड पर विरोधी बल आघूर्ण

$$\tau = fR \quad \ldots(2)$$

यदि पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण I हो तो

$$\tau = I\alpha \quad \ldots(4)$$

समीकरण (3) व (4) से

$$I\alpha = fR$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{I\alpha}{R} \quad \ldots(5)$$

समीकरण (2) से $f = \frac{I}{R}\left(\frac{a}{R}\right)$

$$= \frac{Ia}{R^2} \quad \ldots(6)$$

यह मान समीकरण (1) में रखने पर

$$mg \sin\theta - \frac{Ia}{R^2} = ma$$

$$\Rightarrow \quad a\left(m + \frac{I}{R^2}\right) = mg \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{I}{R^2}}$$

$$= \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}} \quad \ldots(7)$$

घर्षण बल $\quad f = \frac{Ia}{R^2} = \frac{I}{R^2} \cdot \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I}{mR^2}}$

$$= \frac{mg\sin\theta}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

$\because$ घर्षण बल $\leq$ सीमान्त घर्षण बल

$$f \leq \mu_s N$$

$$\frac{mg\sin\theta}{1 + \frac{mR^2}{I}} \leq \mu_s mg\cos\theta$$

$\because$ प्रतिक्रिया बल

$$N = mg \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{\tan\theta}{1 + \frac{mR^2}{I}}$$

स्थिति– बेलन के लिए $I = \frac{1}{2}mR^2$

$\therefore$ घर्षण बल $f = \frac{mg\sin\theta}{1 + \frac{mR^2}{1/2mR^2}}$

$$= \frac{mg\sin\theta}{1+2}$$

$$= \frac{1}{3}mg\sin\theta$$

उदा.49. R त्रिज्या की एक वस्तु क्षैतिज तल पर v चाल से लुढ़कते हुए नत तल पर चढ़ने लगती है व अधिकतम ऊँचाई $h = 3v^2/4g$ प्राप्त करती है। वस्तु की आकृति क्या है?

हल: v चाल से लुढ़कते हुए वस्तु की गतिज ऊर्जा,

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}MK^2\frac{v^2}{R^2}$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)$$

जहाँ K वस्तु की घूर्णन त्रिज्या है।

अधिकतम ऊँचाई प्राप्त करने पर यह स्थितिज ऊर्जा में रूपान्तरित हो जायेगी।

अत: $\frac{1}{2}Mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right) = Mgh = Mg\frac{3v^2}{4g}$

$$\therefore \quad I + \frac{K^2}{R^2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{K}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

बेलन अथवा चकती के लिए $\frac{K}{R}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ होता है। अतः वस्तु बेलन अथवा चकती के रूप में है।

उदा.50. ठोस गोला नत समतल पर $3.5\ m\ s^{-2}$ के त्वरण से लुढ़कता है। नत समतल का झुकाव कोण ज्ञात करो। (पुस्तक का उदाहरण 7.28)

हल: दिया गया है: $a = 3.5\ m/s^2$

$\because$ त्वरण $$a=\frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}}$$

$\because$ ठोस गोले के लिए $\frac{K^2}{R^2}=0.4$

$\therefore$ $$3.5=\frac{9.8\sin\theta}{1+0.4}$$

$$\sin\theta=\frac{3.5\times1.4}{9.8}=0.5=\sin 30°$$

$$\theta=30°$$

उदा.51. 0.1 किग्रा द्रव्यमान व 0.025 मीटर त्रिज्या का एक ठोस गोला 0.1 मी/सेकण्ड के समान वेग से एक क्षैतिज चिकनी मेज पर लौटनी करता है। इसकी कुल ऊर्जा का मान ज्ञात कीजिये।

हल: दिया गया है– $M = 0.1$ किग्रा, $R = 0.025$ मीटर, $v = 0.1$ मी/से.

लोटनी गति की कुल ऊर्जा

$$E=\frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right) \quad ...(1)$$

$\therefore$ ठोस गोले के लिये

$$I=MK^2=\frac{2}{5}MR^2$$

$\therefore$ $$\frac{K^2}{R^2}=\frac{2}{5}$$

$\therefore$ समीकरण (1) से

$$E=\frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{2}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{2}Mv^2\times\frac{7}{5}$$
$$=\frac{7}{10}Mv^2=\frac{7}{10}\times0.1\times(0.1)^2$$
$$=7\times10^{-4}\text{ जूल}$$

7.27 दृढ़ पिण्डों का सन्तुलन (Equilibrium of Rigid Bodies)

बाह्य बल की उपस्थिति में दृढ़ पिण्ड की दो प्रकार की गतियाँ हो सकती है–

(i) रेखीय गति, जिसके अन्तर्गत पिण्ड के सभी कण एक समान वेग से गतिशील होते है तथा

(ii) किसी अक्ष के सापेक्ष घूर्णन गति।

एक दृढ़ पिण्ड साम्यावस्था की अवस्था में होता है यदि इस पर कार्यरत परिणामी बाह्य बल पिण्ड की रेखीय तथा घूर्णन अवस्था में कोई परिवर्तन नहीं करता है।

किसी दृढ़ पिण्ड के अनेक बलों के उपस्थिति में साम्यावस्था में होने के लिए पिण्ड एक साथ निम्न दो साम्यावस्थाओं में होना चाहिए–

(1) **रेखीय साम्यावस्था**–यदि कोई दृढ़ पिण्ड या तो स्थिर हो या नियत वेग से गतिशील हो तब दृढ़ पिण्ड रेखीय साम्यावस्था की अवस्था में होता है।

जब पिण्ड स्थिर होता है तब यह अवस्था स्थैतिक साम्यावस्था कहलाती है जबकि नियत वेग से सरल रेखीय पथ पर गतिशील होने पर यह अवस्था गतिक साम्यावस्था कहलाती है।

माना कि दृढ़ पिण्ड पर $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$,....... बाह्य बल कार्यरत है तब गति के द्वितीय नियम से

$$\sum\vec{F}_{(\text{बाह्य})}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+.......$$
$$=\frac{d\vec{p}}{dt}$$
$$=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

यह दृढ़ पिण्ड रेखीय साम्यावस्था में होगा यदि

$$\vec{v}=\text{नियत या }\frac{d\vec{v}}{dt}=0$$

या $$\sum\vec{F}_{(\text{बाह्य})}=0$$

अतः कोई दृढ़ पिण्ड रेखीय साम्यावस्था में होगा यदि इस पर आरोपित परिणामी बल या सभी बाह्य बलों का सदिश योग शून्य हो। यदि X,Y, तथा Z अक्षों के अनुदिश किसी दृढ़ पिण्ड पर कार्यरत बलों के घटक F_x, F_y तथा F_z हो तब दृढ़ पिण्ड के रेखीय साम्यावस्था की स्थिति में

$$\sum\vec{F}_{nx}=\vec{F}_{1x}+\vec{F}_{2x}+\vec{F}_{3x}+....=0$$
$$\sum\vec{F}_{ny}=\vec{F}_{1y}+\vec{F}_{2y}+\vec{F}_{3y}+...=0$$
तथा $$\sum\vec{F}_{nz}=\vec{F}_{1z}+\vec{F}_{2z}+\vec{F}_{3z}+...=0$$

(2) **घूर्णन साम्यावस्था**–यदि कोई दृढ़ पिण्ड स्थिर हो या नियत कोणीय वेग से घूर्णन कर रहा हों तब दृढ़ पिण्ड घूर्णन साम्यावस्था की अवस्था में होता है।

माना कि दृढ़ पिण्ड पर $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2, \vec{\tau}_3$,...... बाह्य बल आघूर्ण कार्यरत है। तब घूर्णन करते पिण्ड के लिए गति का समीकरण

$$\sum\vec{\tau}_{\text{बाह्य}}=\vec{\tau}_1+\vec{\tau}_2+\vec{\tau}_3+......=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

यदि दृढ़ पिण्ड घूर्णन साम्यावस्था में होगा

यदि $\vec{L}$ = नियतांक या $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

या $\sum \vec{\tau}_{\text{बाह्य}} = 0$

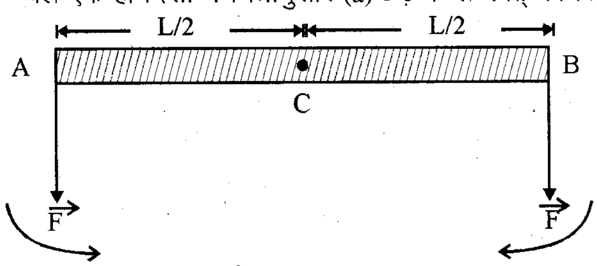
अतः कोई दृढ़ पिण्ड घूर्णन साम्यावस्था में होगा यदि इस पर आरोपित परिणामी बल आघूर्ण या सभी बाह्य बल आघूर्णो का सदिश योग शून्य हो।

आंशिक साम्यावस्था (Partial equilibrium):-

एक पिण्ड आंशिक साम्यावस्था में होता है यदि या तो वह रेखीय साम्यावस्था में हो परन्तु घूर्णन साम्यावस्था में नहीं हो या फिर घूर्णन साम्यावस्था में हो परन्तु रेखीय साम्यावस्था में नहीं हो।

नगण्य द्रव्यमान तथा L लम्बाई की एक स्वतंत्र छड़ AB पर विचार करते है।

स्थिति (i)- माना कि छड़ के दोनों सिरों पर दो समान तथा समान्तर बल एक ही दिशा में चित्रानुसार (a) छड़ के लम्बवत् कार्यरत है।



चित्र 7.70 (a)

छड़ पर कार्यरत परिणामी बल $\vec{F}_R = \vec{F} + \vec{F} = 2\vec{F}$

($\because$ दोनों बल एक दूसरे के समान्तर एक ही दिशा में कार्यरत है)

इस प्रकार छड़ रेखीय साम्यावस्था की अवस्था में नहीं है।

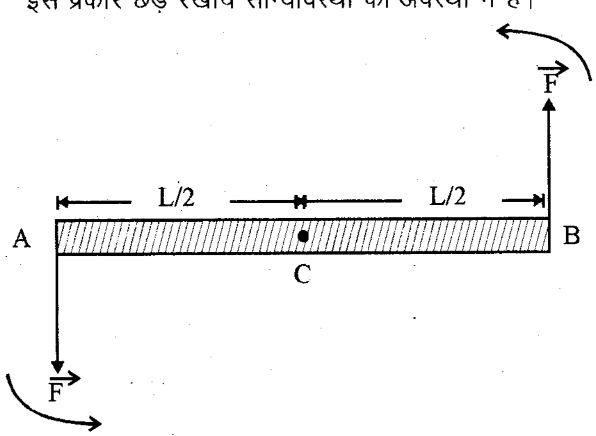
अब छड़ के सिरों A व B पर लगे बलों के C के परितः आघूर्ण का परिमाण $= F \times \frac{L}{2} = \frac{FL}{2}$

यह बल आघूर्ण परिमाण में समान परन्तु विपरीत दिशाओं में प्रभावकारी होने से छड़ पर कुल बल आघूर्ण शून्य होगा। इस प्रकार छड़ घूर्णन साम्यावस्था की अवस्था में है।

स्थिति (ii)- अब यदि सिरे B पर आरोपित बल की दिशा विपरीत कर दी जाये (चित्र b) तब छड़ पर कार्यरत परिणामी बल

$$\vec{F}_R = \vec{F} - \vec{F} = 0$$

इस प्रकार छड़ रेखीय साम्यावस्था की अवस्था में है।



चित्र 7.70 (b)

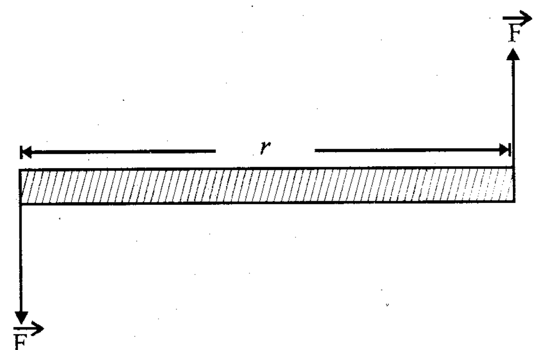
अब छड़ के सिरों A व B पर लगे बलों के C के परितः आघूर्ण का परिमाण $= F \times \frac{L}{2} = \frac{FL}{2}$

यह बल आघूर्ण परिमाण में समान तथा एक ही दिशा में होने से छड़ वामावर्त दिशा में घूर्णन के लिए प्रवृत्त होती है। इस प्रकार छड़ घूर्णन साम्यावस्था की अवस्था में नहीं है।

