m_i અને m_j એ અનુક્રમે i અને j ક્રમનાં કણોનાં દળ છે અને r_{ij} તેમની વચ્ચેનું અંતર છે. $m_i = m_j = m$.

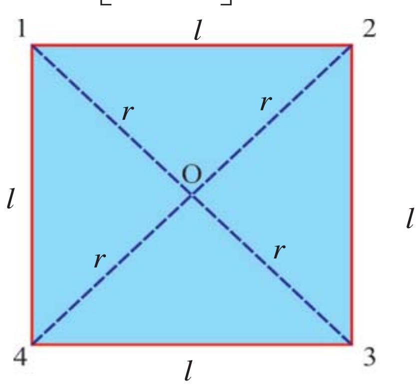
∴ કુલ સ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = -Gm^2\left[\sum_{i<j}\frac{1}{r_{ij}}\right]$$

$$= -Gm^2\left[\frac{1}{r_{12}}+\frac{1}{r_{13}}+\frac{1}{r_{14}}+\frac{1}{r_{23}}+\frac{1}{r_{24}}+\frac{1}{r_{34}}\right]$$

$$= -Gm^2\left[\frac{1}{l}+\frac{1}{\sqrt{2}l}+\frac{1}{l}+\frac{1}{l}+\frac{1}{\sqrt{2}l}+\frac{1}{l}\right]$$

$$= -Gm^2\left[\frac{4+\sqrt{2}}{l}\right]$$



આકૃતિ 3.16

$$r_{13} = r_{24} = \sqrt{2}\,l$$

$$r_{01} = r_{02} = r_{03} = r_{04} = r$$

ચોરસના કેન્દ્ર પર કુલ ગુરુત્વસ્થિતિમાન

ϕ = 4 (દરેક કણથી ઉદ્‌ભવતું સ્થિતિમાન)

$$= 4\left(\frac{-Gm}{r}\right);\ \text{જ્યાં}\ r = \frac{\sqrt{2}l}{2}$$

$$\therefore\ \phi = \frac{-4\sqrt{2}Gm}{l}$$

3.8 નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા અને નિષ્ક્રમણ-ઝડપ (Escape Energy and Escape Speed)

આપણે હાથથી કોઈ પથ્થરને ઊર્ધ્વ દિશામાં ફેંકીએ તો તે અમુક ઊંચાઈએ જઈને ફરી પાછો પૃથ્વી તરફ પડે છે. જો પ્રારંભિક ઝડપ વધુ ને વધુ આપીએ, તો તે પથ્થરને આપણે વધુ ને વધુ ઊંચે મોકલી શકીએ. આ પરથી એવો સ્વાભાવિક પ્રશ્ન ઉદ્‌ભવે કે શું આપણે પથ્થરને એટલી પ્રારંભિક ઝડપથી ફેંકી શકીએ કે જેથી તે ફરી પાછો પૃથ્વી તરફ આવે જ નહિ ? એટલે કે તે કાયમ માટે પૃથ્વીથી દૂર અનંત અંતરે જતો રહે અને તેના પર પૃથ્વીનું કોઈ આકર્ષણબળ રહે નહિ. આનો ઉકેલ મેળવવા તેની ઊર્જાનો વિચાર કરીએ.

પૃથ્વીની સપાટી પર સ્થિર રહેલા m દળના પદાર્થની

સ્થિતિ-ઊર્જા $= \dfrac{-GM_e m}{R_e}$ અને ગતિ-ઊર્જા શૂન્ય હોય છે

તેથી તેની કુલ ઊર્જા $= \dfrac{-GM_e m}{R_e}$ છે. જો આ પદાર્થને

આપણે $\dfrac{+GM_e m}{R_e}$ જેટલી ઊર્જા ગતિ-ઊર્જા સ્વરૂપે પૂરી

પાડીએ, તો તે એવા બિંદુ સુધી જઈ શકે કે જ્યાં તેની

કુલ ઊર્જા $\dfrac{+GM_e m}{R_e} + \left(\dfrac{-GM_e m}{R_e}\right) = 0$ બને.

એટલે કે તે પૃથ્વીથી અનંત અંતરે પહોંચી જાય અને ત્યાં તેની સ્થિતિ-ઊર્જા અને ગતિ-ઊર્જા બંને શૂન્ય હોય. આ સ્થિતિમાં પદાર્થ કાયમ માટે પૃથ્વીના બંધનમાંથી છૂટી જાય છે અને ફરી પાછો આવતો નથી. (જો આપણે પદાર્થને $GM_e m/R_e$ કરતાં વધુ ગતિ-ઊર્જા આપીએ તો અનંત અંતરે તેની સ્થિતિ-ઊર્જા તો શૂન્ય હોય પણ તેની પાસે અમુક ગતિ-ઊર્જા પણ બચેલી હોય છે.)

"પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રમાંથી (બીજા શબ્દોમાં પૃથ્વીના બંધનમાંથી) પદાર્થને મુક્ત કરવા માટે તેને આપવી પડતી લઘુતમ ઊર્જાને તે પદાર્થની નિષ્ક્રમણ ઊર્જા (Escape energy) કહે છે." અને તેને ઘણીવાર પદાર્થની બંધન-ઊર્જા (Binding energy) પણ કહે છે.

આમ, પૃથ્વીની સપાટી પર સ્થિર રહેલા m દળના

પદાર્થની નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા $= \dfrac{GM_e m}{R_e}$ (3.8.1)

આ નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા જેટલી ગતિ-ઊર્જા પદાર્થને આપવા માટે તેને આપવી પડતી ઝડપને નિષ્ક્રમણ-ઝડપ (v_e) કહે છે, જેને ઘણીવાર નિષ્ક્રમણ-વેગ પણ કહે છે.

$$\therefore\ \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GM_e m}{R_e} \qquad (3.8.2)$$

$$\therefore\ \text{નિષ્ક્રમણ-ઝડપ}\ v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} \qquad (3.8.3)$$

$$= \sqrt{2gR_e} \qquad (3.8.3a)$$

સમીકરણ (3.8.3) પરથી સ્પષ્ટ છે કે પદાર્થની નિષ્ક્રમણ-ઝડપ (v_e)નું મૂલ્ય તેના પોતાના દળ પર આધારિત નથી. (પણ જેના બંધનમાંથી-ત્રાસમાંથી ! - તેને છૂટવાનું છે, તે પદાર્થના દળ અને ત્રિજ્યા પર આધારિત છે.)

ઉપરના સમીકરણ (3.8.3) માં G, M_e અને R_e નાં મૂલ્યો મૂકતાં, v_e = 11.2 km/s મળે છે. જો પદાર્થની પ્રારંભિક ઝડપ v_e જેટલી કે વધુ હોય, તો પદાર્થ હંમેશ માટે પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાંથી છટકી જાય છે.

ચંદ્રની સપાટી પરના સ્થિર પદાર્થને આ પ્રમાણે ચંદ્રથી મુક્ત કરાવી દેવા માટે જરૂરી ઝડપ v_e' હોય, તો

$v_e' = \sqrt{\frac{2GM_m}{R_m}}$, જ્યાં M_m = ચંદ્રનું દળ, R_m = ચંદ્રની ત્રિજ્યા. આ કિસ્સામાં v_e' = 2.3 km/s મળે છે, જે પૃથ્વીની સપાટી પર રહેલા પદાર્થ માટેના નિષ્ક્રમણ-ઝડપના મૂલ્ય કરતાં લગભગ $\left(\frac{1}{6}\right)$ ગણું છે. આ કારણથી ચંદ્રને વાતાવરણ નથી. તેની સપાટી પર જો વાયુના અણુઓ નિર્માણ પામે, તો ત્યાંના તાપમાને તે અણુઓની ઝડપ ઉપર જણાવેલ મૂલ્ય કરતાં વધુ હોય છે. તેથી તેઓ ચંદ્રના ગુરુત્વક્ષેત્રમાંથી કાયમ માટે છટકી જાય છે.

જો કોઈ પદાર્થની ઘનતાનું મૂલ્ય એટલું બધું વધારે હોય કે જેથી તેની સપાટી પરના બિંદુએ $v_e > C$ (પ્રકાશનો વેગ) હોય, તો તેની સપાટી પરથી કંઈ પણ કાયમ માટે છટકી શકશે નહિ. (પ્રકાશ પણ નહિ !) આવા પદાર્થને **black hole** કહે છે. આપણે ખ્યાલમાં રાખવાનું છે કે કોઈ પણ દ્રવ્ય કણનો વેગ પ્રકાશના વેગ જેટલો કે તેથી વધુ હોઈ શકતો નથી. ($C = 3 \times 10^8$ m s^{-1})

ઉદાહરણ 9 : પૃથ્વી પરના સ્થિર પદાર્થ માટે નિષ્ક્રમણ-ઝડપનું મૂલ્ય v_e = 11.2 km/s છે. જો પૃથ્વીની સપાટી પરના કોઈ સ્થિર પદાર્થને આના કરતાં ત્રણ ગણી ઝડપથી દૂર તરફ ફેંકવામાં આવે તો પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાંથી છટક્યા પછી તે પદાર્થની ઝડપ કેટલી હશે ?

ઉકેલ : ફેંકેલા પદાર્થની પ્રારંભિક ઝડપ = $v = 3v_e$, જ્યાં v_e = નિષ્ક્રમણ-ઝડપ = 11.2 km/s

પૃથ્વીના ગુરુત્વક્ષેત્રમાંથી છટક્યા પછી (એટલે કે અનંત અંતરે), ધારો કે આ પદાર્થની ઝડપ = v'

યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ પરથી,

$$\left\{\begin{array}{c}\text{પૃથ્વી પરની ગતિ-} \\ \text{ઊર્જા + સ્થિતિ-} \\ \text{ઊર્જા}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{અનંત અંતરે ગતિ-} \\ \text{ઊર્જા + સ્થિતિ-} \\ \text{ઊર્જા}\end{array}\right\}$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{-GM_e m}{R_e}\right) = \left[\frac{1}{2}mv'^2 + 0\right] ...(1)$$

($\because$ અનંત અંતરે સ્થિતિ-ઊર્જા = 0)

પરંતુ, $v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$ $\therefore \frac{GM_e}{R_e} = \frac{v_e^2}{2}$

આ મૂલ્ય સમીકરણ (1) માં મૂકતાં અને $v = 3v_e$ (આપેલ છે) લખતાં

$$\frac{1}{2}m(9v_e^2) + \left(\frac{-v_e^2 m}{2}\right) = \frac{1}{2}mv'^2$$

$$\therefore 9v_e^2 - v_e^2 = v'^2$$

$$\therefore v' = \sqrt{8}\, v_e = \left(\sqrt{8}\right)(11.2)$$

$$= 31.63 \text{ km/s}$$

ઉદાહરણ 10 : પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r ($>R_e$) અંતરે રહેલા એક પદાર્થને મુક્ત પતન કરાવવામાં આવે, તો તે પદાર્થ પૃથ્વીની સપાટી પર અથડાય ત્યારે તેની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : પૃથ્વીના કેન્દ્રથી $r > R_e$ અંતરે રહેલા પદાર્થને મુક્ત પતન કરાવતાં તેનો પ્રારંભિગ વેગ શૂન્ય હોવાથી તેની ગતિ-ઊર્જા = 0 અને સ્થિતિ-ઊર્જા = $\frac{-GM_e m}{r}$; જ્યાં m = પદાર્થનું દળ.

પદાર્થ પૃથ્વીની સપાટી પર પડે ત્યારે તેનો વેગ v હોય તો ગતિ-ઊર્જા = $\frac{1}{2}mv^2$, અને અહીં તેની

સ્થિતિ-ઊર્જા = $\frac{-GM_e m}{R_e}$

હવાનો અવરોધ અવગણતાં, યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ,

$$\left\{\begin{array}{c}\text{પૃથ્વીના કેન્દ્રથી } r \\ \text{અંતરે ગતિ-ઊર્જા +} \\ \text{સ્થિતિ-ઊર્જા}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{પૃથ્વીની સપાટી પર} \\ \text{ગતિ-ઊર્જા +} \\ \text{સ્થિતિ-ઊર્જા}\end{array}\right\}$$

$$\therefore \left\{0 + \left(\frac{-GM_e m}{r}\right)\right\} = \left\{\frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{-GM_e m}{R_e}\right)\right\}$$

$$\therefore v^2 = 2GM_e\left[\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r}\right] \quad (1)$$

આ પરથી માંગેલ ઝડપ v મળે છે.

પરંતુ જો gના પદમાં જવાબ મેળવવો હોય તો,

$$g = \frac{GM_e}{{R_e}^2} \text{ પરથી } GM_e = g{R_e}^2$$

ઉપરના સમીકરણમાં મૂકતાં,

$$v^2 = 2g\ {R_e}^2\left[\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r}\right] \quad (2)$$

$$\therefore v = \left[2g{R_e}^2\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{r}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

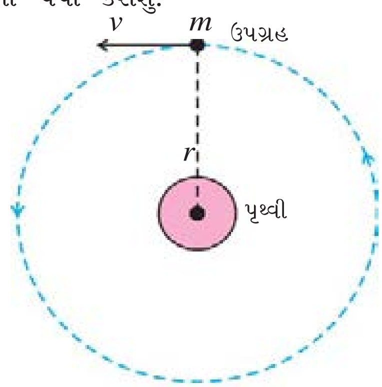
નોંધ : જો પદાર્થને ખૂબ જ ઊંચેથી ($r \to \infty$) મુક્ત-પતન કરાવેલ હોય તો સમીકરણ (1) અને (2) પરથી $v = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} = \sqrt{2R_e g}$. આ નિષ્ક્રમણ-ઝડપનું જ સૂત્ર છે.

3.9 ઉપગ્રહો (Satellites)

કોઈ પણ ગ્રહની આસપાસ પરિભ્રમણ કરતા પદાર્થને તેનો ઉપગ્રહ (satellite) કહે છે. ઉપગ્રહની કક્ષીય ગતિ ગ્રહના ગુરુત્વાકર્ષણ બળ અને પ્રારંભિક શરતો પર આધારિત હોય છે. ઉપગ્રહોને બે વર્ગોમાં વહેંચી શકાય : (1) કુદરતી ઉપગ્રહ (2) કૃત્રિમ ઉપગ્રહ.

ચંદ્ર એ પૃથ્વીનો કુદરતી ઉપગ્રહ છે. વળી, ગુરુને અને બીજા ગ્રહોને પણ તેમના ચંદ્રો (એટલે કે ઉપગ્રહો) છે. આપણા ચંદ્રનો પૃથ્વીની આસપાસના પરિભ્રમણનો આવર્તકાળ 27.3 દિવસ છે અને ચંદ્રનો પોતાની ધરીની આસપાસનો આવર્તકાળ પણ લગભગ આટલો જ છે.

1957માં રશિયન વિજ્ઞાનીઓએ પૃથ્વીની આસપાસ તરતો મૂકેલો **'સ્પુટનિક'** નામનો ઉપગ્રહ એ માનવજાતે બનાવેલો સૌપ્રથમ કૃત્રિમ ઉપગ્રહ હતો. આપણા ભારતીય વિજ્ઞાનીઓએ પણ અવકાશ ક્ષેત્રે હરણફાળ ભરીને 'આર્યભટ્ટ' અને 'ઇન્સેટ' શ્રેણીના ઘણા ઉપગ્રહો સફળતાપૂર્વક તરતા મૂક્યા છે. હાલમાં તો વિશ્વના ઘણા બધા દેશો દ્વારા તરતા મૂકાયેલા સેંકડો ઉપગ્રહો પૃથ્વીની આસપાસ અવકાશમાં ભ્રમણ કરી રહ્યા છે, જેમનો ઉપયોગ વૈજ્ઞાનિક, એન્જિનિયરિંગ, હવામાનની આગાહી, જાસુસી, લશ્કરી, સંદેશા વ્યવહાર, વગેરે હેતુઓ માટે કરાય છે. પ્રસ્તુત પરિચ્છેદમાં આપણે ઉપગ્રહોના ગતિવિજ્ઞાનની અને ભૂસ્થિર તેમજ ધ્રુવીય ઉપગ્રહોની ચર્ચા કરીશું.



ઉપગ્રહની કક્ષીય ગતિ

આકૃતિ 3.17

ધારો કે m દળના એક ઉપગ્રહને પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r અંતરે તરતો મૂકેલો છે, અને તેની વર્તુળ કક્ષામાંની ઝડપ v_0 છે. તેને કક્ષીય ઝડપ અથવા કક્ષીય વેગ કહે છે. અહીં, $r = R_e + h$ જ્યાં, R_e = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા અને h = પૃથ્વીની સપાટીથી ઉપગ્રહની ઊંચાઈ. તેની આ વર્તુળગતિ માટેનું જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ (${mv_0}^2/r$), એ તેના પરના પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષણ બળ દ્વારા પૂરું પડાય છે.

$$\therefore \frac{m{v_0}^2}{r} = \frac{GM_e m}{r^2} \quad (3.9.1)$$

$$\therefore \text{ ઉપગ્રહની કક્ષીય ઝડપ } v_0 = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \quad (3.9.2)$$

સમીકરણ (3.9.1), પરથી ઉપગ્રહની ગતિ-ઊર્જા

$$K = \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{GM_e m}{2r}. \quad (3.9.3)$$

સમીકરણ (3.7.10) પરથી આ ઉપગ્રહની (ખરેખર તો પૃથ્વી + ઉપગ્રહના તંત્રની) સ્થિતિ-ઊર્જા

$$U = \frac{-GM_e m}{r} \quad (3.9.4)$$

$\therefore$ ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા

$$E = \text{ગતિ-ઊર્જા } K + \text{સ્થિતિ-ઊર્જા } U$$

$$= \frac{GM_e m}{2r} - \frac{GM_e m}{r} \quad (3.9.5)$$

$$= \frac{-GM_e m}{2r} \quad (3.9.6)$$

આ કુલ ઊર્જા ઋણ છે, તેથી તે આ ઉપગ્રહ બંધિત અવસ્થામાં હોવાનું સૂચવે છે. સમીકરણ (3.9.3), (3.9.4) અને (3.9.6) પરથી તમે જોઈ શકશો કે જો ઉપગ્રહની ગતિ-ઊર્જા x હોય તો તેની સ્થિતિ-ઊર્જા $-2x$ અને કુલ ઊર્જા $-x$ થાય છે. તેથી તેની બંધન-ઊર્જા (નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા) x થશે.

ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ (T) : ઉપગ્રહને પૃથ્વીની આસપાસ એક પરિભ્રમણ પૂરું કરતાં લાગતો સમય એ તેનો આવર્તકાળ (T) છે અને આ સમય દરમિયાન તેણે કાપેલું અંતર વર્તુળમાર્ગના પરિઘ ($2\pi r$) જેટલું છે.

$$\therefore \text{ કક્ષીય ઝડપ } v_0 = \frac{2\pi r}{T} \quad (3.9.7)$$

∴ સમીકરણ (3.9.1) પરથી,

$$\frac{m}{r}\left(\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}\right) = \frac{GM_e m}{r^2} \quad (3.9.8)$$

$$\therefore T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_e}\right) r^3 \quad (3.9.9)$$

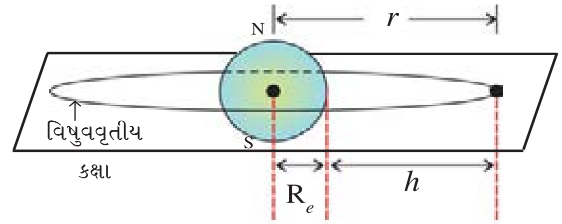
કૌંસમાંની બધી રાશિઓ અચળ હોવાથી $T^2 \propto r^3$ (3.9.10)

આમ, **"ઉપગ્રહના કક્ષીય આવર્તકાળનો વર્ગ તેની કક્ષીય ત્રિજ્યાના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે."** આ વિધાન ઉપગ્રહની વર્તુળકક્ષાના સંદર્ભમાં કૅપ્લરનો ત્રીજો નિયમ છે.

સમીકરણ (3.9.9) પરથી,

$$T = \left(\frac{4\pi^2 r^3}{GM_e}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9.11)$$

ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ : પૃથ્વીના જે ઉપગ્રહનો કક્ષીય આવર્તકાળ 24 hour (એટલે કે પૃથ્વીની પોતાની અક્ષની આસપાસની ચાકગતિના આવર્તકાળ જેટલો) હોય તેને ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ (geo-stationary અથવા geo-synchronous satellite) કહે છે, કારણ કે પૃથ્વી પરથી જોતાં તે કાયમ સ્થિર દેખાય છે. આવા ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ વિષુવવૃતીય સમતલમાં ભ્રમણ કરતા હોય છે. જુઓ આકૃતિ 3.18(a).



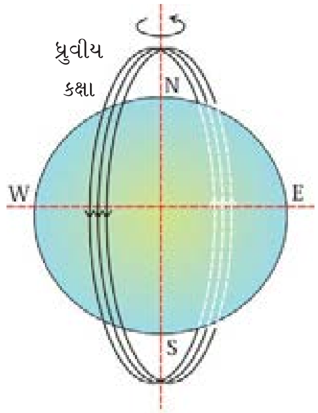
ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ

આકૃતિ 3.18(a)

ભૂસ્થિર ઉપગ્રહ માટે સમીકરણ (3.9.11)માં $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}, $M_e = 5.98 \times 10^{24}$ kg અને $T = 24 \times 3600$ s, મૂકતાં, $r = 42260$ km મળે છે. આથી પૃથ્વીની સપાટીથી આ ભૂસ્થિર ઉપગ્રહની ઊંચાઈ $h = r - R_e = 42260 - 6400 = 35860$ km મળે છે. આ સિવાયની બીજી કોઈ ઊંચાઈ માટે ઉપગ્રહ ભૂસ્થિર રહી શકતો નથી.

આવા ઉપગ્રહ દૂર સંચાર (tele communication)માં વપરાય છે. ઉપરાંત તેમનો ઉપયોગ **Global Positioning System (GPS)**માં પણ થાય છે, જેમાં વ્યક્તિને આપેલા સ્થાનેથી તેના ગંતવ્યસ્થાન (destination) સુધી જવા માટેના વિવિધ રસ્તાઓની અને તેમાંથી સૌથી ટૂંકા રસ્તા અંગેની માહિતી નકશાસહિત મૉનિટરના screen પર દર્શાવવામાં આવે છે.

ધ્રુવીય ઉપગ્રહ (Polar Satellite) : આવા ઉપગ્રહ પૃથ્વીની ફરતે ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં ભ્રમણ કરતા હોય છે. તેઓ પૃથ્વીની સપાટીથી લગભગ 800 km ઊંચાઈએ હોય છે. પૃથ્વીનું ભ્રમણ પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં થતું હોવાથી આવા ઉપગ્રહ (તેમનો આવર્તકાળ T લગભગ 100 મિનિટ હોય છે.) પૃથ્વીના દરેક વિભાગને દરરોજ કેટલીય વાર જોઈ શકે છે. તેમાં રાખેલા કૅમેરાની મદદથી દર એક ભ્રમણમાં પૃથ્વીનો એક પાતળી પટ્ટી જેવો વિસ્તાર જોઈ શકે છે. બીજા ભ્રમણમાં તેની બાજુની પટ્ટીનો વિસ્તાર જોઈ શકે છે. આમ સમગ્ર દિવસ દરમિયાન સમગ્ર પૃથ્વીનું અવલોકન ઘણીવાર કરી શકે છે. આ પરથી મળેલી માહિતી દૂર-સંવેદન (remote sensing)માં, હવામાનશાસ્ત્રમાં, પર્યાવરણના અભ્યાસમાં, જાસૂસીમાં વગેરેમાં થાય છે.

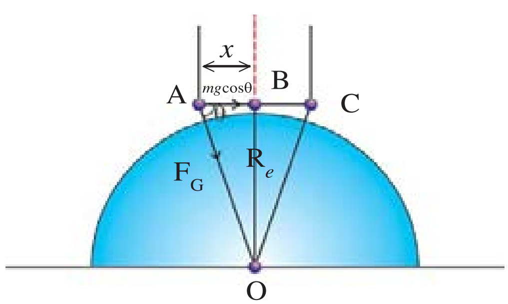


ધ્રુવીય કક્ષા
આકૃતિ 3.18(*b*)

ઉદાહરણ 11 : એક કાલ્પનિક સાદા લોલકનું આધારબિંદુ પૃથ્વીની સપાટીથી અનંત ઊંચાઈએ છે અને લોલકનો ગોળો પૃથ્વીની સપાટીથી તદ્દન નજીક છે. આ લોલકનો (એટલે કે અનંત લંબાઈના લોલકનો) આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$ છે. તેમ દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં લોલકનું આધારબિંદુ અનંત ઊંચાઈએ હોવાથી ગોળાનો સૂક્ષ્મ ગતિપથ લગભગ સુરેખ લઈ શકાય. ગોળાનું દળ $= m$.

અહીં ગુરુત્વબળ F_G $(= mg)$નો $mg\cos\theta$ ઘટક ગોળાને પુનઃસ્થાપક બળ પૂરું પાડે છે. તેથી ગોળા પરનું પુનઃસ્થાપક બળ $F = -mg\cos\theta$ (બળ પુનઃસ્થાપક હોવાથી ઋણ ચિહ્ન મૂક્યું છે.)



આકૃતિ 3.19

આકૃતિ 3.19 પરથી $\cos\theta = \frac{x}{R_e}$. (ગોળો પૃથ્વીની સપાટીની તદ્દન નજીક હોવાથી AO = BO = R_e લઈ શકાય.)

$$\therefore\ F = -mg\left(\frac{x}{R_e}\right)$$

$$\therefore\ F = -kx \qquad (1)$$

જ્યાં, k = બળ-અચળાંક $= \frac{mg}{R_e}$

$\therefore$ સમીકરણ (1) સૂચવે છે કે લોલકની ગતિ સરળ આવર્તગતિ છે.

$$\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ \text{gives,}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg\ /\ R_e}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$$

ઉદાહરણ 12 : સાબિત કરો કે પૃથ્વીની સપાટીની તદ્દન નજીક રહીને પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહ માટે બંધન-ઊર્જા $\frac{1}{2}mgR_e$ જેટલી હોય છે.

ઉકેલ : અહીં, ઉપગ્રહ (દળ $= m$), વર્તુળ ગતિ માટે જરૂરી કેન્દ્રગામી બળ એ પૃથ્વીનું તેના પરનું ગુરુત્વાકર્ષી બળ છે.

$$\therefore\ \frac{mv^2}{R_e} = \frac{GM_e m}{R_e^{\,2}} = gm\ \left(\because\ g = \frac{GM_e}{R_e^{\,2}}\right)$$

ઉપગ્રહની ગતિ-ઊર્જા $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgR_e$

અને સ્થિતિ-ઊર્જા $= \frac{-GM_e m}{R_e}$

$$= \frac{-GM_e m}{R_e^{\,2}}R_e$$

$$= -gmR_e$$

$\therefore$ કુલ ઊર્જા = ગતિ-ઊર્જા + સ્થિતિ-ઊર્જા

$$= \frac{1}{2}mgR_e - gmR_e$$

$$= -\frac{1}{2}mgR_e$$

$\therefore$ ઉપગ્રહની બંધન-ઊર્જા $= \frac{1}{2}mgR_e$

ઉદાહરણ 13 : એકબીજાથી 10m અંતરે રહેલા 1 kg અને 2 kg દળના પદાર્થો સ્થિર સ્થિતિમાંથી મુક્ત કરવામાં આવે છે. તેમના પર પરસ્પર ગુરુત્વબળો જ લાગતા હોવાનું સ્વીકારીને જ્યારે તેમની વચ્ચેનું અંતર 5m થાય, ત્યારે તે દરેકના વેગ શોધો.
($G = 6.66 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 લો.)

ઉકેલ : પ્રારંભમાં બંને પદાર્થોની વેગ શૂન્ય છે, તેથી ગતિ-ઊર્જાઓ શૂન્ય છે. (એટલે કે, $v_1 = v_2 = 0$; $K_1 = K_2 = 0$)

જ્યારે તેમની વચ્ચેનું અંતર 5m થાય ત્યારે તેમના વેગ અનુક્રમે v_1' અને v_2' છે અને ગતિ-ઊર્જાઓ K_1' અને K_2' છે.

આ તંત્રની પ્રારંભિક સ્થિતિ-ઊર્જા $U_1 = \dfrac{-Gm_1m_2}{r_1}$

$$= \frac{-(6.67 \times 10^{-11})(1 \times 2)}{10}$$

$= -13.32 \times 10^{-12}$ J.

અંતિમ સ્થિતિ-ઊર્જા $U_2 = \dfrac{-Gm_1m_2}{r_2}$

$$= \frac{-(6.66 \times 10^{-11})(1 \times 2)}{5}$$

$= -26.64 \times 10^{-12}$ J.

$\therefore$ સ્થિતિ-ઊર્જાનો ફેરફાર $\Delta U = U_2 - U_1$

$= -26.64 \times 10^{-12} - (-13.32 \times 10^{-12})$

$= -13.32 \times 10^{-12}$ J

યાંત્રિક-ઊર્જાના સંરક્ષણના નિયમ મુજબ K + U = અચળ $\therefore$ $\Delta K + \Delta U = 0$.

$\therefore \Delta K = -\Delta U$

$\therefore (K_1' + K_2') - 0 = -(U_2 - U_1)$

$\therefore (\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2) - (0) = 13.32 \times 10^{-12}$ J

$$\therefore \frac{v_1'^2}{2} + v_2'^2 = 13.32 \times 10^{-12} \quad (1)$$

વેગમાનસંરક્ષણના નિયમ મુજબ પ્રારંભિક કુલ વેગમાન = અંતિમ કુલ વેગમાન

$$\therefore m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}' = 0$$

$$\therefore m_1\vec{v_1}' = -m_2\vec{v_2}'$$

$$\therefore \vec{v_1}' = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v_2}'$$

$$\therefore |\vec{v_1}'| = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)(|\vec{v_2}'|)$$

$$\therefore v_1' = 2v_2' \quad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી

$$\frac{4v_2'^2}{2} + v_2'^2 = 13.32 \times 10^{-12}$$

$\therefore 3v_2'^2 = 13.32 \times 10^{-12}$

$\therefore v_2'^2 = 4.44 \times 10^{-12} = 444 \times 10^{-14}$

$\therefore v_2' = 21.07 \times 10^{-7}$ m/s

$\therefore v_1' = 42.14 \times 10^{-7}$ m/s

ઉદાહરણ 14 : એક ગ્રહની આસપાસ બે ઉપગ્રહો S_1 અને S_2 એક સમતલસ્થ એવી બે જુદી-જુદી વર્તુળાકાર કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે. જો તેમના આવર્તકાળ અનુક્રમે 31.4 h અને 62.8 h હોય અને S_1 ની કક્ષાની ત્રિજ્યા 4000 km હોય, તો (i) S_2ની કક્ષાની ત્રિજ્યા શોધો. (ii) બંને ઉપગ્રહોનાં કક્ષીય વેગનાં મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ :

(i) $T^2 \alpha r^3$

$$\therefore \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

$$\therefore r_2^3 = r_1^3\left(\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)$$

$$= (4000)^3\left(\frac{62.8^2}{31.4^2}\right)$$

$$\therefore r_2 = (4000)(4)^{\frac{1}{3}} = (4000)(1.588)$$

$= 6352$ km

(ii) $$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = \frac{(2)(3.14)(4000)}{31.4}$$

$= 800$ km/h

$$v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2} = \frac{(2)(3.14)(6352)}{62.8}$$

$= 635.2$ km/h

સમુદ્રમાં ભરતી
(માત્ર જાણકારી માટે)

વિદ્યાર્થીમિત્રો,

તમને કદાચ એવો ખ્યાલ હશે કે સમુદ્રમાં આવતી ભરતીનું કારણ ગુરુત્વાકર્ષણ છે. આ ઘટનામાં સૂર્ય અને ચંદ્ર બંનેનાં ગુરુત્વબળ ભાગ ભજવે છે. હવે સૂર્ય વડે પૃથ્વી પર લાગતું ગુરુત્વબળ, ચંદ્ર વડે પૃથ્વી પર લાગતા ગુરુત્વબળ કરતાં લગભગ 175 ગણું છે, તેમ છતાં ભરતીની ઘટનામાં સૂર્ય કરતાં ચંદ્રનો ફાળો વધુ છે - સૂર્ય કરતાં લગભગ 2.17 ગણો છે. આ હકીકત છે. આનું કારણ શું હશે ?

આનું કારણ એવું છે કે ગણતરીઓ પરથી ભરતી-જનકબળ (tidal force-ટાઇડ્લ ફોર્સ) **ગુરુત્વબળના અંતર સાથેના ફેરફારના દર પર આધારિત** હોવાનું જણાય છે, **નહિ કે ગુરુત્વબળના મૂલ્ય પર.** એટલે $F_{\text{સૂર્ય વડે}} > F_{\text{ચંદ્ર વડે}}$ હોવા છતાં $\frac{d}{dr}(F_{\text{ચંદ્ર વડે}}) > \frac{d}{dr}(F_{\text{સૂર્ય વડે}})$ હોય છે, તેથી ભરતીની ઘટનામાં ચંદ્રનો ફાળો વધુ છે. $F = \frac{GMm}{r^2}$ પરથી $\frac{d}{dr}(F) = \frac{-2GMm}{r^3}$. આ સૂત્રોમાં m = એકમ દળનું પાણી વિચારીને તમે જાતે આ બાબતને ચકાસી શકશો. આ માટે ઉપરનાં સૂત્રોમાં ($M_S = 2 \times 10^{30}$ kg, $r_S = 1.5 \times 10^{11}\ m$, $M_m = 7.36 \times 10^{22}$ kg, $r_m = 3.84 \times 10^8 m$ લો.)

(આ તો માત્ર સાદી સમજૂતી છે, બાકી ભરતીની ઘટના ઘણી જટિલ છે. તેમાં સ્થાનિક પરિબળો-જેવાં કે સમુદ્ર તટથી સમુદ્રના તળિયાનું અંતર, સમુદ્રની નીચેનું નજીકનું પૃથ્વીનું બંધારણ, ઉપરાંત પૃથ્વીની ચાકગતિ વગેરે પણ અમુક અંશે ભાગ ભજવે છે.)

આપણે માત્ર ભરતી-જનક-બળ $\frac{1}{r^3}$ પર આધારિત હોવાની નોંધ લઈશું અને આ કારણથી ઉપરનાં સૂત્રો મુજબ ચંદ્રનો ફાળો સૂર્ય કરતાં વધુ છે.

સારાંશ

1. ટોલેમીના પૃથ્વી-કેન્દ્રીય વાદ અને કૉપરનિક્સના સૂર્ય-કેન્દ્રીય વાદમાંથી હાલમાં સૂર્ય-કેન્દ્રીયવાદની સત્યતા સ્વીકારવામાં આવી છે.
2. **કૅપ્લરના નિયમો :** (1) ''બધા ગ્રહો એવી લંબવૃત્તીય કક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરે છે કે જેના એક કેન્દ્ર પર સૂર્ય હોય.'' (2) ''સૂર્ય અને ગ્રહને જોડતી રેખાએ સમાન સમયગાળામાં આંતરેલ ક્ષેત્રફળ સમાન હોય છે.'' (3) કોઈ પણ ગ્રહના પરિભ્રમણના આવર્તકાળ (T)નો વર્ગ તેની લંબવૃત્તીય કક્ષાની અર્ધ-દીર્ઘ અક્ષ (a) ના ઘનના સમપ્રમાણમાં હોય છે. ($T^2 \propto a^3$)
3. **ન્યૂટનનો ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ :** ''વિશ્વમાંનો દરેક પદાર્થ બીજા દરેક પદાર્થ પર આકર્ષી બળ લગાડે છે. જેનું મૂલ્ય તેમનાં દળોના ગુણાકારના સમપ્રમાણમાં અને તેમની વચ્ચેના અંતરના વર્ગના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં હોય છે.'' એટલે કે, $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$.

   સદિશ સ્વરૂપમાં $\left[\overset{\vec{F}_{12}}{\text{1 પર 2 વડે બળ}}\right] = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$

   જ્યાં $\hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_{12}|}$ અને $\vec{r}_{12} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$; $|\vec{r}_{12}| = r$

વળી, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

નોંધપાત્ર મુદ્દા : (*i*) પોલા ગોળાકાર કવચને લીધે તેની બહારના બિંદુએ આવેલા કણ પર લાગતું ગુરુત્વબળ, જાણે કે તે કવચનું બધું દળ તેના કેન્દ્ર પર કેન્દ્રિત થયું હોય તેમ ગણીને, મળતા બળ જેટલું હોય છે. (*ii*) પોલા ગોળાકાર કવચની અંદરના કોઈ પણ બિંદુએ આવેલ કણ પર લાગતું ગુરુત્વબળ શૂન્ય હોય છે.

4. G નું મૂલ્ય સૌપ્રથમ કેવેન્ડિશે પ્રાયોગિક રીતે મેળવ્યું હતું. હાલમાં Gનું સ્વીકૃત મૂલ્ય 6.67×10^{-11} N m^2/kg^2 છે.

5. ગુરુત્વાકર્ષી બળને લીધે પદાર્થમાં ઉદ્ભવતા પ્રવેગને ગુરુત્વપ્રવેગ g કહે છે. પૃથ્વીની સપાટી પરના બિંદુ માટે ગુરુત્વપ્રવેગનું સૂત્ર $g_e = \frac{GM_e}{R_e^{\ 2}}$ છે. તેનું મૂલ્ય 9.8 m/s^2 છે.

વિષુવવૃત્ત કરતાં ધ્રુવ પર g_eનું મૂલ્ય થોડું વધારે હોય છે, પરંતુ તફાવત અત્યંત અલ્પ છે.

પૃથ્વીની સપાટીથી h ઊંચાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ $g(h) = \frac{g_e}{\left[1+\frac{h}{R_e}\right]^2}$ છે. સપાટીથી થોડી ઊંચાઈ માટે $g(h) \approx g_e$ લઈ શકાય છે.

પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈએ પૃથ્વીની અંદર આવેલા બિંદુએ ગુરુત્વપ્રવેગ $g(d) = g_e\left[1-\frac{d}{R_e}\right]$ છે. પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર ગુરુત્વપ્રવેગ શૂન્ય છે.

પૃથ્વીના ભ્રમણને લીધે λ અક્ષાંશ ધરાવતા સ્થળે પૃથ્વીની સપાટી પર અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ

$$g' = g\left[1-\frac{R_e\omega^2\cos^2\lambda}{g}\right]$$ છે.

6. ‘‘આપેલ બિંદુએ એકમ દળના પદાર્થ પર લાગતા ગુરુત્વબળને તે બિંદુ આગળની **ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રની તીવ્રતા** (I) કહે છે. $I = \frac{GM}{r^2}$ કહે છે. આ પરથી તે બિંદુએ મૂકેલા m દળના પદાર્થ પર લાગતું ગુરુત્વબળ F = (I)(m). પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર ગુરુત્વતીવ્રતા શૂન્ય છે. I અને gનાં મૂલ્યો સમાન હોય છે.

7. **એકમદળના** પદાર્થને અનંત અંતરેથી ગુરુત્વક્ષેત્રમાંના આપેલા બિંદુએ લાવવા દરમિયાન ગુરુત્વ-બળે કરેલા કાર્યના ઋણ મૂલ્યને તે બિંદુ આગળનું ગુરુત્વસ્થિતિમાન (ϕ) કહે છે. $\phi = \frac{GM_e}{r}$

પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r ($>R_e$) અંતરે $\phi_e = \frac{-GM_e}{R_e}$ અને પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વસ્થિતિમાન

$\phi_e = \frac{-GM_e}{R_e}$. ગુરુત્વસ્થિતિમાનનો એકમ J kg^{-1} અને પારિમાણિક સૂત્ર $M^0L^2T^{-2}$ છે.

આપેલા (m દળના) પદાર્થને પૃથ્વીના ગુરુત્વાકર્ષી ક્ષેત્રમાં અનંત અંતરેથી આપેલા બિંદુએ લાવવા દરમિયાન ગુરુત્વબળે કરેલા કાર્યના ઋણ મૂલ્યને તે બિંદુ પાસે પૃથ્વી અને તે પદાર્થના તંત્રની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા U કહે છે, જેને સામાન્ય રીતે તે પદાર્થની સ્થિતિ-ઊર્જા તરીકે પણ ઉલ્લેખવામાં આવે છે. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r ($> R_e$) અંતરે રહેલા m દળના પદાર્થની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા

$U = \frac{-GM_e m}{r} = \phi m$ અને પૃથ્વીની સપાટી પરના પદાર્થની ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જા

$U_e = \frac{-GM_e m}{R_e} = \phi_e m$.

ગુરુત્વસ્થિતિમાન અને ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જાનાં મૂલ્યોનું કોઈ મહત્ત્વ નથી, માત્ર તેમના ફેરફારનું જ મહત્ત્વ છે.

8. પૃથ્વીની સપાટી પરના સ્થિર પદાર્થ માટે કુલ ઊર્જા = તેની સ્થિતિ-ઊર્જા = $\frac{-GM_e m}{R_e}$.

$\therefore$ તેની નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા = બંધન-ઊર્જા = $\frac{GM_e m}{R_e}$ અને નિષ્ક્રમણ-વેગ $v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$ = 11.2 km/s.

ચંદ્રની સપાટી પરના સ્થિર પદાર્થ માટે નિષ્ક્રમણ-વેગ 2.3 km/s.

9. પૃથ્વીની આસપાસ ફરતા ઉપગ્રહનો કક્ષીય વેગ $v_0 = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ અને ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જા $= \frac{-GM_e m}{2r}$. તેની બંધન-ઊર્જા $= \frac{GM_e m}{2r}$. ભૂસ્થિર ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ T = 24 hour = 24 × 3600 s. તેઓ વિષુવવૃત્તીય સમતલમાં પૂર્વ-પશ્ચિમ દિશામાં ભ્રમણ કરે છે. પૃથ્વીની સપાટીથી તેની ઊંચાઈ h = 35800 km (લગભગ) છે. ધ્રુવીય ઉપગ્રહ ઉત્તર-દક્ષિણ દિશામાં ભ્રમણ કરે છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. N m^2/kg^2 એ નીચેનામાંથી શાનો એકમ છે ?
   (A) રેખીય વેગમાન (B) ગુરુત્વબળ
   (C) ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક અચળાંક (D) ગુરુત્વપ્રવેગ

2. કોઈ ગ્રહની આસપાસ ભ્રમણ કરતા જુદા જુદા ઉપગ્રહોની કક્ષીય ત્રિજ્યા r અને અનુરૂપ આવર્તકાળ T પરથી મળતા log r – log T ના આલેખનો ઢાળ કેટલો હશે ?
   (A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{2}{3}$ (D) 2

3. પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય 9.81 m/s^2 હોય તો પૃથ્વીની સપાટીથી પૃથ્વીના વ્યાસ જેટલી ઊંચાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગ કેટલો હશે ?

(A) 4.905 m/s^2 (B) 2.452 m/s^2 (C) 3.27 m/s^2 (D) 1.09 m/s^2

4. પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વસ્થિતિમાન Φ_e હોય, તો સપાટીથી પૃથ્વીની ત્રિજ્યા જેટલી ઊંચાઈએ ગુરુત્વસ્થિતિમાન કેટલું હશે ?

(A) $\frac{\Phi_e}{2}$ (B) $\frac{\Phi_e}{4}$ (C) Φ_e (D) $\frac{\Phi_e}{3}$

5. પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગ 10 m/s^2 અને પૃથ્વીની ત્રિજ્યા 6400 km લેતાં, સપાટીથી 64 km ઊંડાઈએ જતાં ગુરુત્વપ્રવેગ gના મૂલ્યમાં થતો ઘટાડો .... m/s^2 હશે.

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.05 (D) 0.3

6. પૃથ્વીની ચાકગતિને લીધે તેના વિષુવવૃત્ત પર રહેલા પદાર્થનો પૃથ્વીના કેન્દ્રથી દૂર તરફની ત્રિજ્યાવર્તી દિશામાંનો આભાસી પ્રવેગ કેટલો હશે ?

(A) ωR_e (B) $\omega^2 R_e$ (C) ωR_e^2 (D) $\omega^2 R_e^2$

જ્યાં, ω = પૃથ્વીની કોણીય ઝડપ,

R_e = પૃથ્વીની ત્રિજ્યા

7. ગ્રહની આસપાસ જુદી-જુદી વર્તુળકક્ષાઓમાં ભ્રમણ કરતા જુદા-જુદા ઉપગ્રહો માટે કોણીય વેગમાન L અને કક્ષીય ત્રિજ્યા r વચ્ચેનો સંબંધ નીચેનામાંથી કયો છે ?

(A) $L \alpha \frac{1}{\sqrt{r}}$ (B) $L \alpha r^2$ (C) $L \alpha \sqrt{r}$ (D) $L \alpha \frac{1}{r^2}$

8. ગોળાકાર નિયમિત કવચની અંદરના વિસ્તારમાં બધાં બિંદુઓએ ....

(A) ગુરુત્વતીવ્રતા અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન બંને શૂન્ય હોય છે.

(B) ગુરુત્વતીવ્રતા અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન બંને અશૂન્ય હોય છે.

(C) ગુરુત્વતીવ્રતા અશૂન્ય અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન શૂન્ય હોય છે.

(D) ગુરુત્વતીવ્રતા શૂન્ય અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન અશૂન્ય પણ સમાન હોય છે.

9. નીચેનામાંથી કયો વિકલ્પ અનુક્રમે ગુરુત્વસ્થિતિમાન અને ગુરુત્વસ્થિતિ-ઊર્જાનાં પારિમાણિક સૂત્રો રજૂ કરે છે ?

(A) $M^1L^1T^{-1}$, $M^1L^2T^{-2}$ (B) $M^0L^2T^{-2}$, $M^1L^2T^{-2}$

(C) $M^0L^2T^{-2}$, $M^1L^2T^2$ (D) $M^1L^2T^{-1}$, $M^2L^1T^{-1}$

10. સૂર્યની આસપાસ પરિભ્રમણ કરતા ગ્રહ માટે ....

(A) રેખીય ઝડપ અને કોણીય ઝડપ અચળ હોય છે.

(B) ક્ષેત્રીય વેગઅને કોણીય વેગમાન અચળ હોય છે.

(C) રેખીય ઝડપ અને ક્ષેત્રીય વેગ અચળ હોય છે.

(D) ક્ષેત્રીય વેગ અચળ હોય છે, પણ કોણીય વેગમાન બદલાય છે.

11. ગ્રહની આસપાસ એક જ કક્ષામાં ઘૂમતા બે ઉપગ્રહોનાં દળોનો ગુણોત્તર $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$ હોય, તો તેમના કક્ષીય વેગોનો ગુણોત્તર $\frac{v_1}{v_2}$ = ...

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 4

12. એક ગ્રહની આસપાસ r ત્રિજ્યાની કક્ષામાં રહેલા ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ T હોય, તો $4r$ ત્રિજ્યાની કક્ષામાંના ઉપગ્રહનો આવર્તકાળ T' = ...

(A) 4T (B) 2T (C) 8T (D) 16T

13. બે ગ્રહોની ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે r_1 અને r_2 તથા તેમની ઘનતાઓ અનુક્રમે ρ_1 અને ρ_2 છે. તેમની સપાટી પરના ગુરુત્વપ્રવેગ અનુક્રમે g_1 અને g_2 છે, તો. $\frac{g_1}{g_2}$ = ...

(A) $\frac{r_1\rho_1}{r_2\rho_2}$ (B) $\frac{r_2\rho_2}{r_1\rho_1}$ (C) $\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}$ (D) $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$

14. પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહોની ગતિ-ઊર્જા (E_k) અને તેમની કક્ષીય ત્રિજ્યા (r) વચ્ચેનો સંબંધ કેવા પ્રકારનો હશે ?

(A) $E_k \propto r$ (B) $E_k \propto \frac{1}{r}$ (C) $E_k \propto r^2$ (D) $E_k \propto \frac{1}{r^2}$

15. પૃથ્વીની ત્રિજ્યા R_eમાંથી $\frac{R_e}{2}$ થાય તેમ પૃથ્વીનું સંકોચન થાય (પણ કપાઈ જતી નથી !) તો તે બે સ્થિતિમાં તેના કેન્દ્રથી R_e અંતરે આવેલા બિંદુએ ગુરુત્વપ્રવેગ gનાં મૂલ્ય અને ગુરુત્વસ્થિતિમાન ϕનાં મૂલ્ય અંગે શું કહી શકાય ?

(A) g અને ϕ બંનેનાં મૂલ્ય અડધાં થાય છે.