बल युग्म (couple)—बलों का एक विशेष संयोजन जो गति के लिए पूर्णतः मुक्त किसी पिण्ड को घुमा दे, बल युग्म कहलाता है।

बल युग्म उन दो बलों का संयोजन है जो परिमाण में समान व दिशा में विपरीत हो एवं उनकी क्रिया रेखा समान नहीं हो। बल युग्म का प्रभाव बल युग्म आघूर्ण कहलाता है।

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



चित्र 7.70 (c)

सामान्यतः बल युग्म तथा बल आघूर्ण समान अर्थों में प्रयुक्त होते हैं परन्तु दोनों में मूलभूत अन्तर यह है कि बलयुग्म बनाने वाले दोनों बल बाह्य बल होते हैं जबकि बल आघूर्ण में एक बाह्य बल होता है जबकि दूसरा बल उसके प्रतिक्रिया स्वरूप लगता है।

किसी पिण्ड पर बल युग्म का प्रभाव उसमें ऐंठन गति उत्पन्न करना है।

बलयुग्म के उदाहरण–

(1) किसी बोतल का ढक्कन तभी खुलता और बन्द होता है जब हमारी उंगलियाँ इस पर एक बल युग्म आरोपित करती है।

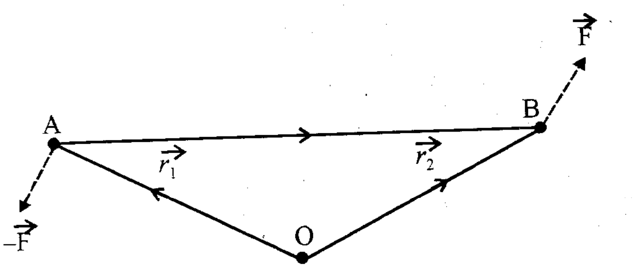
(2) पानी का नल खोलने व बन्द करने में भी हमारी उंगलियाँ इस पर एक बल युग्म आरोपित करती है।

(3) पृथ्वी के चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित चुम्बकीय सुई के उत्तरी तथा दक्षिणी ध्रुवों पर समान तथा विपरीत बल कार्यरत होते हैं। इस स्थिति के अतिरिक्त जब सुई उत्तर–दक्षिण दिशा में संकेत करती हो तब दोनों बलों की क्रिया रेखा समान नहीं होती। अतः सुई पर पृथ्वी के चुम्बकीय क्षेत्र के कारण एक बल युग्म प्रभावी होता है।

उदा.52. दर्शाइये कि किसी बलयुग्म का आघूर्ण उस बिन्दु के ऊपर निर्भर नहीं करता जिसके परितः आप आघूर्ण ज्ञात करते हैं।

हल– माना कि चित्रानुसार किसी दृढ़ पिण्ड पर बलयुग्म कार्यरत है। बिन्दु A तथा B पर क्रमशः $-\vec{F}$ तथा $\vec{F}$ बल आरोपित है।

माना कि बिन्दु A तथा B का मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_1$ तथा $\vec{r}_2$ है।



चित्र 7.71

अब हम मूल बिन्दु O के सापेक्ष सदिश बलों का आघूर्ण ज्ञात करते हैं–

बलयुग्म का आघूर्ण = दोनों बलों के आघूर्णो का योग

$$= \vec{r}_1 \times (-\vec{F}) + \vec{r}_2 \times \vec{F}$$

$$= \vec{r}_2 \times \vec{F} - \vec{r}_1 \times \vec{F}$$

$$= (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}$$

$$= \overrightarrow{AB} \times \vec{F}$$

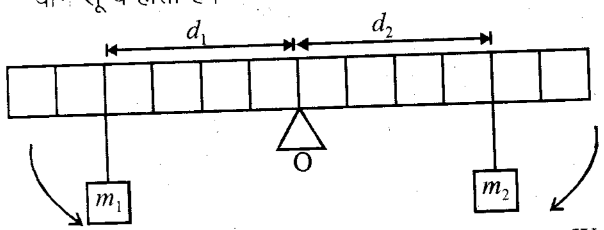
$$[\because \vec{r}_1 + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_2]$$

इस प्रकार यह बलयुग्म का आघूर्ण मूलबिन्दु अर्थात् वह बिन्दु जिसके सापेक्ष बलों का आघूर्ण ज्ञात किया है, की स्थिति पर निर्भर नहीं करता है।

महत्वपूर्ण तथ्य

आघूर्णो का सिद्धान्त (Principle of moments)

जब कोई पिण्ड साम्यावस्था में होता है तब किसी बिन्दु के परितः दक्षिणावर्ती आघूर्णो का योग, वामावर्ती आघूर्णो के योग के तुल्य होता है अर्थात् उस बिन्दु के परितः आघूर्णो का बीजगणितीय योग शून्य होता है।



चित्र 7.72

एक नगण्य द्रव्यमान की एकसमान छड़ पर विचार करते है जो आधार O पर टिकी है तथा घूर्णन के लिए स्वतंत्र है। O से d_1 तथा d_2 दूरी पर दो भार क्रमशः W_1 तथा W_2 लटकाये गये है।

बिन्दु O के परितः वामावर्ती (Clockwise) आघूर्ण

$$= F_1 \times d_1 = W_1 \times d_1$$

इसी प्रकार बिन्दु O के परितः दक्षिणावर्ती (anticlockwise) आघूर्ण

$$= F_2 \times d_2 = W_2 \times d_2$$

आघूर्णो के सिद्धान्त से छड़ क्षैतिज तथा घूर्णी साम्यावस्था में होगी यदि

वामावर्ती आघूर्ण = दक्षिणावर्ती आघूर्ण

$\Rightarrow \quad F_1 \times d_1 = F_2 \times d_2$

$\Rightarrow \quad W_1 \times d_1 = W_2 \times d_2$

या भार × भार भुजा = प्रयास × प्रयास भुजा

इसे लीवर सिद्धान्त भी कहते है तथा यह व्यवस्था उत्तोलक कहलाती है।

उत्तोलक के उदाहरण : दण्ड तुला (Beam balance), सी–सॉ (See-Saw)

महत्वपूर्ण–यदि $F_1 d_1 > F_2 d_2$ तब बांयी भुजा (L.H.S.) नीचे झुकेगी तथा यदि $F_1 d_1 < F_2 d_2$ तब दांयी भुजा (R.H.S.) नीचे झुकेगी तथा निकाय घूर्णन साम्यावस्था में नहीं होगा।

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. घूर्णन गति से क्या तात्पर्य है?

प्र.2. किसी कण के द्रव्यमान आघूर्ण से क्या तात्पर्य है?

प्र.3. क्या द्रव्यमान केन्द्र वस्तु के बाहर हो सकता है?

प्र.4. दो कणों के द्रव्यमान केन्द्र के स्थिति सदिश का सूत्र लिखिए।

प्र.5. एक समान पतली छड़ के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति लिखिए।

प्र.6. कोणीय वेग अदिश राशि है या सदिश राशि।

प्र.7. रेखीय वेग v तथा कोणीय वेग ω में सम्बन्ध लिखिए।

प्र.8. τ तथा L में सम्बन्ध लिखिए।

प्र.9. जड़त्व आघूर्ण की निर्भरता लिखिए।

प्र.10. क्या किसी पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र, आवश्यक रूप से पिण्ड के भीतर ही होता है?

प्र.11. क्या निकाय की गति आन्तरिक बलों से प्रभावित होती है?

प्र.12. विलगित निकाय का द्रव्यमान केन्द्र किस प्रकार की गति करता है?

प्र.13. X – Y तल में एकसमान मोटाई की वर्गाकार प्लेट ABCD है जिसका केन्द्र O मूल बिन्दु है तथा एकसमान वर्गाकार छोटी प्लेटें 1, 2, 3 व 4 कोनों पर से हटाई जा सकती है। (चित्र)

(i) प्लेट ABCD का द्रव्यमान केन्द्र कहाँ है?

(ii) द्रव्यमान केन्द्र कहाँ होगा, यदि ?

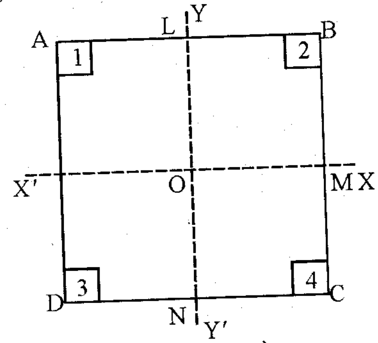
(a) (1) छोटी प्लेट हटा दी जाये?

(b) (1) व (2) छोटी प्लेटें हटा दी जाये?

(c) (1) व (3) छोटी प्लेटें हटा दी जाये?

(d) (1), (2) व (3) छोटी प्लेटें हटा दी जाये?

(e) चारों (1), (2), (3) व (4) छोटी प्लेटें हटा दी जाये?

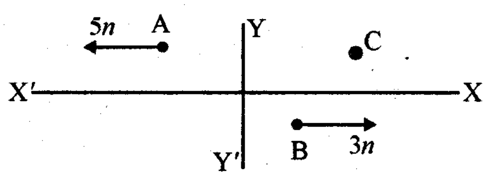


चित्र 7.73

प्र.14. यदि दो तरबूज एक पुल से साथ–साथ नीचे गिराये जाते है तो दोनों तरबूजों के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण क्या होगा?

प्र.15. तीन कणों (A, B तथा C) के निकाय में, दो कणों A व B पर बल की दिशा तथा परिमाण चित्र में दिखाये गये है। तीसरे कण C पर कितना तथा किस दिशा में बल लगाया जाये ताकि तीनों कणों के निकाय का द्रव्यमान केन्द्र,

(a) स्थिर रहे।
(b) दायीं ओर नियत वेग से चले।
(c) दायीं ओर त्वरण से चले।

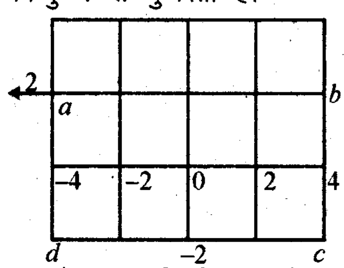


चित्र 7.74

प्र.16. यदि एक ट्रॉली घर्षण रहित तल पर v वेग से चल रही है, यदि ट्रॉली पर बैठा बच्चा u वेग से चलने लगे तो ट्रॉली व बच्चे के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की चाल पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

प्र.17. चित्र में समान द्रव्यमान के चार कणों का निकाय दिखाया गया है जिसमें प्रत्येक कण एक नियत वेग से घर्षण रहित तल पर चित्र के अनुसार चल रहा है। कौन–सा कणों का युग्म ऐसा है जिससे द्रव्यमान केन्द्र,

(i) स्थिर रहता है?
(ii) स्थिर तथा मूल बिन्दु पर है?
(iii) मूल बिन्दु में से गुजरता है?



चित्र 7.75

प्र.18. द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति बताइये–

(i) गोले की,
(ii) वलय की,
(iii) बेलन की,
(iv) घन की,
(v) खोखले गोले की।

प्र.19. क्या यह संभव है कि किसी निकाय के द्रव्यमान केन्द्र पर कोई द्रव्यमान ही न हो?

प्र.20. एक बम को हवा में फेका जाता है, यदि यह बम हवा में फट जाये तो द्रव्यमान केन्द्र का पथ क्या होगा?

प्र.21. किसी वलय (द्रव्यमान M व त्रिज्या R) का जड़त्व–आघूर्ण उसके व्यास के परितः क्या होता है?

प्र.22. निम्न भौतिक राशियों के सूत्र लिखिये, घूर्णन गतिज ऊर्जा एवं अभिकेन्द्र बल।

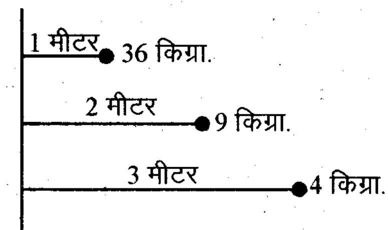
प्र.23. बिना फिसले लुढ़कते हुए पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा के लिये व्यंजक लिखिये।

प्र.24. घूर्णन गति के लिये कोणीय संवेग तथा जड़त्व–आघूर्ण में सम्बन्ध लिखिये।

प्र.25. रेखीय संवेग का आघूर्ण कौन–सी भौतिक राशि को व्यक्त करता है?

प्र.26. एक मेढ़क घूमती चकती के किनारे पर बैठ जाता है। यदि मेढ़क व चकती का कोणीय वेग नियत है। तब क्या मेढ़क का–

(a) त्रिज्य त्वरण है?
(b) स्पर्शरेखीय त्वरण है?
(c) यदि कोणीय चाल घट रही है तब क्या मेढ़क का त्रिज्य त्वरण है?
(d) उपरोक्त (c) दशा में क्या स्पर्शरेखीय त्वरण है?



चित्र 7.76

प्र.27. यदि पृथ्वी का व्यास सिकुड़ने पर एक चौथाई हो जाये तो दिन कितने घण्टे का होगा?

प्र.28. यदि दो वस्तुओं के जड़त्व–आघूर्ण I_1 तथा I_2 (जहाँ $I_2 > I_1$) व घूर्णन गतिज ऊर्जा E_1 व E_2 हो तथा कोणीय संवेग L_1 तथा L_2 हो तो,

(i) यदि $E_1 = E_2$, किसका कोणीय संवेग अधिक होगा?
(ii) यदि $L_1 = L_2$, किसकी गतिज ऊर्जा अधिक होगी?

[**संकेत**– (i) $E = \frac{L^2}{2I}$ यदि $E_1 = E_2, \frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$, $I_2 > I_1$, (ii) यदि $L_1 = L_2$, $\frac{E_1}{E_2} = \frac{I_2}{I_1}$ अतः $E \propto \frac{1}{I}$]

प्र.29. ठोस गोले तथा समान द्रव्यमान व समान त्रिज्या के खोखले गोले में व्यास के परितः जड़त्व–आघूर्ण किसका अधिक है? नत तल पर लुढ़कने पर पहले कौन–सा गोला नीचे पहुँचेगा?

प्र.30. निम्नलिखित किन–किन भौतिक राशियों को व्यक्त करते है?

(i) रेखीय संवेग का आघूर्ण
(ii) कोणीय संवेग परिवर्तन की दर
(iii) जड़त्व–आघूर्ण एवं कोणीय वेग का गुणनफल।

प्र.31. ठोस गोले तथा समान द्रव्यमान व समान त्रिज्या के खोखले गोले में व्यास के परितः जड़त्व–आघूर्ण किसका कम है?

प्र.32. समान द्रव्यमान के दो ठोस गोले भिन्न–भिन्न पदार्थो के बनाये जाते है। किसका जड़त्व–आघूर्ण व्यास के परितः अधिक होगा? तथा नत तल पर कौन–सा पहले नीचे पहुँचेगा?

[**संकेत:** $I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}M\left(\frac{3M}{4\pi d}\right)^{2/3}$ $\left(\because M = \frac{4}{3}\pi R^3 d\right)$ अतः $I \propto \frac{1}{(d)^{2/3}}$]

प्र.33. समान द्रव्यमान तथा मोटाई की दो चकती भिन्न–भिन्न पदार्थों की बनायी जाती है। किसका तल के लम्बवत् तथा केन्द्र से

गुजरने वाले अक्ष के परितः जड़त्व–आघूर्ण अधिक होगा?

[**संकेत:** $I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{\pi t\rho}$ $\left[\because M = \pi R^2 t\rho, \ \rho = \text{घनत्व}\right]$

अतः $I \propto \frac{1}{\rho}$

प्र.34. यदि किसी गोले को पिघलाकर चकती बनायी जाये तो किसका जड़त्व–आघूर्ण अधिक होगा?

प्र.35. हैलीकॉप्टर में दो नोदक (Propellers) क्यों होते है?

प्र.36. किसी लुढ़कती हुई चकती की घूर्णन गतिज ऊर्जा तथा कुल ऊर्जा का क्या अनुपात है?

[**संकेत:** $E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{4}Mv^2$

$\left(\because I = \frac{1}{2}MR^2\right)$

अतः $\frac{E_r}{E_r + E_t} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2} = \frac{1}{3}$]

प्र.37. निम्न चार समीकरणों में किसी समय t पर कोणीय विस्थापन θ है। किसमें कोणीय समीकरण सही है?

(a) $\theta = 3t - 4$

(b) $\theta = -5t^3 + 4t^7 + 6$

(c) $\theta = \frac{2}{t^2} - \frac{4}{t}$

(d) $\theta = 5t^2 - 3$

[**संकेत:** जिस समीकरण में कोणीय त्वरण नियत है या $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ = नियत है।]

प्र.38. एक चकती अपने तल के लम्बवत् तथा केन्द्र से जाने वाले अक्ष के परितः घूम रही है। निम्न में किस दशा में ऋणात्मक कोणीय विस्थापन है? यदि चकती θ_1 कोण से θ_2 कोण विस्थापित हो रही हो–

(a) –3 रेडियन से + 5 रेडियन

(b) –3 रेडियन से – 7 रेडियन

(c) 7 रेडियन से – 3 रेडियन

प्र.39. m द्रव्यमान की एक ठोस चकती क्षैतिज से θ कोण पर झुके आनत तल पर बिना फिसले लुढ़क रही है। न्यूनतम घर्षण गुणांक क्या है?

प्र.40. किसी चकती के किनारे पर बल लगाकर वस्तु के वेग को बदला जाता है। किस दशा में बल–आघूर्ण द्वारा किया कार्य सबसे अधिक होगा तथा किसमें सबसे कम?

(a) – 2 रेडियन/सेकण्ड से 5 रेडियन /सेकण्ड

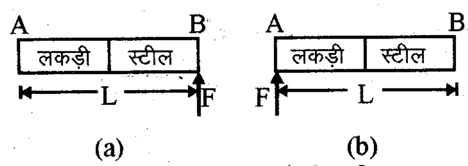
(b) 2 रेडियन/सेकण्ड से 5 रेडियन /सेकण्ड

(c) – 2 रेडियन/सेकण्ड से – 5 रेडियन /सेकण्ड

(d) 2 रेडियन/सेकण्ड से – 5 रेडियन /सेकण्ड।

प्र.41. सामने चित्र में छड़ को F बल लगाकर चित्र (a) में A के परितः तथा चित्र (b) में B के परितः घुमाया जाता है। किस दशा में कोणीय त्वरण अधिक है? जबकि छड़ का आधा भाग लकड़ी तथा आधा भाग स्टील का है।

[**संकेत:** $\tau = I\alpha$, $\alpha = \frac{\tau}{I}$, τ = एकसमान = FL]

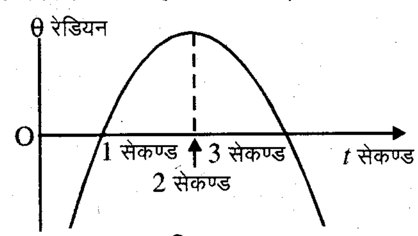


चित्र 7.77

प्र.42. किसी घूमती चकती का कोणीय विस्थापन व समय ग्राफ चित्र में दर्शाया गया है

(i) t = 1 सेकण्ड, t = 2 सेकण्ड व t = 3 सेकण्ड पर चकती की कोणीय चाल कैसी है– धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य?

(ii) t = 1 सेकण्ड, t = 2 सेकण्ड व t = 3 सेकण्ड पर चकती का कोणीय त्वरण कैसा है– धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य?



चित्र 7.78

प्र.43. क्या सीधी रेखा में चलते कण का कोणीय संवेग हो सकता है? कब नहीं हो सकता?

प्र.44. τ, I तथा α में सम्बन्ध सूत्र लिखिए।

प्र.45. L, I तथा ω में सम्बन्ध सूत्र लिखिए।

प्र.46. घूर्णन गतिज ऊर्जा का सूत्र लिखिए।

प्र.47. लोटनी गति कर रही वस्तु की गतिज ऊर्जा का सूत्र लिखिए।

प्र.48. क्या घूर्णन त्रिज्या पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर करती है?

प्र.49. जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने के प्रमेयों का नाम लिखिए।

प्र.50. नत तल पर लोटनी गति में पिण्ड के वेग का सूत्र लिखिए।

प्र.51. वलय, चकती, खोखला गोला, ठोस बेलन व ठोस गोले के लिए K^2/R^2 का मान लिखिए।

उत्तरमाला

उ.1. ऐसी गति जिसमें कोई दृढ़ पिण्ड किसी स्थिर अक्ष के परितः घूर्णन करता है, घूर्णन गति कहलाती है।

उ.2. किसी कण का द्रव्यमान आघूर्ण कण के द्रव्यमान तथा द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष स्थिति का गुणनफल होता है।

उ.3. हाँ

उ.4. $\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

उ.5. छड़ का मध्य बिन्दु।

उ.6. कोणीय वेग एक अक्षीय सदिश राशि है जिसकी दिशा घूर्णन अक्ष जिसके परितः पिण्ड घूर्णन करता है, के अनुदिश होती है।

उ.7. $v = r\omega$

उ.8. $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

उ.9. (i) वस्तु के द्रव्यमान पर (ii) घूर्णन अक्ष की स्थिति पर (iii) घूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर।

उ.10. नहीं, पिण्ड के बाहर भी हो सकता है।

उ.11. नहीं

उ.12. नियत वेग

उ.13. (i) O पर, (ii) (a) चौथे चतुर्थांश में, (b) मूल बिन्दु से नीचे Y-अक्ष पर अर्थात् ON पर, (c) O पर, (d) चौथे चतुर्थांश में, (e) O पर है।

उ.14. g

उ.15. (a) 2N दायीं ओर (b) 2N दायीं ओर यदि निकाय नियत वेग से चल रहा हो। (c) 2N से अधिक दायीं ओर।

उ.16. कोई नहीं

उ.17. (i) ac, cd तथा bc, (ii) bc, (iii) bd तथा ad

उ.18. (i), (ii), (iii), (iv) तथा (v) सभी में वस्तु के ज्यामितीय केन्द्र पर।

उ.19. सत्य है जैसे वलय

उ.20. परवलयाकार

उ.21. $\frac{1}{2}MR^2$

उ.22. $E = \frac{1}{2}I\omega^2, F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m\omega v$

उ.23. $E = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)$

उ.24. $L = I\omega$

उ.25. कोणीय संवेग को।

उ.26. (a) हाँ, (b) नहीं, (c) हाँ, (d) हाँ

उ.27. 1.5 घण्टे

उ.28. (i) $L_2 > L_1$, (ii) $E_2 < E_1$

उ.29. खोखले गोले का, ठोस गोला पहले पहुँचेगा।

उ.30. (i) कोणीय संवेग (ii) बल आघूर्ण (iii) कोणीय संवेग।

उ.31. ठोस गोले का जड़त्व आघूर्ण कम है।

उ.32. जिसका घनत्व (d) कम होगा उसका I अधिक होगा तथा दोनों साथ पहुँचेंगे।

उ.33. अतः जिसका ρ कम होगा I अधिक होगा।

उ.34. चकती का

उ.35. संवेग संरक्षण के नियम का पालन करते हुए हेलीकॉप्टर को इच्छित दिशा में घुमाया जा सकता है।

उ.36. $\frac{1}{3}$

उ.37. (a) व (d)

उ.38. (b) व (c)

उ.39. $\mu_s = \frac{1}{3}\tan\theta$

उ.40. सभी में समान।

उ.41. $\alpha_1 < \alpha_2$

उ.42. (1) ω = धनात्मक, शून्य, ऋणात्मक, (2) कोणीय त्वरण ऋणात्मक।

उ.43. हाँ, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = rp\sin\theta\hat{n}$

यदि $\theta = 0°$ या $r = 0$ या $p = 0$ तो $L = 0$

उ.44. $\tau = I\alpha$

उ.45. $L = I\omega$

उ.46. $E = \frac{1}{2}I\omega^2$

उ.47. $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

उ.48. नहीं

उ.49. (i) समकोणिक अक्षों की प्रमेय (ii) समान्तर अक्षों की प्रमेय

उ.50. $v = \sqrt{\frac{2gh}{1+K^2/R^2}}$

उ.51. वलय के लिए $\frac{K^2}{R^2} = 1$ चकती के लिए $\frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$

खोखले गोले के लिए $\frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{3}$

ठोस बेलन के लिए $\frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$

ठोस गोले के लिए $\frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{5}$

विविध उदाहरण

उदा.53. ऑटोमोबाइल इंजन का कोणीय वेग 16 सेकण्ड में 1200 rpm से बढ़कर 3120 rpm हो जाता है। (i) यह मानते हुए कि कोणीय त्वरण समान रहता है, इसका मान ज्ञात कीजिए। (ii) इस समय में इंजन कितने चक्कर लगाता है?