(B) gનું મૂલ્ય અડધું થાય અને ϕનું મૂલ્ય અગાઉ જેટલું જ છે.

(C) gનું મૂલ્ય અગાઉ જેટલું જ અને ϕનું મૂલ્ય અડધું થાય છે.

(D) g અને ϕ ના બંનેનાં મૂલ્ય અગાઉ જેટલાં જ રહે છે.

જવાબો

1. (C) **2.** (C) **3.** (D) **4.** (A) **5.** (A) **6.** (B)
7. (C) **8.** (D) **9.** (B) **10.** (B) **11.** (A) **12.** (C)
13. (A) **14.** (B) **15.** (D)

નીચે આપેલ પ્રશ્નોના જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. પૃથ્વીના વિષુવવૃત્ત અને ધ્રુવમાંથી કયા સ્થળે ગુરુત્વપ્રવેગ gનું મૂલ્ય વધારે હોય છે ? શા માટે ?

2. પૃથ્વીના કેન્દ્ર પર ગુરુત્વપ્રવેગ અને ગુરુત્વતીવ્રતાનાં મૂલ્યો જણાવો.

3. એક બિંદુએ ગુરુત્વતીવ્રતાનું મૂલ્ય 0.7 N/kg છે, તો તે બિંદુએ 5 kg દળના પદાર્થ પર લાગતા ગુરુત્વબળનું મૂલ્ય કેટલું હશે ? [**જવાબ :** 3.5 N]

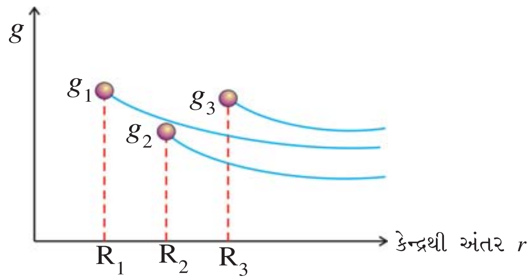
4. "કોઈ ગ્રહની સપાટી પરના સ્થિર પદાર્થ માટે નિષ્ક્રમણ-વેગ v_e નું મૂલ્ય ગ્રહના દળ અને ત્રિજ્યાના સમપ્રમાણમાં હોય છે." – આ વિધાન સાચું છે ? જો ન હોય તો સુધારીને લખો.

5. ધ્રુવીય ઉપગ્રહના કોઈ બે ઉપયોગો જણાવો.

6. જો કોઈ ઉપગ્રહની ગતિ-ઊર્જા 6×10^9 J હોય તો તેની સ્થિતિ-ઊર્જા કેટલી હશે ? કુલ ઊર્જા કેટલી હશે ?

7. એક ઉપગ્રહની સ્થિતિ-ઊર્જા -8×10^9 J છે. તો તેની બંધન-ઊર્જા (અથવા નિષ્ક્રમણ-ઊર્જા) કેટલી હશે ?

8. જુદા-જુદા ગ્રહોનાં દળ M_1, M_2, M_3 ત્રિજ્યાઓ R_1, R_2, R_3 અને સપાટી પરના ગુરુત્વ-પ્રવેગ g_1, g_2, g_3 છે, તો તેમને માટેના નીચેના આલેખ પરથી તેમનાં દળનાં મૂલ્યોને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવો.



આકૃતિ 3.20

(**Hint :** કોઈક નિશ્ચિત અંતર $r > R_3$ માટે $g = \frac{GM}{r^2}$ પરથી વિચારો.]

[**જવાબ :** $M_3 > M_1 > M_2$]

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ન્યૂટનનો ગુરુત્વાકર્ષણનો સાર્વત્રિક નિયમ જણાવો અને તેના સૂત્રને સદિશ સ્વરૂપમાં લખો અને સમજાવો.

2. પૃથ્વીના ઉપગ્રહ માટે કક્ષીય વેગનું સૂત્ર મેળવો.

3. પૃથ્વીના ઉપગ્રહ માટે આવર્તકાળનું સૂત્ર તારવો.

4. પૃથ્વીની સપાટી પર રહેલા સ્થિર પદાર્થ માટે નિષ્ક્રમણ-ઝડપ (નિષ્ક્રમણ-વેગ)નું સૂત્ર મેળવો.

5. પૃથ્વીની સપાટીથી d ઊંડાઈએ ગુરુત્વપ્રવેગનું સૂત્ર મેળવો.

6. ઉપગ્રહની કુલ ઊર્જાનું સૂત્ર મેળવો.

7. ગુરુત્વાકર્ષી તીવ્રતાની વ્યાખ્યા આપો અને તેનું સૂત્ર લખો. તેનો એકમ અને પારિમાણિક સૂત્ર જણાવો.

8. ગુરુત્વસ્થિતિમાનની વ્યાખ્યા આપો. તેનો એકમ અને પારિમાણિક સૂત્ર જણાવો.

9. ગુરુત્વ સ્થિતિ-ઊર્જાની વ્યાખ્યા આપો. તેનો એકમ અને પારિમાણિક સૂત્ર જણાવો.

10. પૃથ્વીના કેન્દ્રથી r ($> R_e$) અંતરે તેના ગુરુત્વસ્થિતિમાનનું સૂત્ર મેળવો.

11. પૃથ્વીના ભ્રમણને લીધે અક્ષાંશ સાથે અસરકારક ગુરુત્વપ્રવેગ g' માં થતાં ફેરફારનું સૂત્ર મેળવો.

12. સૂર્યની આસપાસ ઘૂમતા ગ્રહની અર્ધ-દીર્ઘ અક્ષ a છે અને આટલા અંતરે ગ્રહની યાંત્રિક ઊર્જા $\frac{-GMm}{2a}$; જ્યાં, M = સૂર્યનું દળ; m = ગ્રહનું દળ. જ્યારે ગ્રહનું સૂર્યથી અંતર r હોય ત્યારે તેનો વેગ શોધો.

[**જવાબ :** $v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$]

[**Hint :** યાંત્રિક ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમનો ઉપયોગ કરો.].

13. g અને G વચ્ચેના તફાવતના મુદ્દા આપો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. એક અવકાશયાન પૃથ્વીથી સીધું સૂર્ય તરફ જાય છે. તો પૃથ્વીના કેન્દ્રથી કેટલે દૂર અવકાશયાન પર લાગતાં સૂર્ય અને પૃથ્વીનાં ગુરુત્વાકર્ષી બળો સમાન મૂલ્યનાં થશે ? સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર 1.49×10^8 km, સૂર્ય અને પૃથ્વીનાં દળ અનુક્રમે 2×10^{30} kg અને 6×10^{24} kg લો. [**જવાબ :** 25.7×10^4 km]

2. પૃથ્વી જો સમગ્રપણે સોનાનો જ બનેલો ગોળો હોત (!) તો પૃથ્વીની સપાટી પર ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય કેટલું હોત ? પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6400 km., સોનાની ઘનતા = 19.3×10^3 kg/m^3, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2. [**જવાબ** : 34.49 $m\ s^{-2}$]

3. સૂર્યની આસપાસ પૃથ્વીની વર્તુળાકાર ભ્રમણકક્ષાની ત્રિજ્યા 1.5×10^8 km છે. પૃથ્વીની કક્ષીય ઝડપ 30 km/s છે, તો સૂર્યનું દ્રવ્યમાન શોધો. $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

[**જવાબ** : 2.02×10^{30}kg]

4. પૃથ્વીની સપાટીથી, પૃથ્વીની ત્રિજ્યા જેટલી ઊંચાઈએ એક ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે, તો તેના (*i*) કક્ષીય ઝડપ અને (*ii*) આવર્તકાળ શોધો. $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6400 km અને પૃથ્વીનું દળ = 6×10^{24} kg લો.

[**જવાબ** : $v_0 = 5.59 \times 10^3$ m/s, T = 14376s]

5. 200 kg નો એક ઉપગ્રહ, પૃથ્વીની સપાટીથી 1000 km ઊંચાઈએ પૃથ્વીની આસપાસ પરિભ્રમણ કરે છે, તો આ ઉપગ્રહની (*i*) બંધન-ઊર્જા અને (*ii*) નિષ્ક્રમણ-ઝડપ શોધો. પૃથ્વીનું દળ $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 અને પૃથ્વીની ત્રિજ્યા = 6400 km લો. પૃથ્વીનું દળ = 6×10^{24} kg. [**જવાબ** : 5.4×10^9 J; $v_e = 7.35 \times 10^3$ m/s]

6. એક કૃત્રિમ ઉપગ્રહ પૃથ્વીની આસપાસ, પૃથ્વીની સપાટીથી તદ્દન નજીક રહીને ભ્રમણ કરે છે, તો સાબિત કરો કે તેનો આવર્તકાળ $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$.

7. સાબિત કરો કે પૃથ્વીની સપાટીની તદ્દન નજીક રહીને પૃથ્વીની આસપાસ ભ્રમણ કરતા ઉપગ્રહની રેખીય (કક્ષીય) ઝડપ અને પૃથ્વી પરના સ્થિર પદાર્થની નિષ્ક્રમણ-ઝડપનો ગુણોત્તર $\frac{1}{\sqrt{2}}$ જેટલો છે.

8. પૃથ્વી અને ચંદ્રનાં દળો અને ત્રિજ્યાઓ અનુક્રમે M_1, R_1 અને M_2, R_2 છે. તેમનાં કેન્દ્રો વચ્ચેનું અંતર d છે, તો તેમને જોડતી રેખાના મધ્યબિંદુ પરથી m દળના કણને કેટલા વેગથી ફેંકવો જોઈએ કે જેથી તે અનંત અંતરે નાસી જાય ?

[**જવાબ** : $v_e = \sqrt{\frac{4G}{d}(M_1 + M_2)}$]

9. ખૂબ જ મોટા દળવાળા તારા (star)ની આસપાસ જુદી-જુદી વર્તુળાકાર કક્ષામાં ભ્રમણ કરતા ગ્રહોનો વિચાર કરો. જો ગ્રહો અને તારા વચ્ચેનું ગુરુત્વાકર્ષણ બળ $r^{-5/2}$ અનુસાર લાગતું હોય તો કક્ષીય આવર્તકાળનો વર્ગ r ના કયા ઘાતાંક પર આધાર રાખતો હશે ?

[**જવાબ** : $T^2 \propto r^{7/2}$]

•

પ્રકરણ 4

ઘન પદાર્થોના યાંત્રિક ગુણધર્મો

4.1 પ્રસ્તાવના
4.2 ઘન પદાર્થો
4.3 સ્થિતિસ્થાપકતા
4.4 પ્રતિબળ અને વિકૃતિ વચ્ચેનો સંબંધ
4.5 હુકનો નિયમ અને સ્થિતિસ્થાપકતા અંક
4.6 પોઈસનનો ગુણોત્તર
4.7 સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા
4.8 દ્રવ્યની સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂકના ઉપયોગ
• સારાંશ
• સ્વાધ્યાય

4.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

આ પ્રકરણમાં આપણે, ઘન પદાર્થનું બંધારણ અને તેના યાંત્રિક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરીશું. આ ગુણધર્મો પૈકી એક સ્થિતિ સ્થાપકતાનો વિસ્તૃત અભ્યાસ આપણે આ પ્રકરણમાં કરીશું. વીસમી સદીના છેલ્લા બે દાયકામાં સોલિડ સ્ટેટ ભૌતિકવિજ્ઞાન અને લિક્વિડ સ્ટેટ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ઘણી પ્રગતિ સધાઈ છે. હવે ઘણા પદાર્થો માટે સ્થિતિસ્થાપકતાને લગતી ભૌતિક રાશીઓના મૂલ્ય કમ્પ્યૂટરની મદદથી ગણી કાઢવાનું શક્ય બન્યું છે. પ્રસ્તુત પ્રકરણમાં આપણે સ્થિતિસ્થાપકતાને લગતી પ્રાથમિક માહિતીની ચર્ચા કરીશું અને છેલ્લે ઘન પદાર્થની સ્થિતિસ્થાપકતાના વ્યાવહારિક ઉપયોગોની ચર્ચા કરીશું.

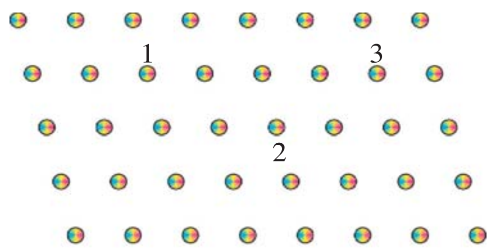
4.2 ઘન પદાર્થો (Solids)

ઘન પદાર્થોનો એક અગત્યનો ગુણધર્મ એ છે કે, નિશ્ચિત ભૌતિક પરિસ્થિતિઓમાં ઘટકકણો વચ્ચેનું અંતર અચળ હોય છે. પદાર્થના તાપમાનને અનુરૂપ હોય તેવા કંપવિસ્તારથી આ ઘટક કણો પોતાના મધ્યમાન સ્થાનની આસપાસ દોલનો કરતાં હોય છે. પરંતુ કોઈ પણ બે કણ વચ્ચેનું સરેરાશ અંતર હંમેશાં અચળ રહે છે. સંતુલન સ્થાનમાં રહેલા કણો વચ્ચેના અંતરોમાં વધારો ઘટાડો કરવામાં આવે, તો આ કણો વચ્ચે પ્રવર્તતાં આંતરઅણુ બળો એ રીતે બદલાય છે જેથી કણો વચ્ચેના સરેરાશ અંતરો જળવાઈ રહે. આમ, જ્યારે કણોને તેમના મધ્યમાન સ્થાનથી વિચલિત કરવામાં આવે તો તેમને તેમના મૂળ સ્થાન તરફ ખેંચી જતું બળ અસ્તિત્વમાં આવે છે. આવા બળને પુનઃસ્થાપક બળ કહે છે.

ઘન પદાર્થોમાં બંધારણીય કણોની ગોઠવણને આધારે તેમના ત્રણ પ્રકાર પાડવામાં આવે છે. આવુ વર્ગીકરણ અન્ય કોઈ ગુણધર્મને આધારે પણ કરી શકાય. આ પ્રકારો છે : (i) સ્ફટિકમય પદાર્થો (ii) અસ્ફટિકમય પદાર્થો અને (iii) અર્ધસ્ફટિકમય પદાર્થો.

(i) સ્ફટિકમય ઘન પદાર્થો (Crystalline Solids) : આ પ્રકારના ઘન પદાર્થોમાં ઘટકકણોની નિયમિત ભૌમિતિક હારબદ્ધ ગોઠવણી હોય છે. આ બાબત સમજવા માટે આકૃતિ 4.1 માં બિન્દુઓની દ્વિપરિમાણમાં અનંત ગોઠવણીનો અંશમાત્ર છે. અહીં કોઈ પણ બિન્દુ 1, 2, કે 3 પર રહીને અવલોકન કરતાં તમને સમાન ભાત જોવા મળશે. ત્રિપરિમાણમાં બિન્દુઓની આવી ગોઠવણીને 'લૅટિસ' કહે છે. લૅટિસ ગાણિતિક ખ્યાલ છે. જો બધી રીતે સમાન અણુઓ, પરમાણુઓ કે આયનો અથવા તેમના સમૂહો (કે જેમને બેસિસ કહેવાય છે.) લૅટિસ બિન્દુઓ પર મૂકતાં સ્ફટિકનું

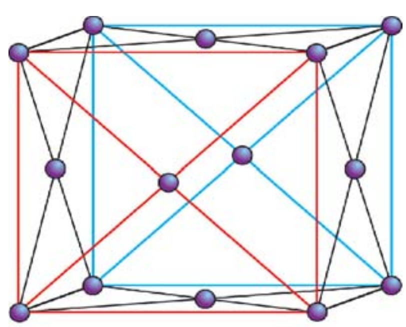
થાય છે. ઘટકકણો વચ્ચે પ્રર્વતમાન આંતરક્રિયાઓને અનુલક્ષીને જુદા જુદા પ્રકારના સ્ફટિકનું નિર્માણ થાય છે. પરંતુ ઘન પદાર્થ આપેલ પરિસ્થિતિમાં, એવું જ બંધારણ અપનાવે છે, જેથી તેની આંતરિક ઊર્જા લઘુતમ થાય.



લૅટિસ

આકૃતિ 4.1

સ્ફટિકને એક કરતાં વધુ એકસમાન એકમોનો બનેલો વિચારી શકાય. આવો જ એક કૉપરના ઘટકકણો (આયનો)નો બનેલો 'એકમ' આકૃતિ 4.2માં દર્શાવેલ છે. અહીં આ ગોઠવણીમાં સમઘનના દરેક શિરોબિન્દુ પર અને સમઘનની બાજુઓનાં કેન્દ્રો પર એક-એક આયન ગોઠવાયેલા હોય છે. હવે જો આવા એકમોને ત્રિપરિમાણમાં એકબીજાની પાસેપાસે ગોઠવતા જઈએ તો કૉપરનો સ્ફટિક તૈયાર થાય છે.



કૉપરના સ્ફટિકનો એકમકોષ

આકૃતિ 4.2

સ્ફટિકના બંધારણનો અભ્યાસ કરતી ભૌતિકવિજ્ઞાનની શાખોને ક્રિસ્ટલોગ્રાફી કહે છે. સ્ફટિક બંધારણનો અભ્યાસ X–કિરણો, ઈલેક્ટ્રૉન-કિરણો (electron beam) અને ન્યુટ્રૉન કિરણો (neutron beam) વડે કરી શકાય છે.

સ્ફટિકમય પદાર્થોમાં લાંબા ગાળાની વ્યવસ્થા **(long range order)** જોવા મળે છે. પરિણામે સ્ફટિકમય પદાર્થો નિશ્ચિત તાપમાને પીગળે છે.

સ્ફટિકમય પદાર્થોને તેમના બંધારણીય કણોના પ્રકાર અને તેમની વચ્ચેના પ્રવર્તમાન બંધન (bonding)ના આધારે ચાર વર્ગોમાં વહેંચવામાં આવે છે.

આણ્વિક ઘન (Molecular Solids) : આવા ઘન પદાર્થોમાં બંધારણીય કણો તરીકે અણુઓ હોય છે. આવા પદાર્થના અણુઓ ઈલેક્ટ્રૉનની ભાગીદારીને કારણે બનતા સહસંયોજક-બંધને કારણે નિર્માણ પામે છે. અણુઓ ધ્રુવીય કે અધ્રુવીય હોઈ શકે. (જો અણુઓમાં ધન વીજભાર અને ઋણ વીજભારનાં કેન્દ્ર એકબીજાં સાથે સંપાત થતાં હોય તો અણુ-અધ્રુવીય (non-polar) કહેવાય, નહીં તો ધ્રુવીય (polar) કહેવાય, આયોડિન (I_2), ફૉસ્ફરસ (P_4) અને સલ્ફર (S_8) અને કાર્બન ડાયૉક્સાઈડ (CO_2)ના અણુઓ અધ્રુવીય છે. જ્યારે પાણી (H_2O) ના ધ્રુવીય અણુ છે. જો ઘન પદાર્થ ધ્રુવીય અણુઓનો બનેલો હોય, તો આવા ઘન પદાર્થના નિર્માણ માટે ડાયપોલ-ડાયપોલ આકર્ષણબળ જવાબદાર હોય છે. જ્યારે અન્ય પ્રકારના આણ્વિક ઘન પદાર્થના નિર્માણ માટે વાન-ડર-વાલ બળો જવાબદાર હોય છે. આ આંતર-અણુબળો નબળા હોવાથી આવા ઘન પદાર્થોના ગલનબિન્દુ અન્ય ઘન પદાર્થોની સરખામણીમાં નીચા (ઓછા મૂલ્યના) હોય છે. આ પદાર્થો ઉષ્મા અને વિદ્યુતના અવાહક હોય છે.

આયનિક ઘન પદાર્થો (Ionic Solids) : આ પ્રકારના ઘન પદાર્થોમાં બંધારણીય કણો આયન હોય છે. આ આયનો વચ્ચે ઉદ્‌ભવતા સ્થિતવિદ્યુતીય આકર્ષણ અને જેના મૂળ ક્વૉન્ટમ મિકેનિક્સમાં છે, તેવા અપાકર્ષણના સંયુક્ત પરિણામે બંધ રચાતા હોય છે. આ આકર્ષી બળો ઘણાં જ પ્રબળ હોવાથી આવા પદાર્થો સખત (hard) હોય છે. અને તેમનાં ગલનબિન્દુ ઊંચાં હોય છે. આવા ઘન પદાર્થો વિદ્યુતના અવાહક હોય છે. દા.ત., NaCl.

સહસંયોજક ઘન પદાર્થો (Covalent Solids) : આવા પદાર્થોના બંધારણીય કણો તરીકે પરમાણુ હોય છે. દરેક પરમાણુ તેના નિકટતમ પડોશી પરમાણુઓ સાથે સહસંયોજક-બંધથી જોડયેલો હોય છે. જો કોઈ પરમાણુને સમચતુષ્ફલક (tetrahedron)ના કેન્દ્ર પર રહેલો વિચારીએ તો તેના ચાર નિકટતમ પડોશી પરમાણુઓ સમચતુષ્ફલકના શિરોબિન્દુ પર હોય છે. આવી રચનાનું ત્રિપરિમાણમાં પુનરાવર્તન કરતાં સહસંયોજક ઘન પદાર્થો તૈયાર થાય છે. ડાયમંડ, સિલિકોન, જર્મેનિયમ વગેરે આ પ્રકારના પદાર્થો છે. આવા પદાર્થો પણ ઘણા સખત હોય છે અને તેમનાં ગલનબિન્દુઓ પણ ઊંચાં હોય છે. આવા પદાર્થો અર્ધવાહકો તરીકે વર્તે છે. આવા ઘન પદાર્થો 'નેટવર્ક સોલિડ' તરીકે પણ ઓળખાય છે.

ધાત્ત્વિક ઘન પદાર્થો (Metallic Solids) : જો લૅટિસ બિન્દુઓ પર ધન આયનો ગોઠવવામાં આવે, તો ધાત્વિક ઘન પદાર્થનું નિર્માણ થાય. ધાત્વિક ઘન પદાર્થોના નિર્માણ સમયે ધાતુના અણુઓ તેમના વેલેન્સ ઈલેક્ટ્રૉન ગુમાવીને ઘન આયન બને છે. આ રીતે મળેલાં મુક્ત ઈલેક્ટ્રૉન આયનો વચ્ચેના અવકાશમાં અસ્તવ્યસ્ત ગતિ કરે છે. તેથી આવા ઘન પદાર્થો ઉષ્મા અને વિદ્યુતના સુવાહકો હોય છે.

(ii) અસ્ફટિકમય પદાર્થો (Non-crystalline substances) : અમુક ઘન પદાર્થોના બંધારણીય કણોની ગોઠવણી વ્યવસ્થિત હોતી નથી. આવા ઘન પદાર્થોને અસ્ફટિકમય ઘન પદાર્થો કહે છે. ઉદાહરણ તરીકે લાકડું.

અમુક ઘન પદાર્થો એવા પણ હોય છે જે કે સ્ફટિકમય રૂપ ધારણ કરી શકે તેમ છે. પરંતુ આવા પદાર્થને પીગળેલ અવસ્થામાં તેના ઘનીકરણ તાપમાન કરતો ઊંચા તાપમાને રાખી જો એકાએક તેનું તાપમાન ખૂબ નીચું લાવી દેવામાં આવે, તો તેના ઘટકકણોને યોગ્ય રીતે ગોઠવાઈને સ્ફટિકરચના કરવાની તક મળે તે પહેલાં જ તેઓ ફક્ત ટૂંકા ગાળાની વ્યવસ્થા (short range order) સાથે ગોઠવાઈને જે ઘન પદાર્થ રચે છે, તેને **ગ્લાસી અથવા એમોરફસ** પદાર્થ કહે છે. અહીં short range order નો અર્થ એ છે કે કોઈ કણ તેની નજીકના અમુક (ચાર-પાંચ) કણો સાથે બંધ બનાવી તેમની વચ્ચે ચોક્કસ ભૌમિતિક ગોઠવણને ગ્લાસી પદાર્થની રચના કહે છે.

એ નોંધો કે ગ્લાસી પદાર્થોને જો પૂરતી તક આપવામાં આવી હોત, તો તેઓ સ્ફટિકમય પદાર્થ તરીકે પોતાની હાજરી જરૂર નોંધાવી શક્યા હોત. જ્યારે અમુક પદાર્થો તો એવા છે કે જેમને ગમે તેટલી તક પૂરી પાડવામાં આવી હોત તોપણ તેઓ અસ્ફટિકમય જ રહ્યા હોત.