हल– दिया गया है :

$$n_0 = 1200\frac{\text{चक्कर}}{\text{मिनट}} = \frac{1200}{60}\frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}} = 20\frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}}$$

$$n = 3120\frac{\text{चक्कर}}{\text{मिनट}} = \frac{3120}{60}\frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}} = 52\frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}}$$

$$t = 16 \text{ सेकण्ड}$$

(i) ∵ कोणीय त्वरण $\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2\pi n - 2\pi n_0}{t}$

$$= \frac{2\pi}{t}(n - n_0)$$

$$= \frac{2\pi}{16}(52-20) = 4\pi \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}^2}$$

(ii) $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$$= 2\pi n_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= 2\pi \times 20 \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times (16)^2$$

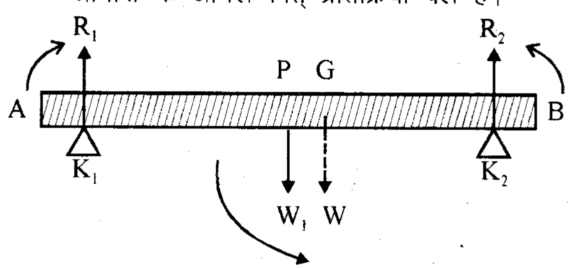
$$= (640\pi + 512\pi) \text{ रेडियन}$$

$= 1152\pi$ रेडियन

अतः चक्करों की संख्या $= \frac{1152\pi}{2\pi} = 576$

उदा.54. 70 सेंटीमीटर लंबी और 4.00 kg द्रव्यमान की धातु की छड़, दोनों सिरों से 10 सेंटीमीटर दूर रखे दो क्षुर-धारों पर टिकी है। इसके एक सिरे से 40 सेंटीमीटर की दूरी पर 6.00 kg द्रव्यमान का एक भार लटकाया गया है। क्षुर-धारों पर लगने वाले प्रतिक्रिया बलों की गणना कीजिए। (छड़ को समांग और समान अनुप्रस्थ काट वाली मान सकते हैं।)

हल– चित्रानुसार छड़ AB तथा क्षुरधारों K_1 तथा K_2 की स्थिति को दर्शाया गया है। छड़ का गुरुत्व केन्द्र G है, जो छड के केन्द्र में है, जहाँ छड़ का सम्पूर्ण भार W कार्यरत है। बिन्दु P पर भार W_1 लटकाया गया है। माना कि R_1 तथा R_2 क्षुरधारों के आधारों के अभिलम्बवत् प्रतिक्रिया बल है।



चित्र 7.79

दिया गया है: AB = 70 सेमी, AG = 35 सेमी, AP = 30 सेमी, PG = 5 सेमी, $AK_1 = BK_2 = 10$ सेमी, $K_1G = K_2G = 25$ सेमी.

W = छड़ का भार = mg = 4g न्यूटन

W_1 = लटकाया गया भार $= m_1g = 6g$ न्यूटन

छड़ के रेखीय साम्यावस्था की स्थिति में

$R_1 + R_2 = W_1 + W$

$= 6g + 4g = 10\,g$

$= 10 \times 9.8 = 98$ न्यूटन

$\therefore \quad R_1 + R_2 = 98$ न्यूटन ...(1)

घूर्णन साम्यावस्था की स्थिति में

दक्षिणावर्ती आघूर्ण = वामावर्ती आघूर्ण

$R_1 \times K_1G = W_1 \times PG + R_2 \times K_2G$

$\Rightarrow \quad R_1 \times 0.25 = W_1 \times 0.05 + R_2 \times 0.25$

$\Rightarrow \quad R_1 - R_2 = 0.2W_1 = 0.2 \times 6 \times 9.8$

$\Rightarrow \quad R_1 - R_2 = 11.76$ न्यूटन ...(2)

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर–

$R_1 = 54.88$ न्यूटन

तथा $R_2 = 43.12$ न्यूटन

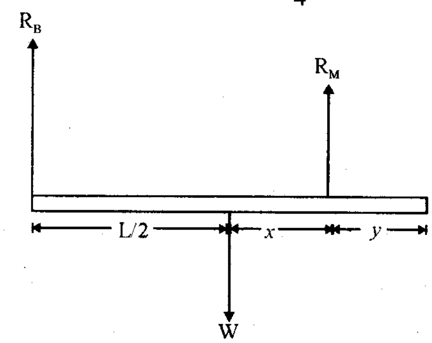
उदा. 55. एक व्यक्ति तथा एक लड़का एक एकसमान छड़ को क्षैतिजतः इस प्रकार ले जाते हैं कि लड़का छड़ के भार का 1/4 भाग उठा रहा है। यदि लड़का छड़ के एक सिरे पर हो, तब दूसरे सिरे से व्यक्ति की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल–

छड़ का भार = W

लड़के की प्रतिक्रिया $R_B = \frac{W}{4}$

व्यक्ति की प्रतिक्रिया $R_M = \frac{3W}{4}$



चित्र 7.80

$\therefore$ छड़ घूर्णन साम्यावस्था में है अतः

$$R_B \times \frac{L}{2} = R_m \times x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{W}{4} \times \frac{L}{2} = \frac{3W}{4} \times x$$

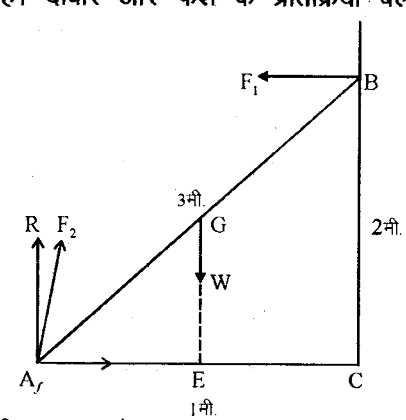
$$\Rightarrow \quad x = \frac{L}{6}$$

अतः दूसरे छोर से दूरी $y = \frac{L}{2} - x$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{2L}{6}$$

$$= \frac{L}{3}$$

उदा.56. 20 kg द्रव्यमान की एक 3m लंबी सीढ़ी एक घर्षणविहीन दीवार के साथ झुका कर टिकाई गई है। जैसा चित्र में दर्शाया गया है, इसका निचला सिरा फर्श पर दीवार से 1m की दूरी पर है। दीवार और फर्श के प्रतिक्रिया बल ज्ञात कीजिए।



चित्र 7.82

हल– दिया गया है:

सीढी की लम्बाई = 3 मीटर

सीढी के पैरों से दीवार की दूरी AC = 1 मीटर

अतः पाइथागोरस प्रमेय से

$$BC = \sqrt{(AB)^2 - (AC)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 - (1)^2}$$

$$= 2\sqrt{2} \text{ मीटर}$$

सीढी पर लगने वाले बल–

1. गुरुत्व केन्द्र G पर प्रभावी भार W
2. दीवार का प्रतिक्रिया बल F_1 जो कि दीवार पर अभिलम्बवत् है क्योंकि दीवार घर्षणहीन है।
3. फर्श का प्रतिक्रिया बल F_2

प्रतिक्रिया बल F_2 को दो घटकों में वियोजित किया जा सकता है अभिलम्बवत् प्रतिक्रिया बल R तथा घर्षण बल f

यह घर्षण बल f सीढी को दीवार से दूर फिसलने से रोकता है अतः इसकी दिशा दीवार की ओर है।

रेखीय साम्यावस्था की स्थिति में

$$R = W$$

इसी प्रकार क्षैतिज बल के लिए

$$f = F_1$$

घूर्णन साम्यावस्था की स्थिति में

दक्षिणावर्ती आघूर्ण = वामावर्ती आघूर्ण

$$F_1 \times BC = W \times AE$$

$$\Rightarrow \quad F_1 \times 2\sqrt{2} = W \times \frac{1}{2}$$

परन्तु $W = 20g = 20 \times 9.8$

$= 196$ न्यूटन

$\therefore$ $R = W = 196$ न्यूटन

$$F_1 = \frac{W}{4\sqrt{2}} = \frac{196}{4\sqrt{2}}$$

$= 34.6$ न्यूटन

$f = F_1 = 34.6$ न्यूटन

तथा $F_2 = \sqrt{f^2 + R^2}$

$$= \sqrt{(34.6)^2 + (196)^2}$$

$= 199$ न्यूटन

यदि बल F_2 क्षैतिज से α कोण बनाता है तब $\tan \alpha = \frac{R}{f} = 4\sqrt{2} = 5.6568$

$\therefore \quad \alpha \approx 80°$

उदा.57. एक वलय का जड़त्व आघूर्ण 0.40 किग्रा मी² है। यदि वह प्रति मिनट 2100 चक्कर लगा रही हो तो इसे 2 सेकण्ड में रोकने के लिए आवश्यक बल आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

हल: दिया गया है–

$I = 0.40$ किग्रा–मी.^{2}

आवृत्ति $n_0 = 2100$ चक्कर /मिनट

$= \frac{2100}{60}$ चक्कर/से.

$= 35$ चक्कर/से.

$\omega_0 = 2\pi n_0 = 2\pi \times 35 = 70\pi$ रेडियन/से.

$\omega = 0$ रेडियन/से.

कोणीय गति के प्रथम समीकरण से

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$0 = 70\pi - \alpha \times 2$$

(यहाँ समस्या में कोणीय त्वरण ऋणात्मक होगा।)

$\alpha = 35\,\pi$ रेडियन/से.^{2}

बल आघूर्ण $\tau = I\alpha = 0.40 \times 35 \times \frac{22}{7}$

$= 44$ न्यूटन–मीटर

उदा.58. एक कार 85 किमी./घण्टा की चाल से गतिशील है। उसके पहियों का व्यास 0.75 मी. है। पहियों की कोणीय चाल ज्ञात करो। यदि ब्रेक लगाने पर कार 70.7 मी. दूर जाकर रुकती है तो पहियों का कोणीय त्वरण क्या होगा?

हल: दिया गया है– $v = 85$ किमी./घण्टा

$= 85 \times \frac{1000}{3600} = 85 \times \frac{5}{18}$ मी./से.

$r = \frac{0.75}{2}$ मीटर

$= \frac{75}{200} = \frac{3}{8}$ मीटर $\qquad \because v = r\omega$

$$\therefore \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{85 \times \frac{5}{18}}{\frac{3}{8}}$$

$$= \frac{85 \times 5 \times 8}{18 \times 3}$$

$= \frac{1700}{27} = 63$ रेडियन/से.

न्यूटन के तृतीय समीकरण से–

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$0 = \left(85 \times \frac{5}{18}\right)^2 + 2 \times 9 \times 70.7$$

$$a = \frac{-\left(\frac{85 \times 5}{18}\right)^2}{2 \times 70.7}$$

कोणीय त्वरण $\alpha = \frac{a}{r} = \frac{-\left(\frac{85 \times 5}{18}\right)^2}{\frac{2 \times 70.7}{0.75/2}}$

$$= \frac{-\left(\frac{85\times5}{18}\right)^2}{70.7\times0.75}$$

$= -9.31$ रेडियन/से.^{2}

उदा.59. एक 2 kg-m^2 जड़त्व आघूर्ण वाले पहिए का प्रारम्भिक कोणीय वेग 50 rad./s है। इस पर 10N-m का बल आघूर्ण कार्यरत है, वह समय ज्ञात करो जितने में पहिया 80 rad/s के कोणीय वेग तक त्वरित होगा।

हल: दिया गया है–

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{10}{2}$$

$= 5$ रेडियन/सेकण्ड^2

$\omega_1 = 50$ रेडियन/सेकण्ड

$\omega_2 = 80$ रेडियन/सेकण्ड

$\tau = 10$ न्यूटन–मी.

$I = 2$ किग्रा–मी^{2}.

$$t = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\alpha}$$

$$= \frac{80-50}{5} = 6 \text{ सेकण्ड}$$

उदा.60. एक पुच्छल तारे की सूर्य से अधिकतम तथा न्यूनतम दूरी क्रमशः 14×10^9 तथा 7×10^7 मीटर है। यदि पुच्छल तारे की अधिकतम चाल 6×10^2 किमी/से. हो तो उसकी न्यूनतम चाल ज्ञात कीजिये।

हल: दिया गया है–

$r_{max} = 14 \times 10^9$ मीटर

$r_{min} = 7 \times 10^7$ मीटर

$v_{max} = 6 \times 10^2$ किमी./से.