અહીં પ્રશ્ન એ ઉપસ્થિત થાય કે જે રીતે ગ્લાસી પદાર્થોમાં long range order હોતો નથી, તે જ રીતે પ્રવાહીમાં પણ long range order હોતો નથી, તો પછી તે પદાર્થો પ્રવાહીની જેમ વહન પામતા કેમ નથી ? ઉત્તર એ છે કે પ્રવાહી કરતાં ગ્લાસી પદાર્થોમાં આંતર-અણુબળો વધુ પ્રબળ હોય છે. આથી જ તો પ્રવાહીની માફક ગ્લાસી પદાર્થ સામાન્ય સંજોગોમાં વહી શકતો નથી. હવે તમને પાકી ખાતરી થશે કે દ્રવ્યની અવસ્થા નક્કી કરવામાં આંતરઅણુ (કે પરમાણ) બળો જ અગત્યનો ભાગ ભજવે છે.

ગ્લાસી પદાર્થમાં જુદા-જુદા બંધોની મજબૂતી જુદી જુદી હોવાના કારણે તેનું તાપમાન વધારતાં નબળા બંધો પહેલાં તૂટે છે અને મજબૂત બંધો પછી તૂટે છે. આથી તાપમાન વધારતાં પ્રથમ તે ઢીલો પડે છે, પછી તેનો જાડો રગડો થાય છે અને છેવટે સંપૂર્ણ પીગળી જાય છે.

(iii) અર્ધસ્ફટિકમય પદાર્થો (Semi-crystalline substances) : રોજબરોજના વપરાશમાં આવતા પોલિઇથિલિનના અણુને રાસાયણિક સૂત્ર $(-CH_2-)_n$, વડે દર્શાવાય છે. અહીં CH_2 જેવો ઘટકો n વખત પુનરાવર્તન પામી લાંબી ચેઇન જેવા અણુની રચના કરે છે. આવા અણુને મેક્રોઅણુ કહે છે. પ્રોટીનના અણુઓ પણ આ વર્ગમાં આવે છે. જ્યારે આવા અણુથી બનેલા પદાર્થને તેના પ્રવાહી સ્વરૂપ કે પીગળેલ સ્વરૂપમાંથી ઠંડા પાડવામાં આવે છે, ત્યારે તેમના અણુઓ એવી રીતે ગોઠવાય છે કે ઘનીકરણ પામેલા પદાર્થના અમુક ભાગમાં અણુઓની ચેઇનની ગોઠવણી વ્યવસ્થિત હોય છે અને બીજા ભાગોમાં આવી વ્યવસ્થિત ગોઠવણી હોતી નથી. આવા પદાર્થોને અર્ધસ્ફટિકમય પદાર્થો કહે છે. આ પદાર્થો જેને વ્યાપક રીતે પોલિમર કહે છે. તેની આધુનિક મટીરીયલ સાયન્સમાં ઘણી અગત્ય છે.

4.3 સ્થિતિસ્થાપકતા (Elasticity)

મિકેનિક્સમાં આપણે જોયું કે બળ પદાર્થની ગતિની અવસ્થા તેમજ તેનો આકાર બદલી શકે છે. પરંતુ આ બે પૈકી બળની બીજી અસરનો અભ્યાસ હજી સુધી આપણે કર્યો નથી. વાસ્તવમાં આદર્શ દૃઢ પદાર્થ એક કલ્પના માત્ર છે. વાસ્તવમાં દરેક ઘન પદાર્થમાં બાહ્ય વિરૂપક બળ દ્વારા વિરૂપણ ઉત્પન્ન કરી શકાય છે. પદાર્થમાં કેટલી માત્રામાં વિરૂપણ ઉત્પન્ન થશે. તેના આધાર પદાર્થની આ ફેરફારનો વિરોધ કરવાની ક્ષમતા પર રહેલો છે. દરેક પદાર્થ આવા ફેરફારનો વિરોધ એકસરખી માત્રામાં નથી કરી શકતા. બાહ્ય બળ દ્વારા વિરૂપણ પામેલા કેટલાંક વિરૂપક બળ દૂર થતાં પોતાનો મૂળ આકાર પ્રાપ્ત કરે છે. કેટલી માત્રામાં વિરૂપક પામેલો પદાર્થ, વિરૂપક બળ દૂર થતાં, પોતાના આકાર પુનઃપ્રાપ્ત કરશે તેનો આધાર પદાર્થ પર રહેલો છે. જે ગુણધર્મને કારણે પદાર્થ તેના પર લાગતા વિરૂપક બળનો પ્રતિકાર કરે છે અથવા તેની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરવાનો પ્રયત્ન કરે છે, તેને સ્થિતિસ્થાપકતા કહે છે.

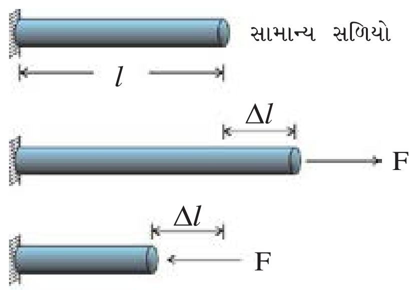
વિરૂપક બળ દૂર કરતાં જો પદાર્થ પોતાની મૂળ સ્થિતિ સંપૂર્ણપણે પ્રાપ્ત કરી શકે તો તેવા પદાર્થને **સંપૂર્ણ સ્થિતિ સ્થાપક** પદાર્થ કહે છે. જો પદાર્થ, વિરૂપક બળ દૂર કર્યા બાદ, પોતાની મૂળ સ્થિતિ અંશતઃ પણ પ્રાપ્ત ન કરી શકે તો તેવા પદાર્થને **સંપૂણ અસ્થિતિસ્થાપક** પદાર્થ કે પ્લાસ્ટિક કહે છે. જો પદાર્થ પોતાની મૂળ-સ્થિતિ અંશતઃ પુનઃપ્રાપ્ત કરી શકતો હોય, તો તે પદાર્થને અંશતઃ સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થો કહે છે. મોટા ભાગના પદાર્થો અંશતઃ સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થો હોય છે.

સ્થિતિસ્થાપકતાના અભ્યાસ માટે આપણે પ્રતિબળ (stress) અને વિકૃતિ (strain) નામની બે ભૌતિક રાશીઓ વ્યાખ્યાયિત કરવી પડશે. શરૂઆત વિકૃતિથી કરીએ.

4.3.1 વિકૃતિ (Strain) :

પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લગાડતાં તેની લંબાઈ કદ કે આકાર બદલાય છે. આ દરેક ફેરફારને અનુરૂપ ત્રણ પ્રકારની વિકૃતિ(ઇ)ની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

(i) પ્રતાન(સંગત)-વિકૃતિ (Logitudinal Strain) : પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લગાડતાં તેની લંબાઈમાં થતાં ફેરફાર અને મૂળ લંબાઈના ગુણોત્તરને (લંબાઈમાં થતાં આંશિક ફેરફારને) પ્રતાન-વિકૃતિ કહે છે.



પ્રતાન (સંગત)-વિકૃતિ
આકૃતિ 4.3

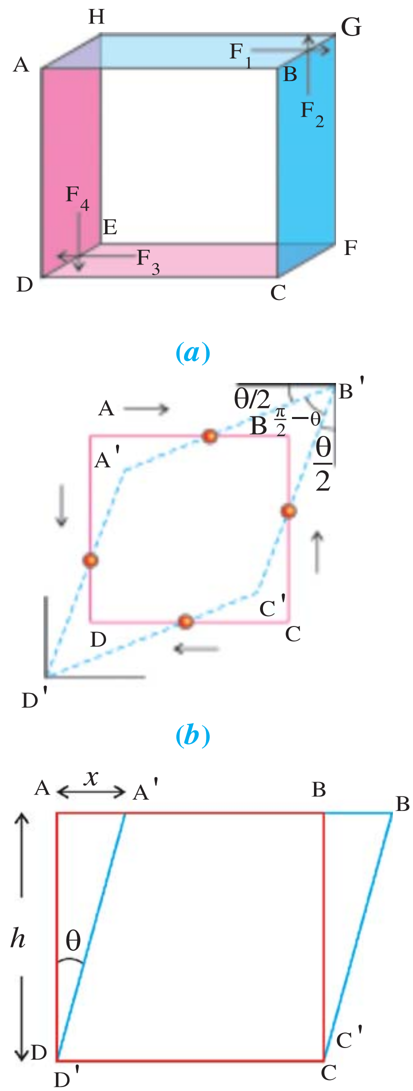
આમ, પ્રતાન-વિકૃતિ $\varepsilon_l = \dfrac{\Delta l}{l}$ (4.3.1)

જો બાહ્ય બળને કારણે સળિયાની લંબાઈમાં વધારો થતો હોય, તો પ્રતાન-વિકૃતિને **તણાવ-વિકૃતિ (tensile strain)** કહે છે. જો બાહ્ય બળને કારણે લંબાઈમાં ઘટાડો થતો હોય, તો અનુરૂપ વિકૃતિને **દાબીય વિકૃતિ (compressive strain)** કહે છે.

(ii) કદ વિકૃતિ (Volume Strain) : કોઈ પદાર્થની સપાટી પર બધે જ, સપાટીને લંબરૂપ બળ લગાડવામાં આવે તો તેના કદમાં ફેરફાર થાય છે. પદાર્થના કદમાં થતા આંશિક ફેરફારને કદ-વિકૃતિ કહે છે. જો પદાર્થનું મૂળ કદ V હોય અને તેના કદમાં થતો ફેરફાર ΔV હોય, તો કદ-વિકૃતિ

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} \qquad (4.3.2)$$

(iii) આકાર-વિકૃતિ (Shearing Strain) : કોઈ પદાર્થના કોઈ આડછેદ પર આડછેદને સ્પર્શીય બળ લગાડવામાં આવે, તો તેના આકારમાં ફેરફાર થાય છે. લંબાઈ અને કદની જેમ આકારને માપી શકાતો ન હોઈ આકાર-વિકૃતિ સમજવા માટે આકૃતિ 4.4*a* ધ્યાનમાં લો. અત્રે કોઈ સમઘન આકારનો પદાર્થ પર તેના સમતલો AHGB, BGFC, DEFC અને DAHE પર સ્પર્શક રૂપે સમાન મૂલ્યનાં બળો લગાડેલ છે. આ સ્થિતિમાં પદાર્થ પરનું કુલ બળ અને કુલ ટૉર્ક શૂન્ય હોવાથી પદાર્થ રેખીય તેમજ ચાકગતીય એમ બંને પ્રકારના સંતુલનમાં છે. પરંતુ આ પદાર્થ પર પરસ્પર વિરોધી દિશામાંના બળયુગ્મો લાગતાં હોવાથી તેમાં આકારનું વિરૂપણ ઉદ્ભવે છે. અહીં આકારના વિરૂપણને કારણે સમતલ ABCD કેવો આકાર ધારણ કરશે તે આકૃતિ 4.4(*b*)માં દર્શાવ્યું છે. સરળતા ખાતર આકૃતિમાં વિરૂપણ વિવર્ધિત કરીને દર્શાવ્યું છે.



કદવિકૃતિ
આકૃતિ 4.4

વિરૂપણના કારણે AB અને BC વચ્ચેનો ખૂણો $\dfrac{\pi}{2}$ ન રહેતાં $\dfrac{\pi}{2} - \theta$ થાય છે. આ વિરૂપણ માપવા માટે ત્રુટક રેખાથી દર્શાવેલ વિરૂપિત આકાર A'B'C'D' (તેના સમતલને લંબ હોય તેવી અક્ષની આસપાસ) ભ્રમણ આપી તેને એવી રીતે ગોઠવીએ કે જેથી તેની ધાર D'C' અવિરૂપિત અવસ્થામાંની ધાર DC સાથે સંપાત થાય. આ હકીકત આકૃતિ 4.4(*c*)માં દર્શાવેલ છે. અહીં tanθને આકારની અથવા દઢતાની વિકૃતિ કહે છે. જો θનું મૂલ્ય (રેડિયનમાં) નાનું હોય તો $\tan\theta \simeq \theta$ અને આ સ્થિતિમાં θને આકાર-વિકૃતિ કહે છે. $\theta = (\varepsilon_S)$.

આમ, આકાર-વિકૃતિ, $\varepsilon_S = \dfrac{x}{h} = \tan\theta$ (4.3.3)

તથા θના નાના મૂલ્ય માટે $\varepsilon_S = \theta$

બધા પ્રકારની વિકૃતિ પરિમાણરહિત ભૌતિક રાશિઓ છે.

4.3.2 પ્રતિબળ (Stress) :

સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થ પર લાગેલું વિરૂપક બળ દૂર કરતાં તે પોતાની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે. આ ત્યારે જ શક્ય બને જ્યારે, વિરૂપણનો વિરોધ કરનારું પુનઃસ્થાપક બળ તેમાં ઉત્પન્ન થાય. પદાર્થમાં આડછેદના એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉદ્ભવતું પુનઃસ્થાપક બળ પ્રતિબળ કહેવાય છે. જો પદાર્થ પોતે સંતુલનમાં હોય, તો બાહ્ય બળનું મૂલ્ય પુનઃસ્થાપક બળના મૂલ્ય જેટલું થાય. જો પુનઃસ્થાપક બળ F અને આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A હોય, તો પ્રતિબળ (σ) નીચેના સૂત્ર પરથી મળે.

$$\text{પ્રતિબળ } \sigma = \frac{\text{બળ}}{\text{ક્ષેત્રફળ}} = \frac{F}{A} \qquad (4.3.4)$$

પ્રતિબળનો SI એકમ Nm^{-2} અથવા પાસ્કલ (Pa) છે. તેનું પરિમાણિક સૂત્ર $M^1L^{-1}T^{-2}$ છે.

(i) પ્રતાન-પ્રતિબળ (Longitudinal Stress)

આકૃતિ 4.5(*a*)માં એક સળિયો અને તેનો એક આડછેદ (ત્રુટક રેખાથી) દર્શાવેલ છે.

(*a*)

(*b*)

પ્રતાન-પ્રતિબળ

આકૃતિ 4.5

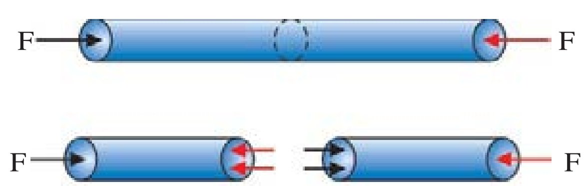
સળિયો બે સરખા અને પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં લાગતાં બાહ્ય બળોની અસર હેઠળ સંતુલનમાં છે. આ સંજોગોમાં આડછેદની ડાબી અને જમણી બાજુએ રહેલા સળિયાના ભાગ આ આડછેદને સમાન મૂલ્યના બળથી પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશામાં ખેંચે છે.

જો આડછેદ સળિયાના છેડા પાસે ન હોય તો તેવા બધા આડછેદો પાસે આવાં ખેંચાણબળો સમગ્ર આડછેદ પર સમાન રીતે વહેંચાયેલાં હોય છે. આવાં વહેંચાયેલાં બળો આકૃતિ 4.5(*b*)માં દર્શાવ્યાં છે. અહીં સુગમતાખાતર આડછેદ પાસેના બંને વિભાગો જુદા-જુદા દર્શાવ્યા છે.

જ્યારે સળિયા પર બાહ્ય બળ લગાડવામાં આવે છે ત્યારે આંતર-અણુ અંતરોમાં ફેરફાર થાય છે. આથી અણુઓ વચ્ચે એવી રીતે બળો ઉદ્ભવે છે કે જેના કારણે તેઓ ફરીથી પોતાની સમતોલન સ્થિતિમાં આવવાનો પ્રયત્ન કરે છે. આ બળોને પુનઃસ્થાપક બળો કહે છે. આકૃતિ 4.5(*b*)માં પુનઃસ્થાપક બળો નાના તીર વડે આડછેદ પર દર્શાવ્યાં છે. પુનઃસ્થાપક બળો દરેક જોડકાનાં અણુઓ વચ્ચે ઉદ્ભવતાં હોવાથી તે સમગ્ર આડછેદ પર સમાન રીતે વહેંચાયેલ હોય છે. બાહ્ય બળની અસર હેઠળ પદાર્થમાં પેદા થતા વિરૂપણને કારણે ઉદ્ભવતું પુનઃસ્થાપક બળ જુદા-જુદા આડછેદ માટે સમાન જ હોય છે, પરંતુ આવા આડછેદનાં ક્ષેત્રફળ જુદા હોવાથી આડછેદનો ઉલ્લેખ અનિવાર્ય છે.

આપણી ચર્ચામાં આપણે અત્યાર સુધી એવાં બાહ્ય બળ ધ્યાનમાં લીધાં છે, જેના કારણે સળિયાની લંબાઈમાં વધારો જ થાય છે. પરિણામે ઉદ્ભવતા પ્રતિબળને તણાવ-પ્રતિબળ કહે છે.

જો પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લગાડતાં પદાર્થની લંબાઈમાં ઘટાડો થાય, તો પરિણામે ઉદ્ભવતા પ્રતિબળને દાબીય પ્રતિબળ કહે છે. (આકૃતિ 4.6)



દાબીય પ્રતિબળ

આકૃતિ 4.6

(ii) કદ-પ્રતિબળ (Volume Hydraulic Stress) : ધારો કે પદાર્થ પર લાગતું બળ પદાર્થની સમગ્ર સપાટી પર લાગે છે. સ્થાનીક રીતે આ બળો સપાટીને લંબ છે અને ક્ષેત્રફળ-ખંડના સમપ્રમાણમાં છે. પદાર્થ પર આવાં બળો લાગતાં પદાર્થના કદમાં ફેરફાર થાય છે અને પરિણામે કદ-પ્રતિબળ ઉદ્ભવે છે. જ્યારે પદાર્થને કોઈ તરલમાં ડુબાડવામાં આવે, ત્યારે આવી પરિસ્થિતિનું નિમાર્ણ થાય છે.

જો તરલમાં રહેલા પદાર્થ પર લાગતું દબાણ P હોય તો, ક્ષેત્રફળ A પર લંબ રૂપે લાગતું બળ PA હોય. સંતુલન-અવસ્થામાં એકમક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતું બળ કદ-પ્રતિબળ છે. આમ,

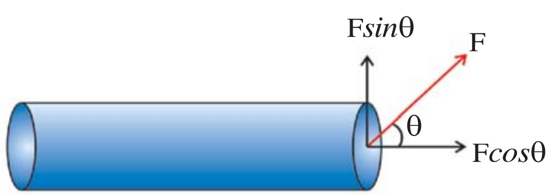
$$\text{કદ-પ્રતિબળ } \sigma_v = \frac{F}{A} = \frac{PA}{A} = P \qquad (4.3.5)$$

આમ, દાબીય પ્રતિબળ અને દબાણ સમાન છે. તેથી કહી શકાય કે અહીં દબાણ એક વિશિષ્ટ પ્રકારનું પ્રતિબળ છે. જેને કારણે પદાર્થનું માત્ર કદ બદલાય છે.

(iii) આકાર-પ્રતિબળ (Shearing Stress Tangential Stress) : આકૃતિ 4.4માં દર્શાવ્યા મુજબ જો બળ પદાર્થની સપાટીને સમાંતર લાગતું હોય, તો પદાર્થમાં આકાર વિકૃતિ ઉત્પન્ન થાય છે અને ઉત્પન્ન થતું અનુરૂપ પ્રતિબળ આકાર-પ્રતિબળ કહેવાય છે. આમ,

$$\text{આકાર-પ્રતિબળ} = \frac{\text{સ્પર્શીય બળ } (F_t)}{\text{ક્ષેત્રફળ } (A)} \qquad (4.3.6)$$

એવું પણ શક્ય છે કે પદાર્થ પર લાગતું બળ પદાર્થની સપાટીને લંબ કે સમાંતર ન હોય. આ કિસ્સામાં આકૃતિ 4.7માં દર્શાવ્યા મુજબ બળનો સપાટીને લંબદિશામાં અને સમાંતર ઘટકો વિચારી શકાય.

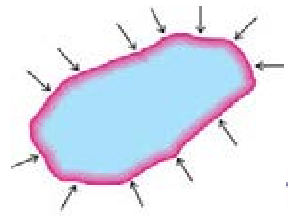


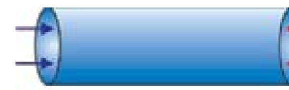
આકૃતિ 4.7

અહીં આકૃતિમાં સળિયા પર લાગતું બળ દર્શાવેલ છે. બળ ક્ષેત્રફળ સદિશ (ક્ષેત્રફળ જેટલું મૂલ્ય ધરાવતો ક્ષેત્રફળને લંબ બહારની તરફનો સદિશ) સાથે θ ખૂણો બનાવે છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ $F\cos\theta$ સપાટીને લંબ ઘટક છે અને $F\sin\theta$ સપાટીને સ્પર્શીય ઘટક છે, તેથી $F\cos\theta$ને કારણે પદાર્થમાં તણાવની અસર પેદા થશે, જ્યારે $F\sin\theta$ને કારણે પદાર્થના આકારમાં ફેરફાર થશે. આ કિસ્સામાં પદાર્થમાં તણાવ-પ્રતિબળ અને આકાર-પ્રતિબળ (અને આકાર-વિકૃતિ અને તણાવ-વિકૃતિ પણ) બન્ને પેદા થશે.

દબાણ અને પ્રતિબળ વચ્ચેનો તફાવત (Difference between pressure and stress) : દબાણ એટલે એકમક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતું બળ. આમ, દબાણ અને પ્રતિબળ બન્નેનાં પરિમાણ સમાન હોવા છતાં તેઓ એક જ ભૌતિક રાશિ નથી.

જ્યારે પદાર્થની સમગ્ર સપાટીને લંબરૂપે બળ લગાડવામાં આવે છે, ત્યારે એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતા બળને દબાણ કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 4.8)

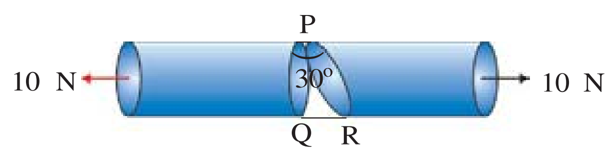




આકૃતિ 4.8 આકૃતિ 4.9

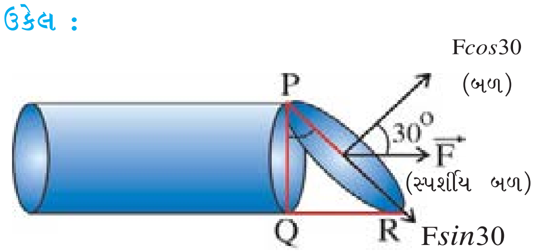
પ્રતિબળ પણ એકમક્ષેત્રફળ દીઠ બળ હોવા છતાં પદાર્થના જુદાં-જુદાં પૃષ્ઠો પર તે જુદું-જુદું હોઈ શકે. વળી અહીં બળ એ પૃષ્ઠને લંબ હોવું પણ જરૂરી નથી. એવું પણ શક્ય છે કે એક સપાટી પર પ્રતિબળ હોય બીજી સપાટી પર ન પણ હોય. (આકૃતિ 4.9).

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 4.9માં દર્શાવ્યા મુજબ 10 N બળ સળિયાના બે છેડા પર લગાડવામાં આવે છે, તો આડછેદ PR પર તણાવ-પ્રતિબળ અને સ્પર્શીય પ્રતિબળ શોધો. PQ આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 10 cm^2 છે.



આકૃતિ 4.10

ઉકેલ :



આકૃતિ 4.11

અહીં આડછેદ PQ અને PR વચ્ચેનો ખૂણો 30° છે. તેથી,

$$\frac{\text{PQ આડછેદનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{PR આડછેદનું ક્ષેત્રફળ}} = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

PR આડછેદનું ક્ષેત્રફળ

$$= \left(\frac{\text{આડછેદ PQનું ક્ષેત્રફળ}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= \frac{2 \times 10 \times 10^{-4}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times 10^{-3} m^2$$

વળી, બળ F અને PR છેદના ક્ષેત્રફળ સદિશ વચ્ચેનો ખૂણો પણ 30° છે. (કેવી રીતે ? વિચારો.)