$v_{min} = ?$

$\because$ $v = r\omega$

दोनों के लिए कोणीय वेग समान होगा

$\therefore$ $v \propto r$

$$\frac{v_{min}}{v_{max}} = \frac{r_{min}}{r_{max}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{min}}{6\times10^2} = \frac{7\times10^7}{14\times10^9}$$

$$v_{min} = \frac{6\times10^2\times7\times10^7}{14\times10^9}$$

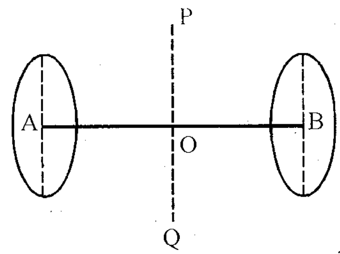
$= 3$ किमी/से.

उदा.61. दो वलयों को एक भारहीन छड़ पर समाक्षतः लगाया गया है और उनके केन्द्र A व B, 0.2 मीटर की दूरी पर है। प्रत्येक वलय की त्रिज्या 0.1 मीटर तथा द्रव्यमान 1.5 किग्रा. है- (i) A व B को मिलाने वाली अक्ष के सापेक्ष तथा (ii) AB के लम्बवत् और इसके मध्य बिन्दु से गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का परिकलन कीजिये।

हल: (i) A और B से गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष कुल जड़त्व आघूर्ण

$I = MR^2 + MR^2$

$= 2MR^2$



चित्र 7.83

$= 2 \times 1.5 \times (0.1)^2$

$= 0.03$ किग्रा.–मी.^{2}

(ii) AB के लम्बवत् मध्य बिन्दु O से पारित अक्ष PQ के लिए समान्तर अक्षों के प्रमेय का उपयोग करने पर–

वलय का स्वयं के व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I_d = \frac{1}{2}MR^2$$

अतः PQ के सापेक्ष प्रत्येक वलय का जड़त्व आघूर्ण

$$I = I_d + Md^2$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 + Md^2$$

$\therefore$ दोनों वलयों का PQ के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$2\left(\frac{1}{2}MR^2 + Md^2\right) = MR^2 + 2Md^2$$

$= 1.5 \times 0.1^2 + 2 \times 1.5 \times 0.1^2$

$= 0.045$ किग्रा.–मी.^{2}

उदा.62. दो समान घनत्व तथा मोटाई की चकतियों की त्रिज्या 1 : 2 अनुपात में है तो स्वयं के अक्ष के सापेक्ष उनके जड़त्व आघूर्ण किस अनुपात में होगें?

हल: माना चकतियों का घनत्व d, मोटाई t तथा त्रिज्याएँ R_1 तथा R_2 है।

प्रथम चकती का द्रव्यमान $M_1 = \pi R_1^2\, t\, d$

$\therefore$ स्वयं की अक्ष के परितः प्रथम चकती का जड़त्व आघूर्ण

$$I_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(\pi R_1^2 td)R_1^2$$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{1}{2}\pi td\, R_1^4$$

इसी प्रकार $I_2 = \frac{1}{2}\pi td\, R_2^4$

अतः $\frac{I_2}{I_1} = \frac{R_2^4}{R_1^4}$

दिया गया है– $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ $R_2 = 2R_1$

$\therefore$ $$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{2R_1}{R_1}\right)^4 = \frac{16}{1}$$

या $$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{16}$$

$\therefore$ $I_1 : I_2 = 1 : 16$

उदा.63. एक वलय बिना फिसले एक नत तल पर नीचे लुढ़कती है। तल पर 10 मीटर दूरी तय करने पर इसकी चाल क्या होगी? तल क्षैतिज से 30° कोण बनाता है तथा g = 9.8 मी./से.² ।

हलः नत तल पर लुढ़कने वाले पिण्ड का वेग

$$v = \left[\frac{2gs\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

दिया गया है– $s = 10$ मीटर, $\theta = 30°$ जिससे $\sin\theta = \frac{1}{2}$

वलय के लिये $\frac{K^2}{R^2} = 1$, $g = 9.8$ मी./से.²

$\therefore$ $$v = \left[\frac{2\times 9.8\times 10\times\frac{1}{2}}{1+1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$= \sqrt{49} = 7$ मी./से.

उदा.64. एक पहिया जिसका जड़त्व आघूर्ण 10 किग्रा. × मी.² है 10 चक्कर /मिनट की दर से घूम रहा है। पहिए को पूर्वमान से 5 गुना घुमाने पर कितना कार्य करना पड़ेगा?

हलः $\omega_2 = 5\omega_1$, $n_1 = \frac{10}{60}$ तथा $\omega_1 = 2\pi n_1$

$$\omega_1 = \frac{10\times 2\pi}{60} = \frac{\pi}{3}$$

घूर्णन गति में किया गया कार्य = घूर्णन गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$W = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}$$

$$W = \frac{1}{2}(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$W = \frac{10}{2}\left[\left(5\times\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{\pi^2}{9}\right]$$

$$= \frac{5\pi^2}{9}(25-1)$$

$$W = \frac{40\pi^2}{3}$$

$W = 131.4$ जूल

उदा.65. एक 4 किग्रा. द्रव्यमान का एक गोला एक समतल पर 0.5 मी./सेकण्ड के वेग से लुढ़क रहा है। इसकी कुल ऊर्जा ज्ञात करो।

हलः गोले की स्थानान्तरण गतिज ऊर्जा

$$E_t = \frac{1}{2}Mv^2$$

तथा गोले की घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2$$

परन्तु गोले का जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

तथा $v = \omega R$ $\quad\therefore \omega = \frac{v}{R}$

$\therefore$ $$E_r = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\cdot\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{5}Mv^2$$

$\therefore$ कुल ऊर्जा $= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{5}Mv^2 = 0.7Mv^2$

$= 0.7 \times 4 \times (0.5)^2 = 0.7$ जूल

उदा.66. एक ठोस गोला क्षैतिज तल पर सीधी रेखा में एक समान वेग से बिना फिसले लुढ़क रहा है उसकी स्थानान्तरण तथा घूर्णन गतिज ऊर्जाओं में अनुपात ज्ञात करो।

हलः स्थानान्तरण गतिज ऊर्जा $E_t = \frac{1}{2}Mv^2$

घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2$$

परन्तु ठोस गोले का जड़त्व आघूर्ण $I = \frac{2}{5}MR^2$

तथा गोले का रेखीय वेग $v = \omega R$ $\therefore$ $\omega = \frac{v}{R}$

$\therefore$ $$E_r = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}MR^2\frac{v^2}{R^2}$$

$$= \frac{1}{5}Mv^2$$

अतः $$\frac{E_t}{E_r} = \frac{\frac{1}{2}Mv^2}{\frac{1}{5}Mv^2} = \frac{5}{2}$$

उदा.67. एक 5 किग्रा. द्रव्यमान का ठोस गोला एक अनन्त धरातल पर बिना फिसले लुढ़क रहा है। धरातल का क्षैतिज से झुकाव 30° है तथा गुरुत्वीय त्वरण 9.8 मी./से.² है। गोले का तल पर त्वरण ज्ञात कीजिये।

हलः नत तल पर लुढ़क रहे गोले का त्वरण

$$a = \left(\frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}}\right)$$

गोले के लिए–

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = MK^2$$

$$\therefore \quad \frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{5} = 0.4$$

अतः $$a = \frac{g\sin\theta}{1+0.4}$$

$$= \frac{9.8\times\sin 30^\circ}{1.4} = \frac{7}{2}$$

$$= 3.5 \text{ मी./से.}^2$$

उदा.68. एक 0.03 मीटर व्यास का वृत्ताकार सिक्का जिसका द्रव्यमान 0.01 किग्रा. है। एक समतल पर 0.04 मी./से. के वेग से लुढ़क रहा है तो उसकी कुल ऊर्जा ज्ञात करो।

हलः दिया गया है– सिक्के का व्यास = 0.03 मी. = 3×10^{-2} मीटर

त्रिज्या $$R = \frac{3\times10^{-2}}{2} = 1.5\times10^{-2} \text{ मी.}$$

$M = 0.01$ किग्रा. $= 1 \times 10^{-2}$ किग्रा. $v = 4 \times 10^{-2}$ मी./से.

स्थानान्तरण गतिज ऊर्जा $E_t = \frac{1}{2}Mv^2$

घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$\therefore$ रेखीय वेग $v = R\omega \therefore \omega = \frac{v}{R}$

सिक्के का स्वयं की अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण $I = \frac{1}{2}MR^2$

$$\text{कुल ऊर्जा} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}MR^2\times\frac{v^2}{R^2}$$

$$\text{कुल ऊर्जा} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2$$

$$= \frac{3}{4}Mv^2$$

$$\text{कुल ऊर्जा} = \frac{3}{4}\times10^{-2}\times(4\times10^{-2})^2$$

$$\text{कुल ऊर्जा} = \frac{3}{4}\times10^{-2}\times16\times10^{-4}$$

$$= 12 \times 10^{-6} \text{ जूल}$$

उदा.69. एक रील पर धागा लिपटा हुआ है। यदि धागे के स्वतन्त्र सिरे को पकड़ कर रील को पृथ्वी के सापेक्ष गुरूत्वीय त्वरण में नीचे गिरने दिया जाये तो *a* त्रिज्या वाली रील का त्वरण ज्ञात कीजिये।

हलः रील का जड़त्व आघूर्ण $I = \frac{MR^2}{2}$

ऊर्जा संरक्षण के नियम से

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right)$$

$$\because \quad \omega = \frac{v}{R}$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2$$

$$Mgh = \frac{3}{4}Mv^2$$

$$\therefore \quad gh = \frac{3}{4}v^2 \quad \ldots(1)$$

गति के तृतीय समीकरण से

$$v^2 = u^2 + 2ah \quad \because u = 0$$

$$v^2 = 2ah \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$gh = \frac{3}{4}\times 2ah$$

$$\Rightarrow \quad g = \frac{3}{2}a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{2}{3}g \quad \ldots(3)$$

उदा.70. एक बेलन किसी नत तल पर फिसल कर नीचे पहुँचने में t_1 तथा बिना फिसले लुढ़क कर नीचे पहुँचने में t_2 समय लेता है। t_1 तथा t_2 समय का अनुपात ज्ञात करो।

हलः बेलन का किसी नत तल पर बिना फिसले लुढ़कने में लगा समय–

$$t_1 = \left[\frac{2s}{g\sin\theta}\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

स्वयं के अक्ष के प्रति बेलन का जड़त्व आघूर्ण,

$$I = MK^2 = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\therefore \quad \frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad t_1 = \left[\frac{3s}{g\sin\theta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

बेलन का उसी नत तल पर फिसलने में लगा समय (K=0)

$$t_1 = \left[\frac{2s}{g\sin\theta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(क्योकि तल के अनुदिश त्वरण $g\sin\theta$ होगा।)

$$\therefore \quad \frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

अर्थात् $t_1 : t_2 = \sqrt{3} : \sqrt{2}$

उदा.71. 0.1 किग्रा. द्रव्यमान व 0.10 मी. त्रिज्या का एक बेलन नत तल से बिना फिसले लुढ़क रहा है। यदि नत तल का ढाल 10 में 1 तथा लम्बाई 5 मीटर हो तो बेलन की कुल ऊर्जा की गणना कीजिए।

हलः दिया गया है– M = 0.1 किग्रा., R = 0.10 मीटर

माना किसी नत तल का झुकाव कोण θ है तथा ऊँचाई h है। कोई बेलन तल के शीर्ष बिन्दु से लुढ़कना शुरू करता है।

बेलन की कुल ऊर्जा = स्थानान्तरण गतिज ऊर्जा + घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$E = E_t + E_r$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}MK^2 \times \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2\left[1 + \frac{K^2}{R^2}\right]$$

बेलन के लिए $\frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$

$$\text{कुल ऊर्जा} = \frac{1}{2}Mv^2\left[1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{3}{4}Mv^2 \quad \ldots(1)$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{2gs\sin\theta}{\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)}$$

$$v^2 = \frac{2gs\sin\theta}{\left(1 + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad v^2 = \frac{4}{3}gs\sin\theta$$

$$v^2 = \frac{4}{3} \times 9.8 \times 5 \times \frac{1}{10} \quad \ldots(2)$$

समी. (2) का मान समी. (1) में रखने पर

$$\text{कुल ऊर्जा} = \frac{3}{4}Mv^2$$

$$= \frac{3}{4} \times 0.1 \times \frac{4}{3} \times 9.8 \times \frac{1}{2}$$

= 0.49 जूल

उदा.72. 100 किग्रा-मी^{2} जडत्व आघूर्ण का घूर्णी मंच 10 सेकण्ड में 1 घूर्णन कर रहा है। एक व्यक्ति जिसका द्रव्यमान 50 किग्रा है मंच के केन्द्र पर खडा है। यदि व्यक्ति त्रिज्या पर केन्द्र से 2 मीटर दूरी तक चलता है तो घूर्णी मंच का कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

हलः दिया गया है–

I = 100 किग्रा. × मी.^{2}
T = 10 सेकण्ड
m = 50 किग्रा.
r = 2 मीटर

$$\because \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10}$$

माना कि घूर्णीमंच का कोणीय वेग ω' है अतः कोणीय संवेग संरक्षण नियम से–

$$I\omega = (I + mr^2)\omega'$$

$$100 \times \frac{2\pi}{10} = (100 + 50 \times 4)\omega'$$

$$\Rightarrow \quad 20\pi = 300\omega'$$

$$\therefore \quad \omega' = \frac{20\pi}{300}$$

$$= \frac{\pi}{15} \text{ रेडियन/से.}$$

उदा.73. M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की एक पतली वृत्ताकार चकती ω कोणीय वेग के अपने तल के लम्बवत् तथा गुरुत्व केन्द्र में से होकर गुजरने वाले अक्ष के परितः घूर्णन कर रही है। $\frac{M}{4}$ द्रव्यमान व उसी आकार की एक दूसरी चकती पहली चकती के ऊपर धीरे से सह-अक्षीय रूप में (coaxially) रख दी जाती है। निकाय का नवीन कोणीय वेग क्या होगा?