તેથી, છેદ PR માટે તણાવબળ

$$F_l = F\cos 30^{o} = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\, N$$

તથા સ્પર્શીય બળ

$$F_t = F\sin 30^{o} = 10 \times \frac{1}{2} = 5N$$

∴ છેદ PR માટે

$$\text{તણાવ-પ્રતિબળ } (\sigma^l) = \frac{\text{તણાવ બળ}}{\text{PR છેદનું ક્ષેત્રફળ}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}} \times 10^{-3}}$$

$$= 7.5 \times 10^{3} \text{ N/m}^2$$

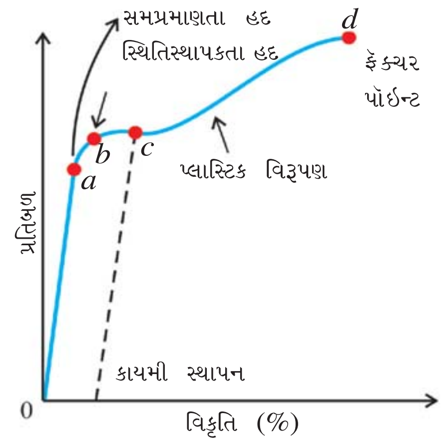
$$\text{સ્પર્શીય પ્રતિબળ } \sigma_t = \frac{\text{સ્પર્શીય બળ}}{\text{PR છેદનું ક્ષેત્રફળ}}$$

$$= \frac{5}{\frac{2}{\sqrt{3}} \times 10^{-3}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 10^3 = 4.33 N/m^2$$

4.4 પ્રતાન-પ્રતિબળ અને પ્રતાન-વિકૃતિ વચ્ચેનો સંબંધ (Relation Between Longitudinal Stress and Longitudinal Strain)

પ્રતાન-વિકૃતિ અને પ્રતાન-પ્રતિબળ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે તારને બાહ્ય બળની મદદથી ખેંચવામાં આવે છે. જુદા-જુદા પ્રતિબળ માટે વિકૃતિનું મૂલ્ય (અથવા તેનું પ્રતિશત મૂલ્ય) મેળવવામાં આવે છે. પ્રતિબળ અને વિકૃતિ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ પ્રતિબળ-વિકૃતિ(%) આલેખ દોરીને કરી કાય છે. આવો એક આલેખ આકૃતિ 4.12માં દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 4.12

આલેખના શરૂઆતના ભાગમાં (0 થી a સુધી) વિકૃતિ 1% થી ઓછી છે. પ્રતિબળ અને વિકૃતિ એકબીજાના સમપ્રમાણમાં છે. અહીં બિંદુ aને સપ્રમાણતાની હદ કહે છે.

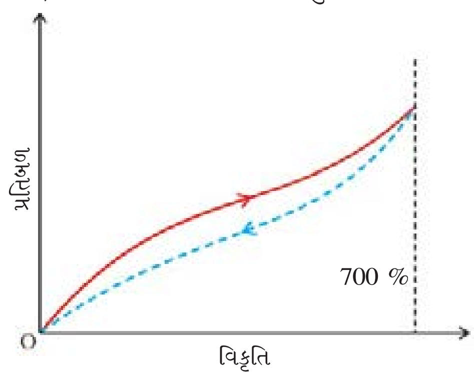
આલેખ પરના a થી b બિન્દુ સુધી પ્રતિબળ એ વિકૃતિના સમપ્રમાણમાં નથી. આમ છતાં 0થી b વચ્ચે ગમે તે બિન્દુ પાસે વિરૂપક બળ દૂર કરતાં પદાર્થ પોતાની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે. આ અર્થમાં પદાર્થ છેક બિન્દુ b સુધી સ્થિતિસ્થાપક વર્તણૂક ધરાવે છે. બિન્દુ b ને સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ (elastic limit) અથવા આધીન બિન્દુ (yield point) કહે છે.

બિન્દુ b અને c વચ્ચે વિકૃતિમાં ઝડપથી વધારો થાય છે. b અને c વચ્ચેના કોઈ પણ બિન્દુ પાસેથી વિરૂપક બળ હટાવી લેતાં પદાર્થ, આકૃતિમાં ત્રુટક રેખાથી દર્શાવેલ માર્ગે એવી સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે કે જેથી તેમાં કંઈક કાયમી ત્રુટી રહી જાય છે. આ સ્થિતિમાં પદાર્થ કાયમી સ્થાપન (permanent set) સ્થિતિમાં હોવાનું કહેવાય છે.

બિન્દુ c આગળથી વધારે વિરૂપક બળ લગાડતાં વિકૃતિમાં ઝડપથી વધારો થાય છે. આ સ્થિતિમાં પદાર્થમાં મહત્તમ આકાર વિકૃતિ ધરાવતા સમતલો એકબીજા પર સરકતાં હોય છે. આ ઘટનાને પ્લાસ્ટિક વિરૂપણ કહે છે.

d બિન્દુ પાસે પદાર્થ તૂટી જાય છે. બિન્દુ d ને ફ્રેકચર બિન્દુ કહે છે. આ બિન્દુને અનુરૂપ પ્રતિબળને બ્રેકિંગ પ્રતિબળ કહે છે. સ્થિતિસ્થાપક હદ b અને બિન્દુ d વચ્ચે જો ખૂબ જ મોટું પ્લાસ્ટિક વિરૂપણ થતું હોય, તો ધાતુને તન્ય (ductile) કહે છે. જો પદાર્થ સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ પછી તરત જ ભાંગી જતો હોય, તો તેવા પદાર્થને બટકણો (brittle) કહે છે.

જોકે કેટલાક પદાર્થો (જેવા કે રબર), અત્યાર સુધી કરેલા વર્ણન કરતાં જુદી-જુદી વર્તણૂક ધરાવે છે, આપણે જાણીએ છીએ કે રબરની લંબાઈમાં અનેક ગણો વધારો કરવાં છતાં તે મૂળ અવસ્થા પ્રાપ્ત કરે છે. આકૃતિ 4.13 એક પ્રકારના વલ્કેનાઇઝ્ડ રબર માટે પ્રતિબળ-વિકૃતિનો આલેખ દર્શાવ્યો છે. અહીં દર્શાવેલ 700% વિકૃતિ આશ્ચર્યજનક છે. જે પદાર્થમાં ખૂબ મોટા પ્રમાણમાં વિકૃતિ પેદા કરી શકાય છે તેવા પદાર્થને **ઈલાસ્ટોમર** (elastomers) કહે છે. આપણા શરીરમાં મહાધમની (હૃદયમાંથી શરીરના જુદા-જુદા ભાગમાં રુધિર લઈ જતી ધમની)ની પેશીઓ એ ઈલાસ્ટોમરનું ઉદાહરણ છે.



વલ્કેનાઈઝ્ડ રબર માટે હિસ્ટરિસીસ
આકૃતિ 4.13

આ આલેખની બે બાબતો નોંધપાત્ર છે : (i) આલેખના કોઈ પણ ભાગમાં પ્રતિબળ વિકૃતિના સમપ્રમાણમાં નથી. (ii) વિરૂપક બળ દૂર કરતાં પદાર્થ પોતાની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે પણ મૂળ માર્ગે નહીં. મૂળ સ્થિતિમાં પાછા ફરતી વખતે પદાર્થ વડે થતું કાર્ય, તેમાં વિરૂપણ ઉત્પન્ન કરતી વખતે વિરૂપક બળ વડે થયેલા કાર્યથી ઓછું હોય છે. આનો અર્થ એ થાય છે કે પદાર્થમાં અમુક ઊર્જા શોષાય છે. આ ઊર્જા ઉષ્મા-ઊર્જા સ્વરૂપે વિખેરણ પામે છે. આ ઘટનાને સ્થિતિસ્થાપક હિસ્ટેરિસીસ કહે છે. સ્થિતિસ્થાપક હિસ્ટેરિસીસનો ઉપયોગ શોક-એબ્સોબરમાં થાય છે. જો વલ્કેનાઈઝ્ડ રબરનું સ્તર (પેડ) કંપન પામતા તંત્ર અને આધાર વચ્ચે મૂકવામાં આવે, તો દરેક કંપન દરમિયાન રબરનું સ્તર સંકોચન પામે છે અને વિસ્તરે છે અને કંપન-ઊર્જાનો થોડો જ ભાગ આધાર સુધી પહોંચે છે, તેથી કંપનની અસર ઘટી જાય છે.

4.5 હુકનો નિયમ અને સ્થિતિસ્થાપકતા અંકો (Hooke's Law and Elastic Moduli)

ઈ.સ. 1678માં રૉબર્ટ હુકે પ્રાયોગિક રીતે દર્શાવ્યું કે ''નાના વિરૂપણ માટે પ્રતિબળ અને વિકૃતિ એકબીજાના સમપ્રમાણમાં હોય છે'' આ વિધાન હુકના નિયમ તરીકે ઓળખાય છે. આમ,

પ્રતિબળ α વિકૃતિ

$\therefore$ પ્રતિબ = અચળ $\times$ વિકૃતિ

$$\therefore \sigma = k\varepsilon \qquad (4.5.1)$$

સમીકરણ 4.5.1 માં k સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક તરીકે ઓળખાય છે. તેનો એકમ Nm^{-2} અથવા Pa છે.

હુકનો નિયમ આનુભવિક નિયમ છે અને મોટાં ભાગનાં દ્રવ્યો માટે (આકૃતિ 4.12માં દર્શાવ્યા મુજબ) લગભગ 1% વિકૃતિ માટે સાચો છે. રબર જેવા પદાર્થો માટે આવો રેખીય સંબંધ મળતો નથી.

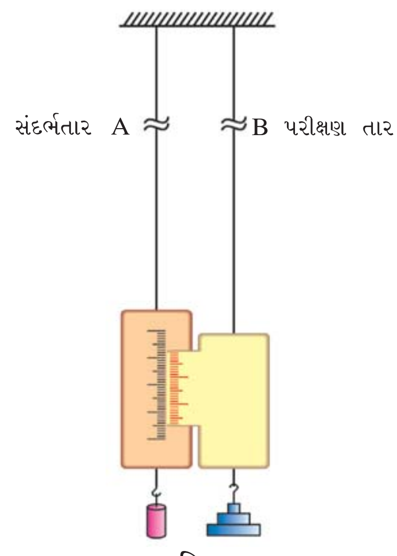
4.5.1 યંગ મૉડ્યુલસ (Young's Modulus) :

આપણે જોયું કે નાની વિકૃતિ માટે પ્રતિબળ અને વિકૃતિ એકબીજાના સમપ્રમાણમાં હોય છે. જો પ્રતિબળ અને વિકૃતિ તરીકે પ્રતાન-પ્રતિબળ અને પ્રતાન વિકૃતિ લેવામાં આવે, તો સમીકરણ 4.5.1 નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\sigma_l = Y\varepsilon_l \qquad (4.5.2)$$

અહીં સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક યંગ મૉડ્યુલસ (Y) તરીકે ઓળખાય છે.

યંગ મૉડ્યુલસના માપન માટેની પ્રાયોગિક ગોઠવણ આકૃતિ 4.14 માં દર્શાવી છે.



આકૃતિ 4.14

તાર A સંદર્ભતાર અને તાર B પરીક્ષણ તાર કહેવાય છે. તાર Aના છેડે લગાવેલ હુક સાથે નિયત દળ લટકાવવામાં આવે છે. જ્યારે પરીક્ષણ તાર (B)ના છેડે રહેલા હુક સાથે જુદાં-જુદાં દળ (m) લટકાવીને પરિણામે મળતા જુદા-જુદા તણાવબળ (mg)ને અનુરૂપ લંબાઈમાં થતો વધારો (Δl) તેની સાથે રહેલા વર્નિયર સ્કેલની મદદથી માપવામાં આવે છે.

$$\text{અહીં } \sigma_l = \frac{\text{તણાવબળ } (F_l)}{\text{ક્ષેત્રફળ } (A)} = \frac{mg}{\pi r^2} \qquad (4.5.3)$$

જ્યાં r પરીક્ષણ તારની ત્રિજ્યા છે.

અને પ્રતાન વિકૃતિ $\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$ (4.5.4)

જ્યાં l પરીક્ષણ તારની મૂળ લંબાઈ છે.

સમીકરણો (4.5.2) (4.5.3) અને (4.5.4) પરથી

$$\frac{mg}{\pi r^2} = Y\frac{\Delta l}{l}$$

$$\therefore Y = \frac{mgl}{\pi r^2 \Delta l} \quad (4.5.5)$$

યંગ મૉડ્યુલસ પદાર્થના દ્રવ્યનો ગુણધર્મ છે. મોટા ભાગના પદાર્થોમાં પ્રતાન-પ્રતિબળ અને દાબીય પ્રતિબળ માટે યંગ મૉડ્યુલસનાં મૂલ્યો સમાન મળે છે. જ્યારે હાડકા તથા કોંક્રીટ જેવા પદાર્થો માટે આમ હોતું નથી.

ઉદાહરણ 2 : 2 m લંબાઈના અને 5 mm વ્યાસવાળા તાંબાના તારના છેડે 5 kg વજન લટકાવ્યું છે, તો તારની લંબાઈમાં થતો વધારો શોધો. તારનો લઘુતમ વ્યાસ કેટલો રાખવો જોઈએ કે જેથી સ્થિતિસ્થાપક હદ વટાવી ન જવાય ? કૉપર માટે સ્થિતિસ્થાપક હદ = 1.5×10^9 dyne/cm^2, યંગનો મૉડ્યુલસ (Y) = 1.1×10^{12} dyne/cm^2

ઉકેલ :

$Y = 1.1 \times 10^{12}$ dyne/cm

$L = 2$ m = 200 cm

$d = 5$ mm = 0.5 cm

$\therefore r = 0.25$ cm

$F = mg = 5 \times 10^3 \times 980$ dyne

l = લંબાઈમાં થતો વધારો

$$Y = \frac{FL}{\pi r^2 l}$$

$$\therefore l = \frac{FL}{\pi r^2 Y}$$

$$= \frac{5.0 \times 10^3 \times 980 \times 200}{3.14 \times (0.25)^2 \times 1.1 \times 10^{12}}$$

$$= 4.99 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

તાંબા માટે સ્થિતિસ્થાપક હદ = 1.5×10^9 dyne/cm^2 આપેલ છે.

જો માંગેલ લઘુતમ વ્યાસ d' હોય તો,

તારમાં ઉત્પન્ન થતું મહત્તમ પ્રતિબળ

$$= \frac{F}{\pi\left(\frac{d'}{2}\right)^2} = \frac{4F}{\pi d'^2} = 1.5 \times 10^9$$

$$\therefore d'^2 = \frac{4 \times 5 \times 10^3 \times 980}{3.14 \times 1.5 \times 10^9}$$

$$= 41.6 \times 10^{-4}$$

$$\therefore d' = 6.45 \times 10^{-2} \text{ cm}$$

4.5.2 કદ સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક (Bulk Modulus)

સમીકરણ 4.5.1માંના કદ પ્રતિબળ અને કદ વિકૃતિના ગુણોત્તરને કદ સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક કહે છે. તેથી,

કદ સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક (બલ્ક મૉડ્યુલસ) (B)

$$= \frac{\text{કદ-પ્રતિબળ}}{\text{કદવિકૃતિ}}$$

$$\therefore \text{બલ્ક મૉડ્યુલસ } B = -\frac{P}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)} \quad (4.5.6)$$

અહીં સમીકરણમાં આવતી ઋણ નિશાની કદવિકૃતિ ઋણ અને બલ્ક મૉડ્યુલસ ધન હોવાને કારણે આવે છે. બલ્ક મૉડ્યુલસના વ્યસ્તને દબનીયતા compressibility કહે છે. જેનો સંકેત (K) છે.

4.5.3 આકાર સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક (Modulus of Rigidity (shear modulus))

સ્પર્શીય પ્રતિબળ અને આકાર-વિકૃતિના ગુણોત્તરને આકાર સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક (modulus of rigidity) (η) કહે છે.

આમ, સમીકરણ (4.3.3) અને (4.3.6) પરથી,

$$\text{મૉડ્યુલસ ઑફ રિજીડીટી}(\eta) = \frac{\text{સ્પર્શીય-પ્રતિબળ}}{\text{આકારવિકૃતિ}}$$

$$= \frac{F_t/A}{\theta}$$

વળી, $\theta = \frac{x}{h}$

$$\therefore \eta = \frac{F_t/A}{x/h}$$

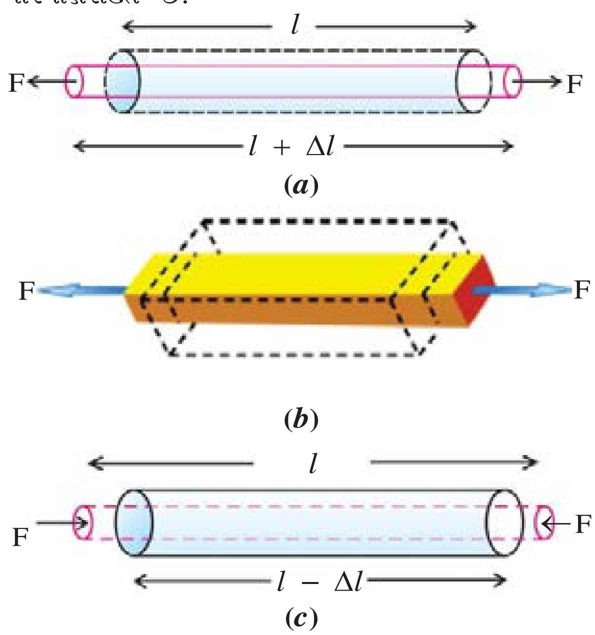
$$\therefore \eta = \frac{F_t h}{Ax} \quad (4.5.7)$$

4.6. પોઈસનનો ગુણોત્તર (Poisson's Ratio)

જ્યારે પદાર્થ પર તણાવબળ (અક્ષીય બળ) લગાડવામાં આવે, ત્યારે તેની લંબાઈમાં વધારો થાય છે. પરંતુ લંબાઈને લંબ એવાં પરિમાણો (પાર્શ્વિક પરિમાણો અથવા

lateral dimension)નાં મૂલ્યોમાં ઘટાડો થાય છે. તે જ રીતે જ્યારે પદાર્થ પર દાબીય બળ લગાડવામાં આવે, ત્યારે તેની લંબાઈમાં ઘટાડો થાય પણ પાર્શ્વિક પરિમાણોનાં મૂલ્યોમાં વધારો થાય છે. પાર્શ્વિક પરિમાણમાં થતો ફેરફાર અને પાર્શ્વિક પરિમાણના મૂળ મૂલ્યના ગુણોત્તરને પાર્શ્વિક વિકૃતિ-lateral strain કહે છે.

પાર્શ્વિક વિકૃતિ અને પ્રતાન (કેદાબીય) વિકૃતિનો ગુણોત્તર પોઈસનનો ગુણોત્તર કહેવાય છે. તેનો સંકેત μ છે. તે બે વિકૃતિનો ગુણોત્તર હોવાથી પોઈસનનો ગુણોત્તર પરિમાણરહિત છે.



લંબાઈમાં ફેરફારને કારણે પાર્શ્વિક પરિમાણોમાં ફેરફાર

આકૃતિ 4.15

આકૃતિ 4.15 માં દર્શાવ્યા મુજબ નળાકાર સળિયાના કિસ્સામાં પ્રતાન બળની અસર હેઠળ,

પ્રતાન-વિકૃતિ $= \frac{\Delta l}{l}$

અને પાર્શ્વિક વિકૃતિ $= \frac{\Delta d}{d}$,

જ્યાં d સળિયાનો વ્યાસ છે. વ્યાખ્યા અનુસાર

$$\mu = \frac{\text{પાર્શ્વિક વિકૃતિ} \left(\frac{\Delta d}{d}\right)}{\text{પ્રતાન-વિકૃતિ} \left(\frac{\Delta l}{l}\right)}$$

$$\therefore \frac{\Delta d}{d} = -\mu\frac{\Delta l}{l} \text{ અથવા } \frac{\Delta r}{r} = -\mu\frac{\Delta l}{l} \quad (4.6.1)$$

અહીં પાર્શ્વિક પરિમાણ અને અક્ષીય પરિમાણમાં થતા ફેરફાર વિરુદ્ધ પ્રકારના હોવાથી સમીકરણ (4.6.1)માં ઋણ નિશાની આવે છે. જો સળિયાનો આડછેદ લંબચોરસ હોય અને તે પ્રતાનબળની અસર હેઠળ હોય, તો તેની લંબાઈમાં વધારો થશે અને પહોળાઈ અને જાડાઈમાં ઘટાડો થશે. જો પહોળાઈ bમાં થતો ફેરફાર Δb અને જાડાઈ hમાં થતો ફેરફાર Δh હોય, તો અનુસંગત પાર્શ્વિક વિકૃતિનાં મૂલ્યો $\frac{\Delta b}{b}$ અને $\frac{\Delta h}{h}$ થાય.

તેથી, $\frac{\Delta b}{b} = -\mu\frac{\Delta l}{l}$

$$\text{અને } \frac{\Delta h}{h} = -\mu\frac{\Delta l}{l} \quad (4.6.2)$$

પ્રતાનબળોને કારણે કદમાં ફેરફાર :

પદાર્થ પર પ્રતાનબળો લાગતાં તેની લંબાઈમાં વધારો થાય છે અને પાર્શ્વિક પરિમાણોમાં ઘટાડો થાય છે, તેથી તેના કદમાં ફેરફાર થાય છે. (સામાન્ય રીતે કદમાં વધારો થાય છે.)

નળાકાર સળિયાનો કિસ્સો ધ્યાનમાં લેતાં તેની લંબાઈ l અને ત્રિજ્યા r હોય તો, કદ $V = \pi r^2 l$ હોવાથી

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta l}{l} \text{ (નાના ફેરફારો માટે)}$$

સમીકરણ 4.6.1 પરથી

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = -2\mu\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta l}{l} \quad (4.6.3)$$

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\mu)$$

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_l \, (1 - 2\mu) \quad (4.6.4)$$

સમીકરણ 4.6.4 સૂચવે છે કે $\Delta V > 0$ હોવાથી μનું મૂલ્ય 0.5થી વધી શકે નહીં.

અહીં આપણે નળાકાર સળિયાનો કિસ્સો ધ્યાનમાં લીધો છે. જોકે સમીકરણ કોઈ પણ આડછેદ ધરાવતા સળીયા માટે સાચું છે.

ઉદાહરણ 3 : એક સળિયા પર પ્રતાન-બળ લગાડવામાં આવે છે, તો નાના ફેરફારો માટે કદમાં થતા ફેરફારનો લંબાઈ સાપેક્ષ દર $\frac{\Delta V}{\Delta l} = A(1 - 2\mu)$ છે, તેમ દર્શાવો. અહીં A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ છે.

ઉકેલ : સમીકરણ 4.6.3 પરથી,

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_l \, (1 - 2\mu)$$

કદ V = આડછેદનું ક્ષેત્રફળ (A) × લંબાઈ (l) હોવાથી

$$\therefore \frac{\Delta V}{Al} = \frac{\Delta l}{l}(1 - 2\mu)$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta V}{\Delta l} = A\ (1 - 2\mu)$$

અહીં ટેબલ 4.1માં કેલાક દ્રવ્યો માટે સ્થિતિસ્થાપકતા-અંકનાં મૂલ્યો આપેલ છે.

ટેબલ 4.1

સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક (માત્ર જાણકારી માટે)

દ્રવ્ય	યંગ મૉડ્યુલ્સ $\times 10^{11}$Pa	દૃઢતા મૉડ્યુલ્સ $\times 10^{11}$Pa	બલ્ક મૉડ્યુલ્સ $\times 10^{11}$Pa	પોઇસનનો ગુણોત્તર
ઍલ્યુમિનિયમ	0.7	0.3	0.7	0.16
પિત્તળ	0.91	0.36	0.61	0.26
તાંબું	1.1	0.42	1.4	0.32
લોખંડ	1.9	0.70	1.0	0.27
સ્ટીલ	2.0	0.84	1.6	0.19
ટંગસ્ટન	3.6	1.5	2.0	0.20

4.7 સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા

પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લાગે ત્યારે પદાર્થમાં વિરૂપણ ઉત્પન્ન થાય અને પુનઃસ્થાપક બળ પણ પેદા થાય. આમ, વિરૂપણ પુનઃસ્થાપક બળની વિરુદ્ધ થાય છે. તેથી વિરૂપણ ઉત્પન્ન કરવા માટે પુનઃસ્થાપક બળની વિરુદ્ધ કાર્ય કરવું પડે. આ કાર્ય પદાર્થમાં સ્થિતિ-ઊર્જાના સ્વરૂપમાં સંગૃહીત થાય છે. યાદ રાખો, કે સ્થિતિ-ઊર્જા પદાર્થને પ્રાપ્ત થતી નવી સંરચનાને કારણે છે.

આપણે પદાર્થ પર પ્રતાનબળ કાર્ય કરે ત્યારે પદાર્થને મળતી સ્થિતિ-ઊર્જા માટે સમીકરણ મેળવીશું.

L જેટલી લંબાઈનો અને A જેટલા આડછેદવાળો એક સળિયો ધ્યાનમાં લો. ધારો કે પ્રતાનબળને કારણે તેની લંબાઈમાં x જેટલો વધારો થાય છે. જો દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ Y હોય તો,

$$Y = \frac{F/A}{x/L}$$

તેથી પુનઃસ્થાપક બળ

$$F = \frac{YA}{L}x$$

હવે પુનઃસ્થાપક બળ વિરુદ્ધ લંબાઈમાં ΔL જેટલો વધારો કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય

$$w = \int_0^{\Delta L}\left(\frac{YA}{L}\right)x\,dx$$

$$= \frac{AY}{L}\int_0^{\Delta L} x\,dx$$

$$= \frac{AY}{L}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\Delta L}$$

આ કાર્યનું મૂલ્ય સળિયામાં સંગ્રહીત થતી સ્થિતિ-સ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જાનું મૂલ્ય છે.

$$\therefore\ U = \frac{AY}{2L}(\Delta L)^2 \qquad (4.7.1)$$

થોડું વધું વિચારતાં,
સમીકરણ 4.7.1 નીચે મુજબ પણ લખી શકાય.

$$\frac{U}{\text{પદાર્થનું કદ}} = \frac{U}{LA}$$

$$= \frac{1}{2}Y\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 = \frac{1}{2}Y\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\text{પ્રતિબળ}}{\text{વિકૃતિ}}\right) \times (\text{વિકૃતિ})^2$$

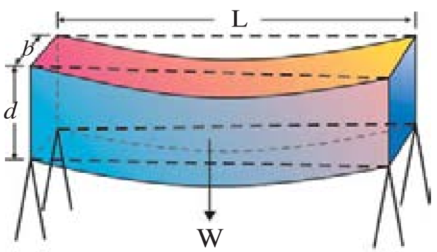
∴ એકમકદમાં સંગ્રહિત સ્થિતિસ્થાપકીય-ઊર્જા

$$= \frac{1}{2}\ \text{પ્રતિબળ} \times \text{વિકૃતિ} \qquad (4.7.2)$$

એકમકદમાં સંગૃહીત ઊર્જાને ઊર્જાઘનતા પણ કહે છે.

4.8 સ્થિતિસ્થાપક દ્રવ્યોની વ્યાવહારિક ઉપયોગિતા (Applications of Elastic Behaviour of Materials)

(*i*) દ્રવ્ય જ્યારે વ્યાવહારિક હેતુઓ માટે વપરાશમાં હોય ત્યારે તે કોઈક ને કોઈક રીતે પ્રતિબળની અસર હેઠળ હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, ક્રેઈનમાં ધાતુના 'દોરડા' (કૅબલ) દ્વારા જ્યારે કોઈ વસ્તુ ઊંચકાતી હોય છે. ત્યારે આ 'કૅબલ'માં તણાવ-પ્રતિબળ હોય છે. આ સ્થિતિમાં આપેલ કૅબલ વડે વધારેમાં વધારે એટલો જ ભાર ઊંચકી શકાય અથવા આપેલા ભારને વધારેમાં વધારે એટલો પ્રવેગિત ગતિ કરાવી શકાય કે જેથી સ્થિતિસ્થાપક હદને વટાવી ન જાય. દા.ત., સ્ટીલ માટે સ્થિતિસ્થાપક હદ પર પ્રતિબળનું મૂલ્ય $30 \times 10^7\ N\ m^{-2}$ છે. જો સ્ટીલના કૅબલના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A હોય અને તેના વડે ઊંચકવાનો બોજ M હોય, તો



આકૃતિ 4.16

પ્રતાન-પ્રતિબળ $\sigma_n = \frac{F_n}{A} = \frac{Mg}{A}$

$$\therefore \ A = \frac{Mg}{\sigma_n} \qquad (4.8.1)$$

અહીં કેબલનો આડછેદ એટલો લેવો જોઈએ કે તેનું મૂલ્ય $\frac{Mg}{\sigma_n}$ કરતાં સારું એવું વધારે હોય. જો $M = 10^4$ kg હોય, તો $g = 3.1\pi$ m s^{-2} લેતાં,

$$A = \pi r^2 = \frac{(10^4)(3.1\pi)}{(30 \times 10^7)}$$

$\therefore$ કેબલની ત્રિજ્યા $r \approx 10^{-2}$ m = 1 cm

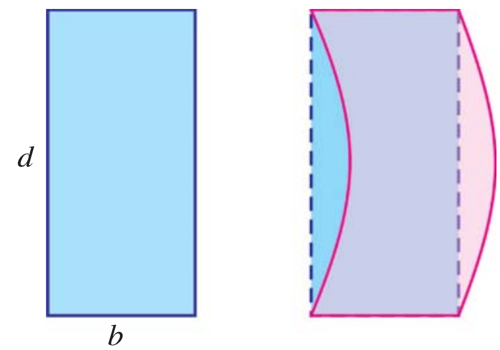
આથી, આવા કેબલની ત્રિજ્યા 1 cm કરતાં સારી એવી મોટી રાખવી જોઈએ. આટલી ત્રિજ્યાનું કેબલ તો ઘણું જ દૃઢ બની જાય, માટે ઘણા બધા પાતળા તારને એકબીજાની સાથે ગૂંથીને આવું કેબલ બનાવવામાં આવતું હોય છે.

હવે, કોઈ પુલ(bridge)નું ઉદાહરણ ધ્યાનમાં લો. પુલની ડિઝાઈન એવી રીતે કરવી જોઈએ કે જેથી તે ટ્રાફિકના ભારને લીધે, પોતાના જ ભારને લીધે અને પવનના સપાટાઓને લીધે એટલો બધો ન વળી જાય કે જેથી તે તૂટી જાય. આ જ રીતે સિમેન્ટ-કોંક્રીટનાં મકાનો બાંધતી વખતે બીમ-કૉલમનો ઉપયોગ જાણીતો છે. આમાં પણ ભારને લીધે બીમનું થતું વંકન ધ્યાનમાં લેવું જ પડે છે.

આ હકીકત સમજવા માટે આકૃતિ 4.16માં દર્શાવેલું લંબચોરસ આડછેદવાળા સળિયાનું ઉદાહરણ ઉપયોગી થઈ પડશે. અહીં સળિયાની લંબાઈ L, પહોળાઈ b, અને જાડાઈ (ઊંડાઈ) d છે. તેને બે છેડેથી ટેકવીને તેના મધ્યબિંદુ પર W જેટલું વજન લટકાવતાં, ધારો કે તેનું મધ્યબિંદુ δ જેટલું નીચે ઊતરે છે તેને સળિયનું વંકન કહે છે. તેના વડે સળિયો કેટલો વાંકો વળ્યો તે જાણી શકાય છે. હવે,

$$\delta = \frac{WL^3}{4bd^3Y} \qquad (4.8.2)$$

નોંધ : આ સૂત્ર તમારે સાબિતી વિના સ્વીકારવાનું છે.



આકૃતિ 4.17

આ સમીકરણ દર્શાવે છે સળિયાનું વંકન ઘટાડવા માટે યંગના મૉડ્યુલસનું મોટું મૂલ્ય ધરાવતા દ્રવ્યનો સળિયો વાપરવો જોઈએ. ઉપરાંત આપેલા દ્રવ્યના સળિયા માટે છેદમાં d^{-3} આવતો હોવાથી સળિયાની જાડાઈ d વધારે રાખીને δ ને ઘણો જ નાનો બનાવી શકાય છે. પણ, અહીં એક તકલીફ છે. સળિયાની જાડાઈ d વધારે રાખવાથી આકૃતિ 4.17માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સળિયામાં વિરૂપણ ઉત્પન્ન થાય છે. આને બકલિંગ કહે છે. આવું બકલિંગ ન થાય તે માટે સળિયાનો આડછેદ I આકારનો રાખવામાં આવે છે. જુઓ આકૃતિ 4.18. આમ, કરવાથી ભાર વહન કરતી સપાટીનું ક્ષેત્રફળ વધી જાય છે અને સાથોસાથ જરૂરી ઊંડાઈ પણ મળે છે.

આકૃતિ 4.18

(ii) અંતમાં આપણે કુદરતનું એક રસપ્રદ ઉદાહરણ જોઈએ.

h જેટલી ઊંચાઈ અને ρ જેટલી અચળ ઘનતાવાળો પર્વત વિચારો. તેના તળિયે એકમક્ષેત્રફળ દીઠ લાગતું બળ $h\rho g$ થાય. અને તે અધોદિશામાં લાગે. પર્વતની બાજુઓ મુક્ત હોવાથી તેમાં આકાર પ્રતિબળ ઉત્પન્ન થાય છે અને તેનું મૂલ્ય લગભગ $h\rho g$ જેટલું થાય. જો પર્વતના ખડકોની સ્થિતિસ્થાપકતા હદ 3×10^8 N m^{-2} અને ઘનતા $\rho = 3 \times 10^3$ kg m^{-3} લેવામાં આવે, તો

$$h_{max}\rho g = 3 \times 10^8 \ N \ m^{-2}$$

$$\therefore\ h_{max} = \frac{3 \times 10^8}{3 \times 10^3 \times 9.8} \simeq 10^4 \text{ m}$$

$$= 10 \text{ km}$$

આમ, ખડકોની સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ (મર્યાદા)ને કારણે પર્વતોની મહત્તમ ઊંચાઈ પર મર્યાદા લદાય છે. માઉન્ટ એવરેસ્ટની ઊંચાઈ 8848 m એટલે કે 8.848 km છે.

ઉદાહરણ 4 : F_1 જેટલા તણાવબળની અસર હેઠળ એક તારની લંબાઈ l_1 અને F_2 બળની અસર હેઠળ તેની લંબાઈ l_2 છે, તો સાબિત કરો કે તેની મૂળ લંબાઈ $l = \frac{F_2 l_1 - F_1 l_2}{F_2 - F_1}$ છે.

ઉકેલ :

$\Delta l = \frac{Fl}{AY}$ હોવાથી,

$$l_1 = l + \frac{F_1 l}{AY} \quad (1)$$

અને $$l_2 = l + \frac{F_2 l}{AY} \quad (2)$$

સમીકરણ (1) ને F_2 અને સમીકરણ (2) ને F_1 વડે ગુણીને સમીકરણ (1)માંથી (2) બાદ કરતાં,

$$F_2 l_1 - F_1 l_2 = F_2 l + \frac{F_1 F_2 l}{AY} - F_1 l - \frac{F_1 F_2 l}{AY}$$

$$\therefore\ F_2 l_1 - F_1 l_2 = (F_2 - F_1) l$$

$$\therefore\ l = \frac{F_2 l_1 - F_1 l_2}{F_2 - F_1}$$

ઉદાહરણ 5 : દરિયાની અંદર અમુક ઊંડાઈએ દબાણ 80 atm છે. જો દરિયાની સપાટી પર પાણીની ઘનતા 1.03×10^3 kg/m^3 હોય અને પાણીની દબનીયતા 45.8×10^{-11} Pa^{-1}, હોય, તો ઉપર્યુક્ત ઊંડાઈએ પાણીની ઘનતા શોધો.

1 atm = 1.013×10^5 Pa.

ઉકેલ : ધારો કે કથિત ઊંડાઈએ પાણીની ઘનતા ρ' અને સપાટી પર પાણીની ઘનતા ρ છે. પાણીના આપેલા દ્રવ્યમાન M માટે ધારો કે સપાટી પર અને ઊંડાઈએ કદ અનુક્રમે V અને V' છે.

$$\therefore\ V = \frac{M}{\rho} \text{ અને } V' = \frac{M}{\rho'}$$

$\therefore$ કદમાં થતો ઘટાડો $= \Delta V$

$$= V - V'$$

$$= M\left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right]$$

$$\therefore \text{ કદ-વિકૃતિ } = \frac{\Delta V}{V} = M\left[\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right] \times \frac{\rho}{M}$$

$$= 1 - \frac{\rho}{\rho'}$$

પણ, દબનીયતા $K = \frac{\Delta V}{PV} = \frac{1}{P}\left[1 - \frac{\rho}{\rho'}\right]$

$$\therefore 45.8 \times 10^{-11} = \frac{1}{80 \times 1.013 \times 10^5}\left[1 - \frac{1.03 \times 10^3}{\rho'}\right]$$

$$\therefore\ \rho' = 1.034 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

ઉદાહરણ 6 : 0.1 m ત્રિજ્યાવાળો અને 8 π kg દળવાળો સ્ટીલનો એક ગોળો 5 m લાંબા અને 10^{-3} m વ્યાસવાળા શિરોલંબ તારના છેડે લટકાવ્યો છે. આ તારને 5.22 m ઊંચાઈવાળી છત પરથી લટકાવેલ છે. જ્યારે આ ગોળાને સાદા લોલકની જેમ દોલનો કરાવવામાં આવે છે, ત્યારે તે રૂમના તળિયાને સ્પર્શે છે, તો દોલન દરમિયાન સૌથી નીચેના સ્થાને ગોળાનો વેગ શોધો. સ્ટીલનો યંગ મૉડ્યુલસ = 1.994×10^{11} Nm^{-2} છે.

ઉકેલ :

ગોળાની ત્રિજ્યા $r = 0.1$ m

પ્રારંભિક લંબાઈ L = 5 m

તારની લંબાઈમાં થતો વધારો

$$\Delta L = 5.22 - (L + 2r)$$
$$= 5.22 - (5 + 2 \times 0.1)$$
$$= 0.02 \text{ m}$$

તારની ત્રિજ્યા $r_o = 5 \times 10^{-4}$ m

જો દોલન દરમિયાન નીચેના છેડે તારમાં ઉત્પન્ન થતો તણાવ T હોય તો,

$$Y = \frac{T/A}{\Delta L/L}$$

$$\therefore\ T = \frac{YA\Delta L}{L} = \frac{Y(\pi r_0^2)\Delta L}{L}$$

$$= \frac{1.994 \times 10^{11} \times \pi \times (5 \times 10^{-4})^2 \times 0.02}{5}$$

$$= 199.4\pi \text{ N}$$

પણ, ચોખ્ખું બળ $T - Mg = \frac{Mv^2}{R}$,

જ્યાં, R = ગોળાના ગતિપથની ત્રિજ્યા = 5.22 − 0.1 = 5.12 m

$\therefore 199.4\pi - 8\pi \times 9.8 = \frac{8\pi \times v^2}{5.12}$

$\therefore 199.4 - 78.4 = \frac{8v^2}{5.12}$

$\therefore 121 = \frac{8v^2}{5.12}$

$\therefore v = 8.8 \ ms^{-1}$

ઉદાહરણ 7 : 15 kg દળનો એક પદાર્થ 1 m લંબાઈ ધરાવતા સ્ટીલના તારના છેડે બાંધ્યો છે, અને તેને શિરોલંબ સમતલમાં 1 rad/sના કોણીય વેગથી ભ્રમણ આપવામાં આવે છે. જો તારના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 0.06 cm^2 હોય, તો પદાર્થના નિમ્નતમ સ્થાન માટે તારની લંબાઈમાં થતો વધારો શોધો.

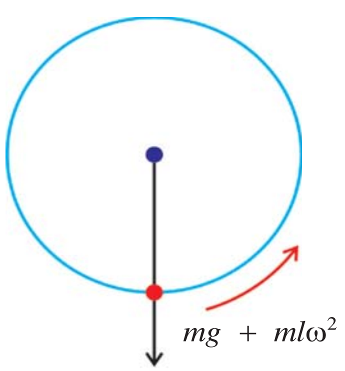
$Y_{steel} = 2 \times 10^{11} \ N \ m^{-2}$

ઉકેલ :

$m = 15$ kg, $l = 1$m, $\omega = 1$ rad/s A = 0.06 $cm^2 = 6 \times 10^{-6} m^2$

$Y_{steel} = 2 \times 10^{11} \ N \ m^{-2}$

પદાર્થના નિમ્નતમ સ્થાન માટે પદાર્થ પર લાગતું કુલ બળ ગુરુત્વાકર્ષણ બળ અને કેન્દ્રત્યાગી બળનો સરવાળો થાય.



આકૃતિ 4.19

$F = mg + mv^2/r$માં $v = l\omega$ અને $r = l$ મૂકતાં,

$\therefore F = mg + ml\omega^2$

$= 15(9.8 + 1 \times (1)^2)$

$= 15 \ (10.8) = 162$ N

$\therefore$ હવે પ્રતિબળ $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{162}{6 \times 10^{-6}}$

$= 27 \times 10^6 \ N \ m^{-2}$

વળી $Y = \frac{\sigma}{\varepsilon_l}$

$\therefore \frac{\Delta l}{l} Y = \sigma$

$\therefore \Delta l = \frac{\sigma l}{Y}$

$= \frac{27 \times 10^6 \times 1}{2 \times 10^{11}} = 13.5 \times 10^{-5}$ m

$= 0.135 \times 10^{-3}$ m

$= 0.135$ mm

ઉદાહરણ 8 : એક તારની લંબાઈ 5 m અને તેના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ 2.5 mm^2 છે. જો તેની લંબાઈમાં 1 mmનો વધારો કરવો હોય તો કરવું પડતું કાર્ય શોધો. દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ = $2 \times 10^{11} \ N \ m^{-2}$.

ઉકેલ : $l = 5$m, $\Delta l = 1$mm $= 10^{-3}$m

A = 2.5 mm^2 = $2.5 \times 10^{-6} \ m^2$, $Y = 2 \times 10^{11} \ N \ m^{-2}$

અહીં થતું કાર્ય,

W = $\frac{1}{2}$પ્રતિબળ × વિકૃતિ × કદ

$= \frac{1}{2}(Y \times \varepsilon_l) \times \varepsilon_l \times V$

$= \frac{1}{2} Y \times \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 \times V$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 10^{11} \times \left(\frac{10^{-3}}{5}\right)^2 \times 2.5 \times 10^{-6} \times 5$ $(\because V = Al)$

$= 5 \times 10^{-2}$ J.

સારાંશ

1. ઘન પદાર્થોનું વર્ગીકરણ નીચે મુજબ ત્રણ સમૂહમાં કરી શકાય : (i) સ્ફટિકમય પદાર્થો (ii) અસ્ફટિકમય પદાર્થો અને (iii) અર્ધ સ્ફટિકમય પદાર્થો.
2. સ્ફટિકમય પદાર્થોમાં અણુ આયનો કે પરમાણુઓની અવકાશમાં હારબદ્ધ બિંદુઓ પર ગોઠવાયેલાં છે. અવકાશમાં બિંદુઓની આવી હારબદ્ધ ગોઠવણીને લૅટિસ કહે છે.
3. સ્ફટિકમય પદાર્થ એક કરતાં વધુ એકસમાન એકમોનો બનેલો હોય છે.
4. સ્ફટિકમય પદાર્થો તેમાં રહેલા લૉંગરેન્જ ઑર્ડરને કારણે નિયત તાપમાને પીગળે છે.
5. અસ્ફટિકમય પદાર્થોમાં અણુઓની ગોઠવણી હારબદ્ધ હોતી નથી. આવા પદાર્થોના નિર્માણ સમયે આવી ગોઠવણી માટે જરૂરી સમયના અભાવે આમ બને છે.
6. અર્ધસ્ફટિકમય પદાર્થોમાં અમુક ભાગમાં ઘટકકણો નિયમિત હારબદ્ધ ગોઠવણી અને અમુક ભાગમાં અનિયમિત ગોઠવણી ધરાવે છે.
7. પદાર્થ પર બાહ્યબળ લાગતાં તેમાં વિરૂપણ થાય છે. પદાર્થના આવા વિરૂપણનો પ્રતિકાર કરવાના ગુણને સ્થિતિસ્થાપકતા કહે છે.
8. જે પદાર્થ બાહ્ય વિરૂપણ બળ દૂર કરતાં પોતાની મૂળ સ્થિતિ સંપૂર્ણપણે પરત મેળવી શકે તેવા પદાર્થને સંપૂર્ણ સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થ કહે છે.
9. જે પદાર્થ બાહ્ય વિરૂપણ બળ દૂર થતાં પોતાની મૂળ સ્થિતિ અંશતઃ પણ પ્રાપ્ત ન કરી શકે તેવા પદાર્થને અસ્થિતિસ્થાપક પદાર્થ કહે છે.
10. પદાર્થ પર બાહ્યબળ લગાડતાં તેના પરિમાણમાં ફેરફાર થાય છે. પરિમાણમાં થતા ફેરફાર અને મૂળ પરિમાણનાં મૂલ્યોના ગુણોત્તરને વિકૃતિ કહે છે. વિકૃતિ ત્રણ પ્રકારની હોય છે. વિકૃતિ પરિમાણરહિત છે.
11. પ્રતાન અથવા દાબીય વિકૃતિ (ε_l) પદાર્થની લંબાઈમાં થતો ફેરફાર અને મૂળ લંબાઈનો ગુણોત્તર છે.
12. પદાર્થના કદમાં થતા ફેરફાર અને મૂળ કદના ગુણોત્તરને કદ-વિકૃતિ કહે છે.
13. પદાર્થની સપાટી પર સ્પર્શીય બળ લાગતાં તેમાં આવતી વિકૃતિને આકાર-વિકૃતિ કહે છે.
14. પદાર્થ પર બાહ્ય વિરૂપક બળ લાગતાં તેમાં ઉત્પન્ન થતાં એકમક્ષેત્રફળ દીઠ પુનઃસ્થાપક બળને પ્રતિબળ કહે છે. તેનો એકમ Nm^{-2} છે.
15. લંબાઈ, આકાર અને કદની વિકૃતિને અનુરૂપ ઉદ્‌ભવતાં પ્રતિબળને અનુક્રમે પ્રતાન-પ્રતિબળ, આકાર-પ્રતિબળ અને કદ પ્રતિબળ કહે છે.
16. પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લાગતાં તેમાં ઉત્પન્ન થતાં પુનઃસ્થાપક બળ માટે આંતરઅણુ બળો જવાબદાર છે.
17. પદાર્થની સપાટી પર લાગતું બળ જો લંબરૂપે ન લાગતું હોય તો બળનો સપાટીને લંબ ઘટક પ્રતાન-વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરે છે. જ્યારે સપાટીને સમાંતર ઘટક આકાર-વિકૃતિ ઉત્પન્ન કરે છે.
18. પ્રતિબળ અને દબાણ બંને એકમ ક્ષેત્રફળ પર લંબરૂપે લાગતું બળ હોવા છતાં બંને ભિન્ન ભૌતિકરાશી છે.
19. પ્રતાન વિકૃતિ જો 1 %થી ઓછી હોય, તો પ્રતિબળ વિકૃતિના સમપ્રમાણમાં હોય છે. જે પ્રતિબળના જે મહત્તમ મૂલ્ય સુધી પદાર્થ બાહ્ય બળ દૂર થયા બાદ પોતાની મૂળ સ્થિતિ મૂળ માર્ગે પ્રાપ્ત કરે તેના મૂલ્યને સપ્રમાણતાની હદ કહે છે. જે પ્રતિબળના મૂલ્ય માટે પદાર્થ પોતાની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરી શકે તે મૂલ્યને સ્થિતિસ્થાપકતાની હદ કહે છે.
20. જો પદાર્થમાં પ્લાસ્ટિક વિરૂપણ મોટા પ્રમાણમાં પેદા કરી શકાય તો પદાર્થ તન્ય પદાર્થ કહેવાય. જ્યારે સ્થિતિસ્થાપકતા હદથી પ્રતિબળ વધતાં જો પદાર્થ તૂટી જાય, તો પદાર્થ બટકણો કહેવાય.

21. રબર જેવા પદાર્થમાં 700 % વિકૃતિ પેદા કરી શકાય છે. આવા પદાર્થોને ઇલાસ્ટોમર કહે છે.