हलः कोणीय संवेग संरक्षण नियम से $I\omega = I'\omega'$

या
$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega = \frac{1}{2}\left(M + \frac{M}{4}\right)R^2\omega'$$

$$\frac{1}{2}MR^2\omega = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4}MR^2\omega'$$

$$\omega = \frac{5}{4}\omega'$$

$$\omega' = \frac{4}{5}\omega$$

$\therefore$ निकाय का नवीन कोणीय वेग $\omega' = \frac{4}{5}\omega$

उदा.74. एक दृढ पिण्ड का द्रव्यमान 0.2 किग्रा. है। यह एक क्षैतिज अक्ष के प्रति दोलन करती है। निलम्बन बिन्दु गुरूत्व केन्द्र से 0.2 मी. दूर है। यदि तुल्य सरल लोलक की लम्बाई 0.35 मी. है तो (i) गुरूत्व केन्द्र से पारित क्षैतिज अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण तथा (ii) निलम्बन केन्द्र से पारित क्षैतिज अक्ष के प्रति जडत्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

हलः तुल्य सरल लोलक की लम्बाई

$$L = \frac{K^2}{l} + l$$

$L = 0.35$ मी., $l = 0.20$ मी.

$$\therefore \quad 0.35 = \frac{K^2}{0.20} + 0.20$$

या $\frac{K^2}{0.20} = 0.15$

$\Rightarrow \quad K^2 = 0.15 \times 0.20$

$= 0.03$ मी.^{2}

(i) गुरूत्व केन्द्र से पारित क्षैतिज अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण

$I_G = MK^2 = 0.2 \times .03$

$= 0.006$ किग्रा.–मी.^{2}

(ii) निलम्बन केन्द्र से पारित क्षैतिज अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण (समान्तर अक्षों के प्रमेय से)

$I = I_G + Md^2$

$\therefore \quad d = l = 0.2$ मी.

$\therefore \quad I = 0.006 + 0.2 \times 0.2^2$

$= 0.014$ किग्रा.–मी.^{2}

पाठ्यपुस्तक के प्रश्न

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र. 1. दृढ पिण्ड किसे कहते हैं ?

हल: ऐसे पिण्ड जिन पर बल या बल आघूर्ण लगाने से उनके कणों की स्थिति में आपेक्षिक परिवर्तन न हो, दृढ़ पिण्ड कहलाते हैं।

प्र. 2 द्रव्यमान केन्द्र की परिभाषा दीजिये।

हल: पिण्ड का वह बिन्दु जिस पर पिण्ड का सम्पूर्ण द्रव्यमान केन्द्रित माना जाता है एवं जिसके परित: पिण्ड के विभिन्न कणों के द्रव्यमान तथा उनके स्थिति सदिशों के गुणनफलों (अर्थात् द्रव्यमान आघूर्णों) का योग शून्य होता है, द्रव्यमान केन्द्र कहलाता है।

प्र. 3 क्या किसी पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र, पिण्ड के बाहर हो सकता है ?

हल: हाँ, किसी पिण्ड का द्रव्यमान केन्द्र पिण्ड से बाहर हो सकता है, क्योंकि द्रव्यमान केन्द्र पर द्रव्यमान का होना आवश्यक नहीं होता है।

प्र. 4 किसी निकाय के रेखीय वेग एवं कोणीय वेग में सम्बन्ध लिखिये।

हल: किसी निकाय के रेखीय वेग एवं कोणीय वेग में निम्न संबंध है।

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

जो पिण्ड के सभी कणों के लिए सत्य है। सभी कणों के कोणीय वेग $\vec{\omega}$ समान होते है किन्तु घूर्णन अक्ष से दूरियाँ भिन्न-भिन्न होने के कारण $\vec{R}$ भिन्न होता है, अत: रेखीय वेग भिन्न-भिन्न होते हैं।

प्र. 5 हाथ की एक घडी के मिनट वाली काँटे की कोणीय चाल **rad s^{-1}** में क्या होती है ?

हल: हाथ की घड़ी के मिनट वाली काँटे का आवर्त्तकाल T = 60 मिनट

या $T = 60 \times 60 = 3600$ सेकण्ड

$\therefore$ मिनट वाली काँटे की कोणीय चाल $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\omega = \frac{2\pi}{3600} = \frac{\pi}{1800} \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

प्र. 6 जड़त्व आघूर्ण से क्या अभिप्राय है?

हल: प्रत्येक वस्तु अपनी घूर्णन अवस्था को स्वत: बदलने में असमर्थ होती है। किसी बल युग्म के प्रभाव में किसी अक्ष के चारों ओर घूमती हुई वस्तु का वह गुण जो उसकी घूर्णन गति में परिवर्तन का विरोध करता है, उस वस्तु का उस घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण कहलाता है।

प्र. 7 किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण किन–किन घटकों पर निर्भर करता है?

हल: किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण निम्न घटकों पर निर्भर करता है :

(i) वस्तु के द्रव्यमान पर

(ii) वस्तु की घूर्णन अक्ष पर

(iii) वस्तु की आकृति एवं आकार पर

(iv) दी गई आकृति, आकार, द्रव्यमान तथा घूर्णन अक्ष के लिये जड़त्व आघूर्ण द्रव्यमान वितरण पर भी निर्भर करता है

प्र. 8 एक वलय का उसके व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण कितना होता है?

हल: एक वलय का उसके व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

जहाँ M = वलय का द्रव्यमान एवं R = उसकी त्रिज्या है।

प्र. 9 किसी चकती के जड़त्व आघूर्ण का मान न्यूनतम किस अक्ष के प्रति होता है?

हल: किसी चकती के जड़त्व आघूर्ण का मान उसके व्यास से पारित अक्ष के सापेक्ष न्यूनतम होता है।

प्र.10 किसी ठोस गोले का उसके स्पर्श रेखा के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या का मान लिखिये।

हल: किसी ठोस गोले का उसकी स्पर्श रेखा के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या,

$$K = R \times \sqrt{\frac{7}{5}}$$

जहाँ R गोले की त्रिज्या है।

प्र.11 कोणीय संवेग की इकाई लिखिये।

हल: कोणीय संवेग की इकाई = जूल सेकण्ड या (JS) या किग्रा × मी^{2}/ सेकण्ड (Kgm^2s^{-1}) या न्यूटन मीटर सेकण्ड (Nms)

प्र.12. एक व्यक्ति घूमती मेज पर भुजायें फैलाये बैठा है अगर वह भुजायें सिकोड ले तो जडत्व आघूर्ण पर क्या प्रभाव पडेगा?

हलः जड़त्व आघूर्ण घट जाता है।

प्र.13. यदि कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर शून्य हो तो पिण्ड पर कार्यकारी बल आघूर्ण का मान क्या होगा ?

हलः यदि कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$, तब पिण्ड पर कार्यकारी बल आघूर्ण $\vec{\tau}=0$

प्र.14. यदि कोई वस्तु घूर्णन कर रही है तो क्या निश्चित रूप से उस पर कोई बल आघूर्ण लग रहा है ?

हलः यदि कोई वस्तु घूर्णन गति कर रही है तो यह आवश्यक नहीं है कि उस पर कोई बल आघूर्ण लग रहा हो क्योंकि बल आघूर्ण तो केवल कोणीय त्वरण के लिये आवश्यक होता है।

प्र.15. बल आघूर्ण, जड़त्व आघूर्ण व कोणीय त्वरण के मध्य सम्बन्ध को लिखिये।

हलः बल आघूर्ण τ, जड़त्व आघूर्ण I व कोणीय त्वरण α में सम्बन्ध

$$\tau = I\alpha$$

प्र.16. पेचकस का हत्था चौड़ा क्यों बनाया जाता है ?

हलः पेचकस के हत्थे से पेच कसने के लिये उसे घूर्णन गति कराई जाती है और घूर्णन गति बल आघूर्ण पर निर्भर करती है तथा बल आघूर्ण τ का मान बल एवं बल की घूर्णन अक्ष से दूरी का गुणनफल होता है। घूर्णन अक्ष से बल की दूरी बढ़ाकर बल आघूर्ण बढ़ाने के लिये ही पेचकस का हत्था चौड़ा बनाया जाता है।

प्र.17. यदि कोई वस्तु अपनी अक्ष के परितः घूमने के साथ–साथ सरल रेखा में भी गतिमान हो तो उसकी कुल गतिज ऊर्जा का मान लिखिये।

हलः कुल गतिज ऊर्जा = घूर्णन गतिज ऊर्जा + स्थानान्तरणीय गतिज ऊर्जा

$$\text{या } E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

प्र.18. नत तल पर लोटनी गति करते पिण्ड के वेग का सूत्र लिखिये।

हलः पिण्ड का $V = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\frac{K^2}{R^2}\right)}}$

(h = नत तल की ऊँचाई, K घूर्णन त्रिज्या, R पिण्ड की त्रिज्या हैं।)

प्र.19. दृढ़ पिण्डों के यांत्रिक संतुलन की शर्तें लिखिये।

हलः दृढ पिण्डों के यांत्रिक संतुलन की शर्तें

(1) स्थानान्तरीय संतुलन के लिये,

परिणामी बाह्य बल $\vec{F} = \Sigma\vec{F}_i = 0$

(2) घूर्णी संतुलन के लिये,

परिणामी बाह्य बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \Sigma\vec{\tau}_i = 0$

प्र.20. कोणीय संवेग, जड़त्व आघूर्ण एवं कोणीय वेग के सम्बन्ध को लिखिये।

हलः कोणीय संवेग L, जड़त्व आघूर्ण I तथा कोणीय वेग ω में सम्बन्ध

$$L = I\omega$$

प्र.21. यदि पृथ्वी का व्यास सिकुड़कर आधा रह जाये तो दिन कितने घंटे का होगा?