22. રબર જેવા પદાર્થને બાહ્ય બળ આપી મોટા પ્રમાણ વિરૂપણ પેદા કર્યા બાદ, વિરૂપક બળ દૂર કરતાં પદાર્થ પોતાની મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે છે, પણ મૂળ માર્ગે નહીં. અહીં વિરૂપણ આપવા માટે કરવું પડતું કાર્ય પદાર્થ મૂળ સ્થિતિ પ્રાપ્ત કરે તે દરમિયાન મુક્ત થતી ઊર્જાથી વધુ હોય છે, આ ઘટનાને ઇલાસ્ટિક હિસ્ટેરીસીસ કહે છે. આ હકીકતનો ઉપયોગ શોક એબ્સોર્બરમાં થાય છે.

23. હુકનો નિયમ : નાના વિરૂપણ માટે પ્રતિબળ વિકૃતિના સમપ્રમાણમાં હોય છે.

24. નાના વિરૂપણ માટે પ્રતિબળ અને વિકૃતિનો ગુણોત્તર સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક કહેવાય છે. પ્રતાન-વિકૃતિ, કદ-વિકૃતિ અને આકાર-વિકૃતિને અનુરૂપ સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક અનુક્રમે યંગ મૉડ્યુલસ (Y) બલ્ક મૉડ્યુલસ (B) અને આકાર-સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક અથવા દૃઢતાઅંક (η) કહેવાય છે. સ્થિતિસ્થાપકતા-અંકનો એકમ $N\ m^{-2}$ છે.

25. પદાર્થ પર અક્ષીયબળ (તણાવબળ કે દાબીય બળ) લગાડતાં તેની લંબાઈમાં તથા પાર્શ્વિક પરિમાણોમાં ફેરફાર થાય છે. પાર્શ્વિક પરિમાણોમાં આંશિક ફેરફાર અને અક્ષીય પરિમાણમાં થતાં આંશિક ફેરફારનો ગુણોત્તર પોઇસનના ગુણોત્તર તરીકે ઓળખાય છે. તેનો સંકેત μ છે. તે એકમરહિત છે. μનું મૂલ્ય 0.5 ઓછું હોય છે.

26. પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લાગતાં પદાર્થ વિરૂપણને કારણે નવી સંરચના મેળવે છે, તેને કારણે તે સ્થિતિ-ઊર્જા ધરાવે છે. આ સ્થિતિ-ઊર્જાને સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા કહેવાય છે.

તેનું મૂલ્ય $U = \frac{1}{2}$ પ્રતિબળ $\times$ વિકૃતિ $\times$ કદ જેટલું થાય છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. એક તારને ખેંચીને તેની લંબાઈ બમણી કરવામાં આવે છે. નીચેનાં પૈકી કયું વિધાન આ સંદર્ભમાં ખોટું છે ?

(A) તેનું કદ વધે છે. (B) પ્રતાન-વિકૃતિ 1 થાય છે.

(C) પ્રતિબળ = યંગ મૉડ્યુલસ (D) પ્રતિબળ = 2 (યંગ મૉડ્યુલસ)

2. દૃઢતાઅંક (આકાર-સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક)નું પારિમાણિક સૂત્ર કયું છે ?

(A) $M^1L^1T^{-2}$ (B) $M^1L^{-1}T^{-2}$ (C) $M^1L^{-2}T^{-1}$ (D) $M^1L^{-2}T^{-2}$

3. એક તાર પર 20 kgથી વધુ દળ લટકાવતાં તે તૂટી જાય છે. આ જ દ્રવ્યના બનેલા બીજા અડધી ત્રિજ્યાવાળા તાર પર લટકાવી શકાતું મહત્તમ દળ કેટલું હશે ?

(A) 20 kg (B) 5 kg (C) 80 kg (D) 160 kg

4. એક ધાતુના બનેલ L લંબાઈના અને m જેટલા દળના સળિયાના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A છે. આ સળિયા નીચેના છેડે M દળ લટકાવવામાં આવે છે, તો સળિયાના ઉપરના છેડેથી $\frac{3L}{4}$ અંતરે આવેલા આડછેદ પર પ્રતિબળ કેટલું હશે ?

(A) Mg/A (B) $(M + m/4)\ g/A$

(C) $(M + \frac{3}{4}m)g/A$ (D) $M + m)\ g/A$

5. અહીં સમાન દ્રવ્યના ચાર તારની લંબાઈ અને વ્યાસનાં મૂલ્ય આપેલ છે. દરેકના છેડે સમાન દળ લટકાવતાં કયા તારની લંબાઈમાં થતો વધારો મહત્તમ હશે ?

(A) $l = 0.5$ m, $d = 0.05$ mm (B) 1 = 1m, d = 1mm

(C) l = 2m, d = 2mm (D) 1 = 3m, d = 3mm

6. 10^{-6} m^2 જેટલું આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા તારને 100 N પ્રતાનબળ આપતાં તેની લંબાઈમાં 1 % વધારો થાય છે, તો દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ .... છે.

(A) 10^{12} Pa (B) 10^{11} Pa (C) 10^{10} Pa (D) 10^{2} Pa

7. સમાન પરિમાણના કૉપર અને સ્ટીલના તારના છેડા જોડીને સંયુક્ત તાર બનાવ્યો છે. આ સંયુક્ત તારના છેડે વજન લટકાવતાં તેમની લંબાઈમાં થતાં વધારાનો ગુણોત્તર .... છે.

$$Y_{\text{સ્ટીલ}} = \frac{20}{7} Y_{\text{કૉપર}}$$

(A) 20 : 7 (B) 10 : 7 (C) 7 : 20 (D) 1 : 7

8. 100 m ઊંડા તળાવના તળિયે એક રબરબૉલને લઈ જતાં તેના કદમાં 1 % ઘટાડો થાય છે, તો રબરનો બલ્ક મૉડ્યુલસ .... છે. ($g = 10$ m s^{-2})

(A) 10^6 Pa (B) 10^8 Pa (C) 10^7 Pa (D) 10^9 Pa

9. દૃઢ પદાર્થનો યંગ મૉડ્યુલસ .... હોય છે.

(A) 0 (B) 1 (C) ∞ (D) 0.5

10. એક પદાર્થ પરનું દબાણ 1.01×10^5 Paથી વધીને 1.165×10^5 Pa થતાં તેનું કદ અચળ તાપમાને 10% જેટલું ઘટે છે, તો દ્રવ્યનો બલ્ક મૉડ્યુલસ .... છે.

(A) 1.55×10^5 Pa (B) 51.2×10^5 Pa

(C) 102.4×10^5 Pa (D) 204.8×10^5 Pa

11. એક તારના છેડે 200 N બળ લગાડતાં તેની લંબાઈમાં 1 mm વધારો થાય છે. તો આ ફેરફારને કારણે તેમાં સંગૃહીત સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જા .... છે.

(A) 0.2 J (B) 10 J (C) 20 J (D) 0.1 J

12. જડ આધાર સાથે બાંધેલા તારના મુક્ત છેડા પર F બળ લગાડતાં તેની લંબાઈમાં l જેટલો વધારો કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય .... થાય.

(A) $\frac{F}{2L}$ (B) Fl (C) $2Fl$ (D) $\frac{1}{2}Fl$

13. સંપૂર્ણ પ્લાસ્ટિક પદાર્થ માટે યંગ મૉડ્યુલસની કિંમત .... છે.

(A) l (B) શૂન્ય (C) ∞ (D) 2

14. સ્થિતિસ્થાપકતા-અંક પારિમાણિક દૃષ્ટિએ ....ને સમતુલ્ય છે.

(A) બળ (B) પ્રતિબળ (C) વિકૃતિ (D) એક પણ નહીં.

15. L લંબાઈના એક મેટલ-વાયરના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A છે અને તેના દ્રવ્યનો યંગ મૉડ્યુલસ Y છે. આ તાર સ્પ્રિંગ તરીકે વર્તતો હોય, તો તેનો બળ-અચળાંક કેટલો થાય ?

(A) $\frac{YA}{L}$ (B) $\frac{YA}{2L}$ (C) $\frac{2YA}{L}$ (D) $\frac{YL}{A}$

16. જ્યારે મેટલ વાયરમાં 10 Nનો તણાવ પેદા કરવામાં આવે છે, ત્યારે તેની કુલ લંબાઈ 5.001 m અને 20 N તણાવ માટે તેની કુલ લંબાઈ 5.002 m છે, તો તારની મૂળ લંબાઈ .... m છે.

(A) 5.001 (B) 4.009 (C) 5.0 (D) 4.008

જવાબો

1. (D) 2. (B) 3. (B) 4. (B) 5. (A) 6. (C)
7. (A) 8. (B) 9. (C) 10. (A) 11. (D) 12. (D)
13. (B) 14. (B) 15. (A) 16. (C)

નીચે આપેલ પ્રશ્નોનો જવાબ ટૂંકમાં આપો :

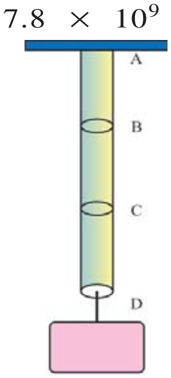
1. આણ્વિક સ્ફટિકોના નિર્માણ માટે કયાં બળો જવાબદાર છે ?
2. સંપૂર્ણ સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થની વ્યાખ્યા આપો.
3. વિકૃતિનું પારિમાણિક સૂત્ર લખો.
4. પદાર્થ પર બાહ્ય બળ લાગતાં તેમાં પુનઃસ્થાપક બળો ઉત્પન્ન થવાનું કારણ સમજાવો.
5. દબનીયતાની વ્યાખ્યા અને પારિમાણિક સૂત્ર આપો.
6. કયો પદાર્થ વધુ સ્થિતિસ્થાપક છે, રબર કે સ્ટીલ ?
7. કારણ આપો : સ્પ્રિંગ સ્ટીલમાંથી બનાવવામાં આવે છે, કૉપરમાંથી નહીં.
8. સ્થિતિસ્થાપક પદાર્થના પરિમાણમાં ફેરફાર કરવા માટે ખર્ચાતી ઊર્જાનું શું થાય છે ?
9. એક સળિયાને ખેંચીને લંબાઈમાં Δl વધારો કરતાં તેની સ્થિતિ-ઊર્જામાં U જેટલો વધારો થાય છે. જો તેના પર દાબીય બળ લગાડીને તેની Δl જેટલો ઘટાડો કરતાં સ્થિતિ-ઊર્જામાં શું ફેરફાર થાય ?
10. એક તાર માટે બ્રેકિંગ ફોર્સ F છે. જો તારની જાડાઈ બમણી કરવામાં આવે, તો બ્રેકિંગ ફોર્સનું મૂલ્ય કેટલું થાય ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. આયનીક સ્ફટિકમય પદાર્થો પર ટૂંક નોંધ લખો.
2. વિકૃતિ એટલે શું ? યોગ્ય ઉદાહરણની મદદથી આકાર વિકૃતિ સમજાવો.
3. પદાર્થની સપાટીને દોરેલો લંબ સાથે θ ખૂણો બનાવતા બળને કારણે પદાર્થ પર થતી અસર ચર્ચો.
4. યંગ મૉડ્યુલસનું મૂલ્ય મેળવવાની પ્રાયોગિક રીત સમજાવો.
5. પ્રતિબળ અને દબાણ વચ્ચેનો ભેદ સ્પષ્ટ કરો.
6. પોઇસનના ગુણોત્તરની વ્યાખ્યા આપો અને દર્શાવો કે તેનું મૂલ્ય 0.5થી ઓછું હોય છે.
7. સ્થિતિસ્થાપકીય સ્થિતિ-ઊર્જાનું સૂત્ર મેળવો.

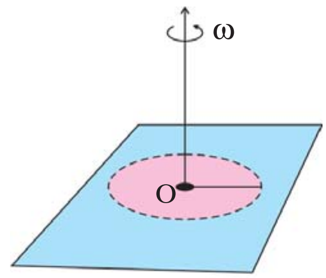
નીચેના દાખલા ગણો :

1. એક સ્ટીલનો તાર શિરોલંબ દિશામાં લટકાવેલ છે. આ તાર પોતાના વજનથી જ તૂટી જાય તેના માટે તેની મહત્તમ લંબાઈ કેટલી હોવી જોઈએ ? સ્ટીલની ઘનતા $= 7.8 \times 10^3$ kg m^{-3} સ્ટીલ માટે બ્રેકિંગ પ્રતિબળ $= 7.8 \times 10^9$ dyne/cm^2 છે. [**જવાબ :** $L = 1.02 \times 10^4$ m]
2. આકૃતિમાં 10^{-4} m^2 જેટલો એકસરખો આડછેદ ધરાવતો AB, BC અને CDનો બનેલો સંયુક્ત સળિયો દર્શાવ્યો છે અને છેડે 10 kgનું દળ લટકાવેલ છે. જો $L_{AB} = 0.1$ m, $L_{BC} = 0.2$ m અને $L_{CD} = 0.15$ m તથા $Y_{AB} = 2.5 \times 10^{10}$ Pa, $Y_{BC} = 4 \times 10^{10}$ Pa અને $Y_{CD} = 1 \times 10^{10}$ Pa તો બિંદુ B, C અને Dના સ્થાનાંતર ગણો.
[**જવાબ :** Bનું સ્થાનાંતર $= 3.9 \times 10^{-6}$ m, Cનું સ્થાનાંતર $= 8.8 \times 10^{-6}$ m અને Dનું સ્થાનાંતર $= 2.3 \times 10^{-5}$ m]



આકૃતિ 4.20

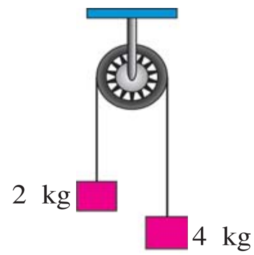
3. L લંબાઈ અને A આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતા તારને છેડે m દળનો પદાર્થ બાંધીને તેને ω કોણીય ઝડપથી સમક્ષિતિજ સમતલમાં ભ્રમણ આપવામાં આવે છે, તો તેની લંબાઈમાં વધારો $\Delta l = \dfrac{m\omega^2 L^2}{AY}$ છે તેમ દર્શાવો. Y યંગ મૉડ્યુલસ છે.



આકૃતિ 4.21

4. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ 2 kg અને 4 kgના બે પદાર્થ 2 cm^2 જેટલા આડછેદના એક તારના બે છેડે લટકાવેલ છે. તાર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ ઘર્ષણરહિત ગરગડી પરથી પસાર થાય છે, તો તારમાં ઉત્પન્ન થતી વિકૃતિ શોધો. $g = 10\ m\ s^{-2}$ $Y = 2 \times 10^{11}$ Pa.

[જવાબ : 6.6×10^{-7}]



આકૃતિ 4.22

5. 5 m લંબાઈનો અને 2 mm વ્યાસવાળો એક તાર છત પરથી લટકે છે, તેના વડે 5 kg દળ લટકાવતાં તેના કદમાં કેટલો વધારો થાય. દ્રવ્ય માટે પોઈસનનો ગુણોત્તર 0.2 છે. $Y = 2 \times 10^{11}$ Pa, $g = 10\ m\ s^{-2}$. તારની સ્થિતિ-ઊર્જામાં થતો વધારો પણ શોધો.

[જવાબ : $\Delta V = 7.5 \times 10^{-10}\ m^3$, 10^{-2} J]

6. 1 mm^2 આડછેદ ધરાવતા એક સ્ટીલના વાયરને 60^o તાપમાન સુધી ગરમ કરીને બે છેડા વચ્ચે તાર તંગ રહે તેમ બાંધ્યો છે. તાપમાન 30^oC થાય, ત્યારે તેમાં રહેલ તણાવમાં શું ફેરફાર થાય ? સ્ટીલ માટે રેખીય પ્રસરણાંક $\alpha = 1.1 \times 10^{-5}\ {}^oC^{-1}$, $Y = 2 \times 10^{11}$ P*a*. (તાપમાનમાં Δt ફેરફાર થતાં તારની લંબાઈમાં થતો ફેરફાર $= \alpha l \Delta t$)

[જવાબ : 66 N]

•

પ્રકરણ 5

તરલનું મિકેનિક્સ

5.1 પ્રસ્તાવના
5.2 દબાણ અને ઘનતા
5.3 પાસ્કલનો નિયમ અને તેના ઉપયોગો
5.4 તરલ સ્તંભને કારણે દબાણ
5.5 આર્કિમિડિઝનો સિદ્ધાંત
5.6 તરલ ડાઈનેમિક્સ
5.7 સાતત્ય સમીકરણ
5.8 બર્નુલીનું સમીકરણ અને તેના ઉપયોગો
5.9 શ્યાનતા
5.10 સ્ટૉક્સનો નિયમ
5.11 રેનોલ્ડ્ઝ-અંક અને ક્રાંતિવેગ
5.12 પૃષ્ઠ-ઊર્જા અને પૃષ્ઠતાણ
5.13 સંપર્કકોણ
5.14 કેશાકર્ષણ
• સારાંશ
• સ્વાધ્યાય

5.1 પ્રસ્તાવના (Introduction)

વહી શકે તેવા દ્રવ્યને તરલ કહે છે. પ્રવાહીઓ અને વાયુઓ વહી શકે છે, તેથી તેઓને તરલ કહે છે. પીગળેલ કાચ અને ડામર પણ ધીમેથી વહી શકે છે. તેથી તેઓનો પણ સમાવેશ તરલમાં થાય છે.

તરલ મિકેનિક્સ એ તરલ સ્ટેટીક્સ અને તરલ ડાઈનેમિક્સનું બનેલું છે. તરલ સ્ટેટીક્સમાં સ્થિર તરલ પર લાગતાં બળો અને દબાણનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. તરલ ડાઈનેમિક્સમાં તરલના ગુણધર્મો અને તરલની ગતિનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે. તરલ ડાઈનેમિક્સનો અભ્યાસ બે ભાગમાં કરવામાં આવે છે. હાઈડ્રોડાઈનેમિક્સ અને ઍરોડાઈનેમિક્સ.

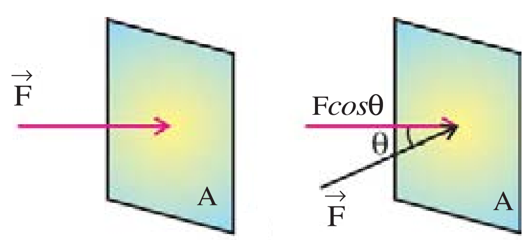
આપણે દબાણ અને પાસ્કલના નિયમનો અભ્યાસ તરલ સ્ટેટીક્સનો કરીશું. તરલ ડાઈનેમિક્સમાં પ્રવાહની લાક્ષણિકતાઓ, બર્નુલીનું સમીકરણ અને તેના ઉપયોગો અને શ્યાનતાનો અભ્યાસ કરીશું, અને છેલ્લે સ્થિર પ્રવાહીના પૃષ્ઠતાણની ચર્ચા પણ કરીશું. તો ચાલો શરૂઆત તરલ સ્ટેટીક્સથી કરીએ.

5.2 દબાણ અને ઘનતા

"પદાર્થની સપાટી પર એકમક્ષેત્રફળ દીઠ સપાટીને લંબરૂપે લાગતા બળને સપાટી પર લાગતું દબાણ કહે છે."

$$\text{દબાણ (P)} = \frac{\text{બળ (F)}}{\text{ક્ષેત્રફળ (A)}} \qquad (5.2.1)$$

જો બળ સપાટીને લંબ ન હોય, તો બળનો સપાટીને લંબઘટક આ સપાટી પર લાગતા દબાણ માટે ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. (જુઓ આકૃતિ 5.1)



સપાટી પરનું દબાણ

આકૃતિ 5.1

જો બળ ($\vec{F}$), સપાટીને દોરેલા લંબ સાથે θ ખૂણો બનાવે તો $F\cos\theta$ જેટલું બળ સપાટીને લંબ દિશામાં લાગે. તેથી દબાણની વ્યાખ્યા અનુસાર, દબાણ

$$P = \frac{F\cos\theta}{A} \quad (5.2.2)$$

દબાણનો એકમ newton/(metre)^2, (N/m^2) છે, જે પ્રસિદ્ધ ફ્રેન્ચ ભૌતિકવિજ્ઞાની બ્લેઇસ પાસ્કલ (1623–1662)ના માનમાં pascal (P_a) પણ ઓળખાય છે. દબાણ અદિશ રાશિ છે.

પાસ્કલ સિવાયના દબાણના એકમો બાર, વાતાવરણ (atm) અને ટોર (torr) છે.

$1\ P_a = 1\ N\ m^{-2}$

$1\ bar = 10^5\ P_a$

અને 1 વાતાવરણ (atm) $= 1.013 \times 10^5\ P_a$

$1\ torr = 133.28\ P_a$

1 atm દબાણ દરિયાની સપાટીએ વાતાવરણ દ્વારા ઉત્પન્ન થતું દબાણ છે. તેને પારાના સ્તંભની ઊંચાઈના સ્વરૂપમાં cm – Hg કે mm – Hgમાં પણ દર્શાવાય છે.

1 atm = 76 cm – Hg = 760 mm – Hg

ઘનતા : કોઈ પણ પદાર્થના દળ અને કદના ગુણોત્તરને તે પદાર્થની ઘનતા કહે છે. જો m દળના પદાર્થનું કદ V હોય, તો ઘનતા (ρ) નીચેના સૂત્રથી મળે.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (5.2.3)$$

સ્પષ્ટ છે કે ઘનતાનો એકમ kg m^{-3} થાય. સામાન્ય રીતે પ્રવાહીઓ અદબનીય હોય છે. (મોટા ભાગના પ્રવાહી કદમાં થતા પ્રતિશત ફેરફાર 0.005 ટકાના ક્રમનો હોય છે.) તેથી આપેલ તાપમાને તેમની ઘનતા અચળ હોય છે. વાયુઓની ઘનતા તેમના દબાણ પર આધારિત હોય છે. ટેબલ 5.1 માં કેટલાક તરલની ઘનતા આપેલ છે.

ટેબલ 5.1 : સામાન્ય તાપમાને અને દબાણે તરલોની ઘનતા (માત્ર જાણકારી માટે)

પ્રવાહી	ઘનતા (kg m^{-3})	વાયુ	ઘનતા (kg m^{-3})
પાણી	1×10^3	હવા	1.29
દરિયાનું પાણી	1.03×10^3	ઑક્સિજન	1.43
પારો	13.6×10^3	હાઇડ્રોજન	9.0×10^{-2}
ઈથાઈલ આલ્કોહૉલ	0.806×10^3	ઈન્ટર સ્ટેલર સ્પેસ	10^{-18}–10^{-21}
રુધિર	1.06×10^3		

કેટલીક વાર, આપેલ પદાર્થની ઘનતાને તેની વિશિષ્ટ ઘનતાનું મૂલ્ય આપી વર્ણવવામાં આવે છે. **"કોઈ પણ પદાર્થની વિશિષ્ટ ઘનતા એ પદાર્થની ઘનતા અને પાણીની 277 K તાપમાને ઘનતાનો ગુણોત્તર છે."** આમ,

$$\text{વિશિષ્ટ ઘનતા} = \frac{\text{પદાર્થની ઘનતા}}{\text{277 K તાપમાને પાણીની ઘનતા}}$$

વિશિષ્ટ ઘનતા પરિમાણરહિત છે. તેને સાપેક્ષ ઘનતા કે વિશિષ્ટ ગુરુત્વ પણ કહે છે. ઘનતાના વ્યસ્તને વિશિષ્ટ કદ કહે છે.

જો આપણે આપેલા પદાર્થના કદ જેટલું જ પાણી લઈએ, તો વિશિષ્ટ ઘનતા નીચે મુજબ મેળવી શકાય.

પદાર્થની વિશિષ્ટ ઘનતા =

$$\frac{\text{પદાર્થનું દળ}}{\text{277 K તાપમાને તેટલા જ કદના પાણીનું દળ}}$$

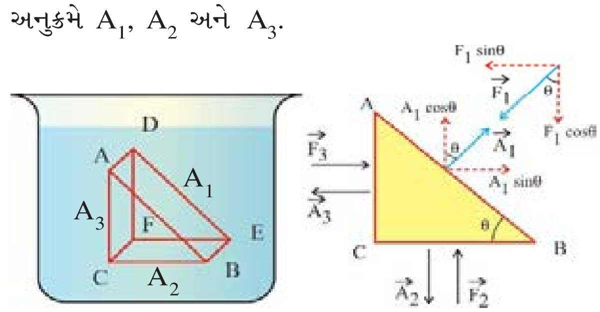
પદાર્થની વિશિષ્ટ ઘનતા શોધવા માટે ઉપર્યુક્ત સમીકરણ ખૂબ ઉપયોગી છે. આ રીતે પદાર્થની વિશિષ્ટ ઘનતા માટે પદાર્થની ઘનતા મેળવવાની જરૂરી રહેતી નથી.