हलः यदि पृथ्वी का व्यास सिकुड कर आधा रह जाये तो दिन 6 घंटे का होगा।

$$\because I\times\omega = I'\times\omega' \Rightarrow \frac{2}{5}MR^2\times\frac{2\pi}{T} = \frac{2}{5}M\left(\frac{R}{2}\right)^2\times\frac{2\pi}{T'}$$

$$\Rightarrow T = 4T' \Rightarrow T' = \frac{T}{4} = \frac{24}{4} = 6 \text{ घंटे}$$

लघूत्तरात्मक प्रश्न

प्र.1. किसी द्विकण तंत्र के द्रव्यमान केन्द्र के लिये द्रव्यमान एवं दूरी में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

हलः अनुच्छेद 7.3 देखें।

प्र.2. रेखीय वेग एवं कोणीय वेग में सदिश सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

हलः अनुच्छेद 7.10 देखें।

प्र.3. घूर्णन गति की तीन समीकरणों को लिखिये।

हलः घूर्णन गति के समीकरण

$$\omega = \omega_0 + \alpha\cdot t \quad ...(1)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\cdot t + \frac{1}{2}\alpha\cdot t^2 \quad ...(2)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

जहाँ, ω_0 = प्रारंभिक कोणीय चाल

ω = t समय पश्चात् कोणीय चाल

α = कोणीय त्वरण

θ_0 = प्रारंभिक कोणीय स्थिति

θ = t समय पश्चात् कोणीय स्थिति

प्र.4. जड़त्व आघूर्ण के लिये लम्बवत् अक्ष प्रमेय का कथन दीजिये।

हलः जड़त्व आघूर्ण के लिये लम्बवत् अक्ष प्रमेय

किसी समतल पटल का उसके तल के लम्बवत् किसी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण, उसके तल में स्थित दो पारस्परिक लम्बवत् अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्णों के योग के बराबर होता है, जबकि अभीष्ट अक्ष दोनों लम्बवत् अक्षों के कटान बिन्दु में से होकर जाती है

अर्थात् $I_z = I_x + I_y$

जहाँ पिण्ड के तल x–y में दो लम्बवत् अक्षों के सापेक्ष आघूर्ण I_x व I_y हैं तथा इन दोनों के कटान बिन्दु से गुजरने वाली इनके तल के अभिलम्ब अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I_z है।

प्र.5. जड़त्व आघूर्ण के लिये समान्तर अक्ष प्रमेय को लिखिये।

हलः जड़त्व आघूर्ण के लिये समान्तर अक्ष प्रमेय

किसी पिण्ड का किसी बिन्दु (O) से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (I_0), उस पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र (C) से गुजरने वाली समान्तर अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (I_C) और $M.r^2$ के योगफल के बराबर होता है।

अर्थात् $I_0 = I_C + M.r^2$

जहाँ M पिण्ड का सम्पूर्ण द्रव्यमान है तथा r बिन्दु O एवं C से गुजरने वाली समान्तर अक्षों के बीच की दूरी है।

प्र.6. वलय के केन्द्र से गुजरने वाली उसके तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

हल: अनुच्छेद 7.14 का (a) देखें।

प्र.7. ठोस बेलन का उसके अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

हल: अनुच्छेद 7.16 का (a) देखें।

प्र.8 किसी पिण्ड के लिये बल आघूर्ण एवं जड़त्व आघूर्ण में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

हल: अनुच्छेद 7.24 देखें।

प्र.9. कोणीय संवेग संरक्षण नियम को लिखिये। इस पर आधारित दो उदाहरण लिखिये।

हल: **अनुच्छेद 7.26 पर देखें।**

प्र.10 एक पिण्ड जो एक समान कोणीय वेग से एक स्थिर अक्ष के चारों और घूर्णन करता है, की गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

हल: अनुच्छेद 7.23 पर देखें।

प्र.11. नततल पर लोटनी गति कर रही वस्तु के त्वरण के लिये सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।

हल: अनुच्छेद 7.26 पर देखें।

प्र.12 जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व क्या है ?

हल: अनुच्छेद 7.12 पर देखें।

प्र.13 किसी पतली छड़ का उसकी लम्बाई के लम्बवत् किनारे पर स्थित अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

हल: अनुच्छेद 7.19 का (b) देखें।

प्र.14. नततल पर लोटनी गति कर रही किसी वस्तु की तली के निचले सिरे पर कुल गतिज ऊर्जा का सूत्र लिखिये।

हल: नत तल पर लोटनी गति कर रही किसी वस्तु की तली के निचले सिरे पर कुल गतिज ऊर्जा

E = स्थानान्तरणीय गतिज ऊर्जा + घूर्णी गतिज ऊर्जा

या $E = E_t + E_r$

या $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

किसी पिण्ड के लिए

$I = mk^2$ जहाँ k घूर्णी त्रिज्या

तथा $\omega = \frac{v}{r}$. r पिण्ड की त्रिज्या

$$\therefore \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mk^2 \cdot \frac{v^2}{r^2}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{k^2}{r^2}\right)$$

यही गतिज ऊर्जा का अभीष्ट सूत्र है।

प्र.15. कोणीय संवेग व कोणीय वेग में सम्बन्ध स्थापित कीजिये।

हल: अनुच्छेद 7.24 पर देखें।

निबन्धात्मक प्रश्न

1. द्रव्यमान केन्द्र से क्या अभिप्राय है ? दो कणों के निकाय के द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति का व्यंजक प्राप्त कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 7.3 तथा 7.4 पर देखें।

2. जड़त्व आघूर्ण प्रमेयों का कथन दीजिये तथा इनको सिद्ध भी कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 7.13 पर देखें।

3. किसी चकती का उसके केन्द्र से पारित तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 7.15 का भाग (a) पर देखें।

4. एक ठोस बेलन का उसकी लम्बाई के लम्बवत् एवं द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 7.16 का भाग (b) पर देखें।

5. किसी ठोस गोले का इसके व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 7.17 का भाग (a) पर देखें।

6. आयताकार छड़ का उसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली व छड़ की लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण के सूत्र को व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 7.19 के (a) भाग पर देखें।

7. किसी खोखले गोले का उसके व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 7.18 के भाग (a) पर देखें।

8. सिद्ध कीजिये कि एक पिण्ड की जो घूर्णन गति में है, गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}I\omega^2$ है।

उत्तर- अनुच्छेद 7.23 पर देखें।

9. एक समान पतली छड़ का जड़त्व आघूर्ण उसके एक सिरे से गुजरते तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष ज्ञात करो।

उत्तर- अनुच्छेद 7.19 के 1 (b) भाग पर देखें।

10. नततल पर लोटनी गति कर रही वस्तु के लिये वेग व त्वरण के लिये सूत्र का मान व्युत्पन्न कीजिये।

उत्तर- अनुच्छेद 7.26 पर देखें।

आंकिक प्रश्न

प्र.1. दो कण जिनके वेग क्रमशः $(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ तथा $(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

cm s^{-1} है, द्विकण निकाय का निर्माण करते हैं। यदि कणों के द्रव्यमान क्रमशः **5 g** व **2 g** हों तो निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का वेग क्या होगा ?

हल: प्रथम कण का वेग $\vec{v}_1 = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ cm s^{-1}

द्वितीय कण का वेग $\vec{v}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ cm s^{-1}

प्रथम कण का द्रव्यमान $m_1 = 5g$

द्वितीय कण का द्रव्यमान $m_2 = 2g$

$\therefore$ निकाय के द्रव्यमान केन्द्र का वेग $\vec{v}_{CM} = \dfrac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{(m_1 + m_2)}$

या $$\vec{v}_{CM} = \frac{5(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 2(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})}{(5+2)}$$

या $$\vec{v}_{CM} = \frac{5\hat{i} + 5\hat{j} - 5\hat{k} + 6\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}}{7}$$

या $$\vec{v}_{CM} = \frac{11\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}}{7}$$

$$\vec{v}_{CM} = \left(\frac{11}{7}\hat{i} + \frac{1}{7}\hat{j} - \frac{3}{7}\hat{k}\right) \text{cm s}^{-1}$$

प्र.2. एक पहिया जो विरामावस्था में है, **3.0 rad s^{-2}** के कोणीय त्वरण के अन्तर्गत **2.0 s** तक घूमता है। इस समयान्तराल में पहिया कितना कोणीय वेग अर्जित करेगा तथा उसमें कितना विस्थापन होगा ?

हल: प्रारंभिक कोणीय वेग $\omega_0 = 0$

कोणीय त्वरण $\alpha = 3.0$ rad s^{-2}

समय $t = 2.0$ s

अंतिम (अर्जित) कोणीय वेग $\omega = ?$

कोणीय विस्थापन $\theta = ?$

$\because \quad \omega = \omega_0 + \alpha.t = 0 + 3 \times 2 = 6$ rad s^{-1}

$\therefore \quad \omega = 6$ rad s^{-1}

$$\theta = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

या $$\theta = 0 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 2 = 0 + 6$$

$\therefore \quad \theta = 6$ radian

प्र.3. एक कार जो विराम अवस्था में है, **40 rad s^{-2}** के कोणीय त्वरण से त्वरित होती है। यह कितने समय में **800** चक्कर/मिनट का कोणीय वेग प्राप्त करेगी ?

हल: कार का प्रारंभिक कोणीय वेग $\omega_0 = 0$

कोणीय त्वरण $\alpha = 40$ rad s^{-2}

समय $t = ?$

अंतिम कोणीय वेग $\omega = 800 \dfrac{\text{चक्कर}}{\text{मिनट}} = \dfrac{800 \times 2\pi}{60}$ rad s^{-1}

या $$\omega = \frac{80}{3} \text{ rad s}^{-1}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha.t$$

या $$\omega = 0 + \alpha.t$$

$\therefore$ $$t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\frac{80}{3}\pi}{40} = \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3} \times 3.14$$

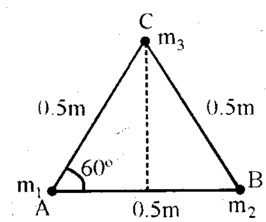
$\therefore \quad t = 2.09$ s

प्र.4. एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर रखे गये तीन कणों का द्रव्यमान केन्द्र ज्ञात कीजिये, कणों के द्रव्यमान क्रमशः **100 g, 150 g** एवं **200 g** हैं। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई **0.5 m** है।

हल: समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर रखे गये तीन कणों के द्रव्यमान क्रमशः

$m_1 = 100g, m_2 = 150g, m_3 = 200g$

त्रिभुज की प्रत्येक भुजा a = 0.5 m



चित्र 7.84

मान लें कि द्रव्यमान m_1 वाले शीर्ष बिन्दु A पर निर्देश बिन्दु (0, 0) है तब द्रव्यमान m_2 वाले शीर्ष बिन्दु B के निर्देशांक (0.5, 0) तथा द्रव्यमान m_3 वाले शीर्ष बिन्दु C के निर्देशांक

$(0.5 \cos 60^\circ, 0.5 \sin 60^\circ)$ अर्थात् $\left(0.5 \times \dfrac{1}{2}, \dfrac{0.5\sqrt{3}}{2}\right)$

यदि त्रिकण निकाय के द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक (x_{CM}, y_{CM}) हों तो

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{(m_1 + m_2 + m_3)}$$

या $$x_{CM} = \frac{100 \times 0 + 150 \times 0.5 + 200 \times \frac{0.5}{2}}{(100 + 150 + 200)}$$

या $$x_{CM} = \frac{0 + 75 + 50}{450} = \frac{125}{450}$$

$\therefore$ $$x_{CM} = \frac{5}{18} \text{ m}$$

तथा $$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{(m_1 + m_2 + m_3)}$$

या
$$y_{CM} = \frac{100 \times 0 + 150 \times 0 + 200 \times \frac{0.5\sqrt{3}}{2}}{(100 + 150 + 200)}$$

∴
$$y_{CM} = \frac{50\sqrt{3}}{450} = \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\ \text{m}$$

∴ द्रव्यमान केन्द्र के निर्देशांक $\left(\frac{5}{18}\text{m}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\text{m}\right)$

प्र.5.. एक घूर्णन करते हुए पिण्ड में **4 rad s^{-2}** का कोणीय त्वरण उत्पन्न करने के लिये **2.0 × 10^{-4} N m** का बल आघूर्ण लगाना पड़ता है। पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण क्या है?

हल: कोणीय त्वरण $\alpha = 4$ rad s^{-2}

बल आघूर्ण $\tau = 2.0 \times 10^{-4}$ Nm

पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण I = ?

∵ $\tau = I.\alpha$

∴
$$I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{2.0}{4} \times 10^{-4}$$

या $I = 0.5 \times 10^{-4}$ kgm^2

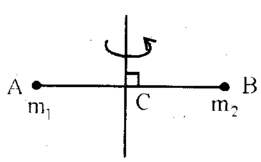
प्र.6. एक द्विपरमाणुक अणु **(diatomic molecule)** में दो परमाणुओं का द्रव्यमान ***m_1*** तथा ***m_2*** है। इन परमाणुओं के बीच अचर दूरी ***a*** मीटर है। निकाय का जड़त्व आघूर्ण, निकाय के गुरूत्वीय केन्द्र तथा परमाणुओं को जोडने वाली रेखा के लम्बवत् गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष ज्ञात करो।

हल: द्विपरमाणुक अणु में दो परमाणुओं के द्रव्यमान m_1 व m_2

इन परमाणुओं के बीच दूरी AB = a मीटर

निकाय का जड़त्व आघूर्ण (गुरुत्वीय केन्द्र तथा परमाणुओं को जोड़ने वाली रेखा के लम्बवत् गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष) I = ?

मान लें कि बिन्दु A, जिस पर m_1 द्रव्यमान वाला परमाणु स्थित है मूल निर्देश बिन्दु (0, 0) है।



चित्र 7.85

तब m_2 द्रव्यमान वाले परमाणु युक्त बिन्दु B के निर्देशांक (a, 0) तथा गुरुत्वीय केन्द्र C के निर्देशांक (x, 0) होंगे

∴
$$x = \frac{m_1 \times 0 + m_2 \times a}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow x = \frac{m_2 a}{(m_1 + m_2)}$$

$$AC = x = \frac{m_2 a}{(m_1 + m_2)}$$

तब
$$CB = (a - x) = a - \frac{m_2 a}{m_1 + m_2} = a\left(1 - \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}\right)$$

या
$$CB = \frac{(m_1 \cdot a)}{(m_1 + m_2)}$$

∴ निकाय का जड़त्व आघूर्ण

$$I = m_1 \cdot (AC)^2 + m_2 (CB)^2$$

$$I = m_1 \cdot \left(\frac{m_2 a}{(m_1 + m_2)}\right)^2 + m_2 \cdot \left(\frac{m_1 a}{m_1 + m_2}\right)^2$$

या
$$I = \frac{m_1 m_2 a^2}{(m_1 + m_2)^2}(m_2 + m_1)$$

या
$$I = \frac{m_1 m_2 a^2}{(m_1 + m_2)}$$

प्र.7 एक वृत्ताकार चकती जिसकी त्रिज्या **0.5 m** एवं द्रव्यमान **25 kg** है, अपनी धुरी पर **120** चक्कर/मिनट की रफ्तार से घूर्णन करती है। चकती का जडत्व आघूर्ण एवं घूर्णन की गतिज ऊर्जा का परिकलन कीजिये।

हल: वृत्ताकार चकती की त्रिज्या R = 0.5m

वृत्ताकार चकती का द्रव्यमान M = 25 kg

कोणीय वेग ω = 120 चक्कर/मिनट

$$\omega = \frac{120 \times 2\pi}{60}\ \text{रेडियन/सेकण्ड}$$

या $\omega = 4\pi$ रेडियन/सेकण्ड

(i) ∴ चकती का उसकी धुरी के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

या
$$I = \frac{1}{2} \times 25 \times 0.5 \times 0.5 = \frac{6.25}{2}$$

$$I = 3.125\ \text{kgm}^2$$

(ii) घूर्णन की गतिज ऊर्जा

$$E_r = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$E_r = \frac{1}{2} \times 3.125 \times (4\pi)^2$$

$$E_r = \frac{1}{2} \times 3.125 \times 16\pi^2$$

$$E_r = 25\pi^2 = 25 \times (3.14)^2$$

$$E_r = 25 \times 9.86$$

$$E_r = 246.50\ \text{J}$$

या $E_r = 2.465 \times 10^{2}$ J

प्र.8 एक ***M*** द्रव्यमान तथा ***l*** लम्बाई की पतली छड़ का जड़त्व आघूर्ण उसकी लम्बाई के लम्बवत् तथा एक सिरे से ***l/4***

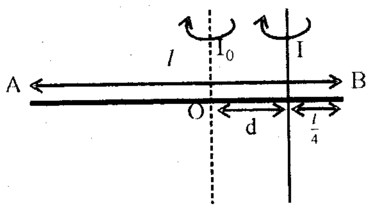
बिन्दु से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष क्या होगा।

हल: पतली छड़ की लम्बाई = l

छड़ का द्रव्यमान = M

छड़ की लम्बाई के लम्बवत् तथा उसके गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I_0 = \frac{Ml^2}{12}$$



चित्र 7.86

छड़ की लम्बाई के लम्बवत् तथा एक सिरे $\frac{l}{4}$ दूरी के बिन्दु से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण, समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$$I = I_0 + M.d^2$$

यहाँ $$d = \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right) = \frac{l}{4}$$

$$\therefore \quad I = \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{4}\right)^2$$

$$I = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{16} = Ml^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{16}\right)$$

या $$I = Ml^2\left(\frac{4+3}{48}\right)$$

$$\therefore \quad I = \frac{7}{48}Ml^2$$

प्र.9. गोलीय पृथ्वी का अपनी स्वयं की अक्ष के सापेक्ष घूर्णन के कोणीय संवेग की गणना कीजिये।
(पृथ्वी का द्रव्यमान **6×10^{24} kg** तथा त्रिज्या **6.4×10^6 m**)

हल: पृथ्वी का द्रव्यमान $M = 6 \times 10^{24}$ kg

पृथ्वी की त्रिज्या $R = 6.4 \times 10^6$ kg

गोलीय पृथ्वी का अपनी स्वयं की अक्ष के सापेक्ष घूर्णन का कोणीय संवेग

$$L = I \times \omega \qquad \because I = \frac{2}{5}MR^2$$

या $$L = \frac{2}{5}MR^2 \times \frac{2\pi}{T} \qquad \text{तथा } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

(पृथ्वी के लिये T = 24 घंटे = 24 × 60 × 60 सेकण्ड)

$$\therefore L = \frac{2}{5} \times 6 \times 10^{24} \times 6.4 \times 10^6 \times 6.4 \times 10^6 \times \frac{2 \times 3.14}{24 \times 60 \times 60}$$

$$\therefore \quad L = 7.14 \times 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

प्र.10. एक खोखले गोले का द्रव्यमान **1 kg** है एवं उसकी भीतरी व बाहरी त्रिज्या क्रमशः **0.1 m** एवं **0.2 m** है। गोले के व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण एवं परिभ्रमण त्रिज्या ज्ञात करो।

हल: खोखले गोले का द्रव्यमान M = 1 kg

गोले की भीतरी त्रिज्या $R_1 = 0.1$ m

गोले की बाहरी त्रिज्या $R_2 = 0.2$ m

खोखले गोले का (गोलीय कोश का) व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{2}{5}M\frac{\left(R_2^5 - R_1^5\right)}{\left(R_2^3 - R_1^3\right)}$$

या $$I = \frac{2}{5} \times \frac{1\left[(0.2)^5 - (0.1)^5\right]}{\left[(0.2)^3 - (0.1)^3\right]}$$

या $$I = \frac{2}{5} \times \frac{(0.00032 - 0.00001)}{(0.008 - 0.001)}$$

या $$I = \frac{2}{5} \times \frac{0.00031}{0.007} = \frac{2 \times 31}{5 \times 7} \times 10^{-2}$$

या $$I = 1.77 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$$

$$\because \quad I = Mk^2$$

$$\therefore \quad k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

$$k = \sqrt{\frac{1.77 \times 10^{-2}}{1}}$$

k = 0.133 मी.

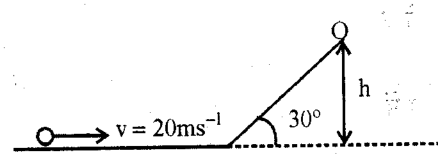
प्र.11. **1 kg** द्रव्यमान की एक गेंद **20 m s^{-1}** के वेग से क्षैतिज तल पर गति करते हुए एक तल पर जो क्षैतिज से **30°** का कोण बनाता है, के पैंदे पर पहुँचती है।यदि घर्षण नगण्य हो तो गेंद कितनी ऊर्ध्वाधर ऊँचाई पर चढ़ सकेगी?

हल: गेंद का द्रव्यमान m = 1kg

नत समतल पर चढ़ते समय गेंद का वेग v = 20 ms^{-1}

माना कि गेंद 30° कोण के झुकाव वाले नत समतल पर h ऊँचाई तक चढ़ती है। तब ऊर्जा संरक्षण नियम से,

गतिज ऊर्जा में हानि = स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि



चित्र 7.87

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\times\frac{2}{5}mR^2 \times \frac{v^2}{R^2} = mgh$$

$$m\left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2\right] = mgh$$

$$\left(\frac{5+2}{10}\right)v^2 = gh$$

$$\therefore \quad h = \frac{7}{10}\frac{v^2}{g} = \frac{7}{10}\times\frac{20\times 20}{9.8}$$

या $h = 28.57\,m$

प्र.12. तीन पिण्ड एक वलय, एक ठोस बेलन और एक गोला, एक नततल पर बिना फिसले लोटनी गति करते हैं। वे विरामावस्था से गति शुरू करते हैं। सभी पिण्डों की त्रिज्यायें बराबर हैं। कौनसा पिण्ड नततल के आधार पर सबसे अधिक वेग से पहुँचता है?

हल: नत तल पर h ऊँचाई से लोटनी गति करने वाले पिण्डों का क्षैतिज धरातल पर पहुँचने पर वेग

$$v = \left(\frac{2gh}{1+\frac{k^2}{R^2}}\right)$$

वलय के लिये $\frac{k^2}{R^2} = 1$

ठोस बेलन के लिये $\frac{k^2}{R^2} = 0.5$

गोले के लिये $\frac{k^2}{R^2} = \frac{2}{5} = 0.4$

सूत्र से स्पष्ट है कि जिस पिण्ड के लिये $\frac{k^2}{R^2}$ का मान न्यूनतम होगा वह सबसे अधिक वेग से क्षैतिज धरातल पर पहुँचेगा अत: गोला सबसे अधिक वेग से धरातल पर नीचे पहुँचेगा।

प्र.13. यदि द्रव्यमान नियत रखकर किसी घूर्णन करती हुई चकती की त्रिज्या अचानक आधी कर दी जाये तो उसका नवीन कोणीय वेग का मान कितना होगा?

हल: चकती का द्रव्यमान नियत रखकर त्रिज्या R घटाकर आधी अर्थात् $R' = \frac{R}{2}$ हो जाती है।

$\therefore$ प्रारंभिक स्थिति में $I = \frac{1}{2}MR^2$

तब नवीन स्थिति में

$$I' = \frac{1}{2}M\cdot\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}MR^2$$

कोणीय संवेग संरक्षण नियम

$$I'.\omega' = I.\omega$$

$$\frac{1}{8}MR^2\omega' = \frac{1}{2}MR^2\omega$$

$$\therefore \quad \omega' = 4\omega$$

अर्थात् 4 गुना कोणीय वेग हो जायेगा।

प्र.14. एक पिण्ड का कोणीय वेग बिना उस पर बल आघूर्ण लगाये **1** चक्कर/से. से **16** चक्कर/से. हो जाता है दोनों अवस्थाओं में घूर्णन त्रिज्याओं का अनुपात क्या होगा?

हल: प्रारंभिक कोणीय वेग की आवृत्ति $n_1 = 1$ चक्कर/सेकण्ड

अंतिम कोणीय वेग की आवृत्ति $n_2 = 16$ चक्कर/सेकण्ड

कोणीय संवेग संरक्षण नियम से,

$$I_1.\omega_1 = I_2.\omega_2$$

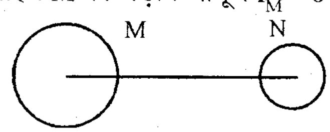
$$Mk_1^2 \times 2\pi n_1 = Mk_2^2 \times 2\pi n_2$$

$$\therefore \quad \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} = \sqrt{\frac{16}{1}} = \frac{4}{1}$$

अत: घूर्णन त्रिज्याओं का अनुपात $k_1 : k_2 = 4:1$

प्र.15. ***M*** व ***N*** दो पहिये एक ही धुरी पर हैं। ***M*** का जड़त्व आघूर्ण **6 kg m²** तथा **600** घूर्णन/मिनट से घूर्णन कर रहा है तथा ***N*** स्थिर है। एक क्लच द्वारा दोनों को जोड़ने पर संयुक्त रूप से **400** घूर्णन/मिनट करते हैं तो ***N*** के जड़त्व आघूर्ण का मान ज्ञात कीजिये।

हल: प्रथम पहिये M का जड़त्व आघूर्ण $I_M = 6\,kg\,m^2$



चित्र 7.88

द्वितीय पहिये N का जड़त्व आघूर्ण $I_N = ?$

प्रथम पहिये M की घूर्णन आवृत्ति $n_M = 600$ घूर्णन/मिनट

द्वितीय पहिये N की घूर्णन आवृत्ति $n_N = 0$

एक क्लच द्वारा पहियों को जोड़ देने पर घूर्णन आवृत्ति

$n = 400$ घूर्णन/मिनट

कोणीय संवेग संरक्षण नियम से

क्लच से जोड़ने से पूर्व कुल कोणीय संवेग = क्लच से जोड़ने के बाद कुल कोणीय संवेग

$$I_M \times 2\pi n_M + I_N \times 0 = (I_M + I_N)\times 2\pi n$$

$$6\times 2\pi\times 600 + 0 = (6+I_N)\times 2\pi\times 400$$

$$3600 = (6+I_N)\times 400$$

$$9 = 6 + I_N$$

$$I_N = 9 - 6 = 3kg\times m^2$$

$\therefore$ द्वितीय पहिये का जड़त्व आघूर्ण $= 3kg \times m^2$