5.3 પાસ્કલનો નિયમ અને તેના ઉપયોગો

પાસ્કલનો નિયમ : "જો ગુરુત્વાકર્ષણની અસરોને અવગણવામાં આવે તો સંતુલન-અવસ્થામાં રહેલા અદબનીય તરલમાં પ્રત્યેક બિંદુએ દબાણ સમાન હોય છે.'

આ વિધાનને સહેલાઈથી નીચે મુજબ ચકાસી શકાય :

સ્થિર અવસ્થામાં રહેલા પ્રવાહીના અંદરના ભાગમાં એક પ્રવાહી ખંડ વિચારો. આ ખંડ એક કાટકોણ ત્રિકોણની બનેલી બે બાજુ ધરાવતો એક પ્રિઝમ છે. આ ખંડની સપાટીઓ ADEB, CFEB અને ADFC ના ક્ષેત્રફળ અનુક્રમે A_1, A_2 અને A_3.



પાસ્કલના નિયમની ચકાસણી

આકૃતિ 5.2

આકૃતિ 5.2 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$A_2 = A_1\cos\theta$ and $A_3 = A_1\sin\theta$

વળી, પ્રવાહી ખંડ સંતુલનમાં હોવાથી,

$F_2 = F_1 cos\theta$ અને $F_3 = F_1 sin\theta$

હવે સપાટી ADEB પરનું દબાણ $P_1 = \frac{F_1}{A_1}$

સપાટી CFEB પરનું દબાણ

$$P_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1 cos\theta}{A_1 cos\theta} = \frac{F_1}{A_1}$$

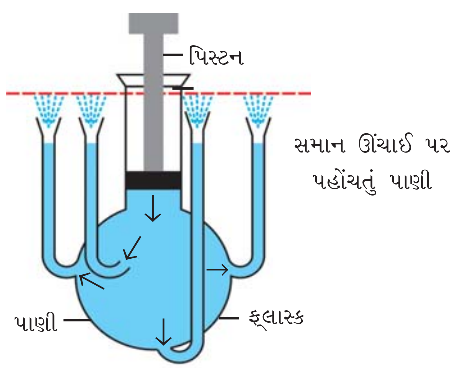
અને સપાટી ADFC પરનું દબાણ

$$P_3 = \frac{F_3}{A_3} = \frac{F_1 cos\theta}{A_1 cos\theta} = \frac{F_1}{A_1}$$

આમ, $P_1 = P_2 = P_3$

વળી, θ ખૂણો યાદચ્છિક હોવાથી આ પરિણામ કોઈ પણ સપાટી માટે સાચું છે. આમ, પાસ્કલનો નિયમ સાબિત થયો.

પાસ્કલના નિયમની એક સીધી અસર એ છે કે, ''બંધ પાત્રમાં ભરેલા અદબનીય તરલ પરના દબાણમાં કરેલો ફેરફાર, તરલના પ્રત્યેક ભાગમાં અને પાત્રની દીવાલ પર એક સરખી રીતે પ્રસરે છે.'' આ દબાણ પાત્રની દીવાલને લંબ રૂપે હોય છે. આ વિધાનને પાસ્કલના તરલ-દબાણના પ્રસરણનો નિયમ કહે છે.

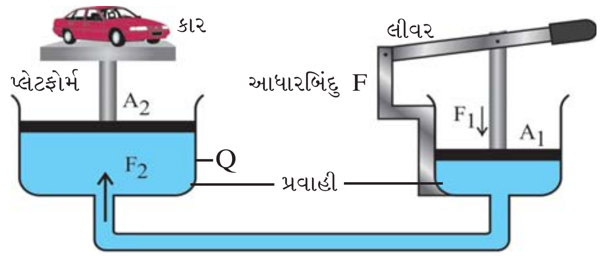


તરલમાં દબાણનું પ્રસરણ

આકૃતિ 5.3

આ પરિણામનું નિદર્શન એક કાચના ફ્લાસ્કની મદદથી કરી શકાય. આ ફ્લાસ્કમાંથી બધી બાજુએ નાની નળીઓ બહાર નીકળે છે (આકૃતિ 5.3). આ પાત્રમાં થોડું રંગીન પાણી ભરો. આ ફ્લાસ્કના ઉપરના ભાગમાં જોડાયેલા પિસ્ટનને થોડો નીચે તરફ ધકેલો. પાત્ર સાથે જોડાયેલ દરેક નળીમાં પાણી સમાન ઊંચાઈએ ઉપર ચઢશે. આ દર્શાવે છે કે પ્રવાહીના કોઈ પણ ભાગમાં દબાણમાં કરેલો ફેરફાર પ્રવાહીમાં દરેક દિશામાં સમાન રીતે પ્રસરે છે.

હાઈડ્રોલિક લિફ્ટ : હાઈડ્રોલિક લિફ્ટ પાસ્કલના નિયમ પર કાર્ય કરે છે. તે A_1 અને A_2, $(A_1 << A_2)$ જેટલા આડછેદના ક્ષેત્રફળ ધરાવતા બે નળાકારનું બનેલું સાધન છે (આકૃતિ 5.4). આ બે નળાકારમાં ઘર્ષણરહિત રીતે સરકી શકે તેવા હવાચુસ્ત પિસ્ટન પર ફીટ કરેલા છે. આ સાધનમાં આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પ્રવાહી ભરવામાં આવે છે.



હાઈડ્રોલિક જેક

આકૃતિ 5.4

ધારો કે A_1 જેટલો આડછેદ ધરાવતા પિસ્ટન પર F_1 જેટલું બળ લગાડવામાં આવે છે. તેને કારણે આ આડછેદ પર દબાણ.

$$P = \frac{F_1}{A_1}$$

આ દબાણ બંધ પાત્રમાંના પ્રવાહીમાં સમાન રીતે પ્રસરિત થતું હોવાથી મોટા આડછેદવાળા પિસ્ટન પર પણ આટલું જ દબાણ લાગશે. આમ, બીજા પિસ્ટન પરનું દબાણ, આમ,

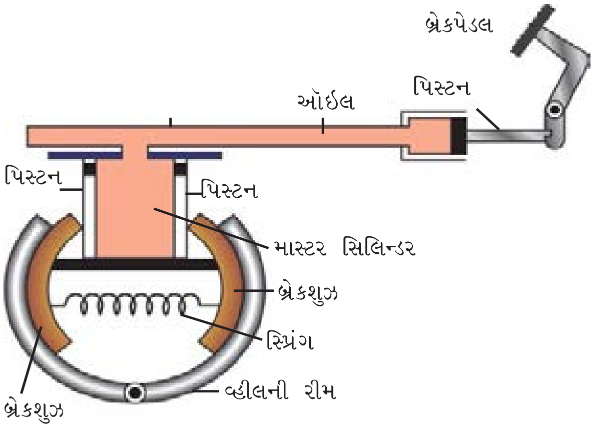
$$P = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\therefore \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1}$$

$$\therefore F_2 = F_1\left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

અત્રે, $A_1 << A_2$ હોવાથી $F_1 << F_2$. આમ, ઓછા પ્રયત્નબળ (F_1) વડે ભારે પદાર્થને ઊંચકી શકાય છે.

હાઈડ્રોલિક બ્રેક : મોટા ભાગનાં ઑટોમોબાઇલ્સ આ નિયમ પર કામ કરતી હાઈડ્રોલિક બ્રેક ધરાવે છે. જ્યારે વાહનચાલક બ્રેક-પેડલ પર થોડું બળ લગાડે છે. ત્યારે માસ્ટર પિસ્ટન એ માસ્ટર સિલિન્ડરમાં ધકેલાય છે. આથી ઉદ્ભવતું દબાણ બ્રેકઑઈલ મારફતે ઘટ્યા વિના મોટા ક્ષેત્રફળવાળા પિસ્ટન પર લાગુ પડે છે. આથી પિસ્ટન પર મોટું બળ લાગે છે. જે બ્રેકશુઝને ધકેલીને બ્રેક લાઈનરના સંપર્કમાં લાગે છે. આમ, પેડલ પર લગાડેલા નાના બળ વડે પૈડાં પર મોટું અવરોધક બળ લાગે છે.



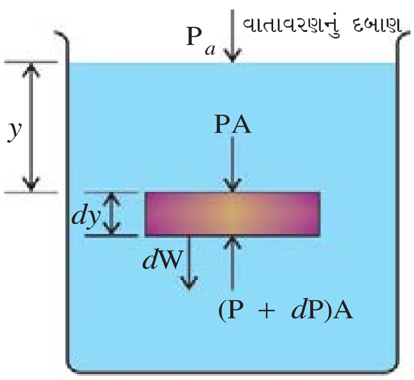
હાઇડ્રૉલિક બ્રેક
આકૃતિ 5.5

ડોર ક્લોઝર અને વાહનોના શૉક ઍબ્સોર્બર પણ પાસ્કલના નિયમ પર કાર્ય કરે છે.

(આકૃતિ 5.5 માત્ર જાણકારી માટે છે.)

5.4 તરલસ્તંભને કારણે ઉત્પન્ન થતું દબાણ (Pressure Due to Fluid Column)

ધારો કે કોઈ પાત્રમાં ρ ઘનતાવાળું પ્રવાહી સ્થિત સંતુલનમાં છે. આ પ્રવાહીમાં y ઊંડાઈએ રહેલા dy જાડાઈનો અને A જેટલા આડછેદવાળો નળાકાર તરલ-ખંડ વિચારો. આકૃતિ 5.6માં દર્શાવ્યા મુજબ આ તરલ-ખંડનું કદ Ady છે, અને તેના દળ અને વજન અનુક્રમે $\rho.A.dy$ અને $dW = \rho g \cdot A dy$ થશે.



તરલસ્તંભ વડે ઉદ્‌ભવતું દબાણ
આકૃતિ 5.6

ધારો કે આકૃતિ 5.6માં દર્શાવ્યા મુજબ આ નળાકાર ખંડની ઉપરની અને નીચેની સપાટી પર દબાણ અનુક્રમે P અને P + dp છે. તેથી ઉપરની સપાટી પર અધોદિશામાં લાગતું બળ PA થશે અને નીચેની સપાટી પર ઊર્ધ્વદિશામાં લાગતું બળ (P + dp)A થશે.

$$PA + dW = (P + dp)A$$

$$\therefore\ PA + \rho g A dy = PA + A dp$$

$$\therefore\ \rho g A dy = A dp.$$

$$\therefore\ \frac{dp}{dy} = \rho g \qquad (5.4.1)$$

આ સમીકરણ દર્શાવે છે કે દબાણમાં ઊંડાઈ (કે ઊંચાઈ) સાથે થતો ફેરફાર ભૌતિક રાશિ ρg પર આધારિત છે. ρgને વજનઘનતા (એકમકદવાળા પદાર્થનું વજન) કહે છે. મોટા ભાગના પ્રવાહીઓ અદબનીય હોવાથી ρg ઓછી ઊંચાઈના તરલસ્તંભ માટે અચળ રહે છે. હવા જેવા તરલ માટે ઘનતા ρ પૃથ્વીની ઊંચાઈ, તાપમાન વગેરે પર આધારિત છે. તેથી હવા માટે વજન ઘનતાનું મૂલ્ય અચળ ગણી ન શકાય.

આકૃતિ 5.6માં દર્શાવ્યા મુજબ પાત્ર ખુલ્લું હોવાથી પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પર વાતાવરણનું દબાણ હોય છે. તેથી $y = 0$ માટે $P = P_a$ અને $y = h$ ઊંડાઈએ દબાણ P સમીકરણ 5.4.1નું સંકલન કરીને મેળવી શકાય.

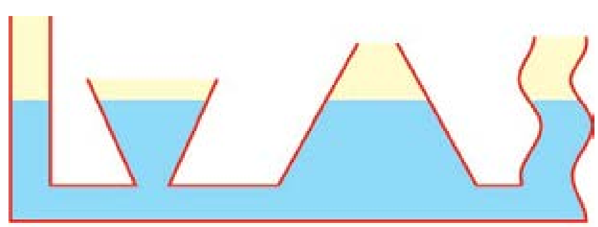
$$\int_{P_a}^{P} dP = \int_0^h \rho g\, dy$$

$$\therefore\ P - P_a = \rho g h$$

$$\therefore\ P = P_a + \rho g h \qquad (5.4.2)$$

અહીં, $P = P_a + \rho g h$ એ નિરપેક્ષ દબાણ છે, જ્યારે $P - P_a$ ને તે બિન્દુએ ગેજદબાણ અથવા હાઇડ્રોસ્ટેટિક દબાણ કહેવાય છે.

પ્રવાહીમાં કોઈ પણ બિન્દુએ દબાણ પાત્રના આકાર કે ક્ષેત્રફળ પર આધારિત નથી. આ હકીકતને **હાઇડ્રોસ્ટેટિક પેરાડોક્સ** કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 5.7) જુદા-જુદા આકાર ધરાવતાં પણ એકબીજાં સાથે જોડાયેલાં પાત્રોમાં જ્યારે પ્રવાહી ભરવામાં આવે છે, ત્યારે દરેક પાત્રમાં પ્રવાહીની ઊંચાઈ સમાન હોય છે.



હાઇડ્રોસ્ટેટિક પેરોડોક્સ
આકૃતિ 5.7

સમીકરણ (5.4.2) સૂચવે છે કે જો બે બિંદુઓ સ્થિર પ્રવાહીમાં એક જ સમક્ષિતિજ સમતલમાં આવેલાં હોય, તો આ બંને બિંદુ આગળ દબાણ સમાન હોય છે.

5.5 આર્કિમિડિઝનો સિદ્ધાંત : "જ્યારે કોઈ પદાર્થને પ્રવાહીમાં આંશિક કે સંપૂર્ણપણે ડુબાડવામાં આવે, ત્યારે તેના પર લાગતું ઉત્પ્લાવક બળ તેણે વિસ્થાપિત કરેલ પ્રવાહીના વજન જેટલું હોય છે અને તે વિસ્થાપિત કરેલા પ્રવાહીના દ્રવ્યમાનકેન્દ્ર પર ઊર્ધ્વ દિશામાં લાગે છે."

જો પ્રવાહીની ઘનતા ρ_f અને ડુબાડેલ પદાર્થનું કદ V હોય, તો ઉત્પ્લાવક બળ $F_b = \rho_f Vg$ થાય.

જે પદાર્થના વજનમાં થતા ઘટાડા જેટલું છે.

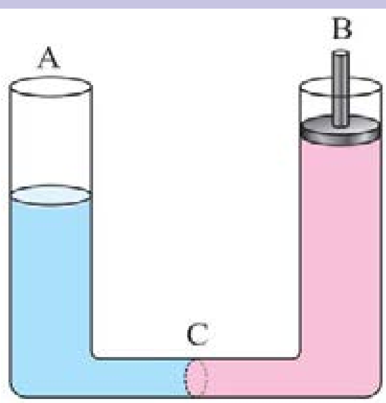
ફ્લોટેશનનો નિયમ : જ્યારે પદાર્થનું વજન (W) એ તરતા પદાર્થના આંશિક ડૂબેલા ભાગ દ્વારા વિસ્થાપિત પ્રવાહીના વજન જેટલું હોય, ત્યારે પદાર્થ પ્રવાહીની સપાટી પર તરે છે.

(i) જો $W > F_b$ હોય, તો પદાર્થ પ્રવાહીમાં ડૂબે છે.

(ii) જો $W = F_b$ હોય, તો પદાર્થ પ્રવાહીમાં કોઈ પણ ઊંડાઈએ સમતોલ રહે છે.

(iii) જો $W < F_b$ હોય, તો પદાર્થ પ્રવાહીની સપાટી પર તરે છે, અને તે પદાર્થ અંશતઃ ડુબેલો રહે છે.

ઉદાહરણ 1 : આકૃતિ 5.8માં દર્શાવ્યા મુજબ બે નળાકાર પાત્રો A અને B એકબીજાં સાથે જોડાયેલાં છે. પાત્ર Aમાં 2 mની ઊંચાઈ સુધી પાણી ભરેલ છે. પાત્ર Bમાં કેરોસીન ભરેલું છે. આ બે પ્રવાહી હવાચુસ્ત તકતી C દ્વારા જુદા પાડેલાં છે. જો કેરોસીનના સ્તંભની ઊંચાઈ 2 m રાખવી હોય, તો પાત્ર Bમાં રહેલા પિસ્ટન પર કેટલું દળ મૂકવું પડે. આ દળ વડે તકતી C પર લાગતું બળ પણ શોધો. પિસ્ટનનું ક્ષેત્રફળ = 100 cm^2, તકતીનું ક્ષેત્રફળ 10 cm^2 પાણીની ઘનતા 10^3 kg m^{-3} અને કેરોસીનની વિશિષ્ટ ઘનતા = 0.8 છે.



આકૃતિ 5.8

ઉકેલ : પિસ્ટનનું ક્ષેત્રફળ $A_1 = 100\ cm^2 = 10^{-2}\ m^2$

તકતીનું ક્ષેત્રફળ $A_2 = 10\ cm^2 = 10^{-3}\ m^2$

પાણીની ઘનતા $\rho_\omega = 10^3$ kg m^{-3}

હવે $\frac{\text{કેરોસીનની ઘનતા}}{\text{પાણીની ઘનતા}} = 0.8$

$\therefore$ કેરોસીનની ઘનતા $\rho_k = 0.8 \times$ પાણીની ઘનતા $= 0.8 \times 10^3 = 800$ kg m^{-3}

કેરોસીનની ઊંચાઈ 2 m છે.

પાણીના સ્તંભનું દબાણ $= \frac{mg}{A_1}$ + કેરોસીન સ્તંભનું દબાણ

$$\therefore h\rho_\omega g = h\rho_k g + \frac{mg}{A_1}$$

$$\therefore 2 \times 10^3 = 2 \times 800 + \frac{m}{10^{-2}}$$

$$\therefore 2000 - 1600 = \frac{m}{10^{-2}}$$

$$\therefore 400 \times 10^{-2} = m$$

$$\therefore m = 4\ kg$$

હવે દળ m દ્વારા ઉત્પન્ન થતું દબાણ કોઈ ફેરફાર વિના તકતી C પર પણ લાગે છે, તેથી

4 kg દળને કારણે દબાણ $= \frac{\text{તકતી C પર બળ}}{\text{તકતી Cનું ક્ષેત્રફળ}}$

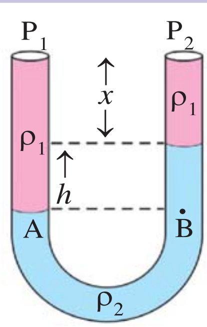
$$\therefore \frac{mg}{A_1} = \frac{F_C}{A_2}$$

$$\therefore F_C = mg\frac{A_2}{A_1}$$

$$= \frac{4 \times 9.8 \times 10^{-3}}{10^{-2}}$$

$$= 3.92\ N$$

ઉદાહરણ 2 : આકૃતિ 5.9માં દર્શાવ્યા મુજબ મેનોમીટરના નીચેના ભાગમાં ρ_2 ઘનતાવાળું તરલ અને ઉપરના ભાગમાં ρ_1 ઘનતાવાળું તરલ ભરેલું છે. મેનોમીટરના બે ભુજની ટોચ પરના દબાણ P_1 અને P_2 હોય તો, દબાણનો તફાવત $P_1 - P_2$ ગણો.



આકૃતિ 5.9

ઉકેલ : આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ તળીયેથી સમાન ઊંચાઈ ધરાવતાં બે બિંદુઓ A અને B વિચારો.

આ બિંદુઓ માટે,

$P_A = P_B$

$\therefore P_1 + (h + x)\rho_1 g = x\rho_1 g + h\rho_2 g + P_2$

$\therefore P_1 - P_2 = x\rho_1 g + h\rho_2 g - h\rho_1 g - x\rho_1 g$

$\therefore P_1 - P_2 = (\rho_2 - \rho_1)gh$

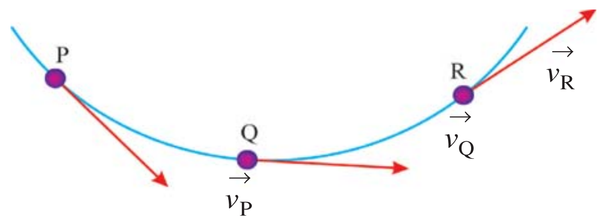
5.6 તરલ ડાઈનેમિક્સ

કણની ગતિનો અભ્યાસ કરતી વખતે આપણે કોઈ એક જ કણની ગતિ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરવાનું હતું, તેથી ખાસ મુશ્કેલી પડતી ન હતી. પરંતુ તરલની ગતિમાં તો તરલના 'જથ્થાબંધ' કણો એકસાથે ગતિ કરતાં હોય, તો તે દરેકની ગતિ પર એકસાથે ધ્યાન કેવી રીતે આપી શકાય ? જે. એલ. લાગ્રાન્જે કણના ગતિવિજ્ઞાનના ખ્યાલોને વ્યાપક બનાવી તરલના દરેક કણ સાથે કેવી રીતે કામ પાર પાડવું તે સમજાવ્યું છે. જોકે અત્યારે આપણે આ અભિગમની ચિંતા કરીશું નહિ. વિજ્ઞાની ઑઈલરે વિકસાવેલો બીજો અભિગમ સગવડભર્યો છે. આ અભિગમમાં આપણે તરલના દરેક કણની ચિંતા કરતાં નથી, તેને બદલે તરલમાં દરેક બિંદુએ દરેક ક્ષણે તરલની ઘનતા, દબાણ અને વેગનો વિચાર કરવાનો હોય છે. આમ છતાં, તરલના કણોને સર્વથા ભૂલી જવાનું તો પોસાય નહિ, કારણ કે છેવટે તો તરલની ગતિ તેના કણોની ગતિને જ આભારી છે.

અહીં, આપણે તરલની ગતિના અભ્યાસમાં ઘણી આદર્શ અને સરળ પરિસ્થિતિઓનો જ વિચાર કરીશું. આ માટે સૌપ્રથમ તરલ વહનની કેટલીક લાક્ષણિકતાઓ જાણી લઈએ.

તરલ વહનની લાક્ષણિકતાઓ (Characteristics of Fluid Flow) :

(1) સ્થાયી વહન (Steady flow) : જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલનો વેગ સમય સાથે અફર (અચળ) રહેતો હોય, તો તેવા વહનને સ્થાયી વહન કહે છે. આનો અર્થ એવો થયો કે આવા વહનમાં કોઈ એક આપેલા બિંદુ પાસેથી પસાર થતા તરલ કણોનો વેગ એકસરખો જ રહે છે. આ બાબત સમજવા માટે આકૃતિ 5.10 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે નમૂના તરીકે ત્રણ બિંદુઓ P, Q અને R ધ્યાનમાં લો. આ બિંદુઓ પરથી પસાર થતા દરેક કણના વેગ અનુક્રમે $\vec{v}_P$, $\vec{v}_Q$ અને $\vec{v}_R$ છે. વળી, આ વેગો સમય સાથે અચળ રહે છે. યાદ રાખો કે સ્થાયી વહનમાં જુદાં-જુદાં બિંદુઓ પરથી પસાર થતા કણના વેગ એકસરખા હોવા જરૂરી નથી, પરંતુ જે-તે બિંદુ પરથી પસાર થતા કણોના વેગ સમય સાથે બદલાતા નથી. એટલે કે $\vec{v}_P = \vec{v}_Q = \vec{v}_R$ હોવું જરૂરી નથી. પરંતુ $\vec{v}_P$, $\vec{v}_Q$ અને $\vec{v}_R$ સમય સાથે અચળ રહે તે જરૂરી છે. બહુ જ ઓછા વેગથી ગતિ કરતા તરલની ગતિને સ્થાયી વહન કહી શકાય. જેમકે ખૂબ ધીમે વહેતું ઝરણું.



સ્થાયી વહનની લાક્ષણિકતાઓ

આકૃતિ 5.10

(2) અસ્થાયી વહન (Unsteady flow) : જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલનો વેગ સમય સાથે બદલાતો રહેતો હોય, તો તેવા વહનને અસ્થાયી વહન કહે છે. જેમકે ભરતી અને ઓટ વખતે દરિયાના પાણીની ગતિ.

(3) પ્રક્ષુબ્ધ વહન (Turbulent flow) : જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલના વેગમાં સમય સાથે અનિયમિત તેમજ ઝડપી ફેરફાર થતો હોય, તો તેવા વહનને પ્રક્ષુબ્ધ વહન કહે છે. આવા વહનમાં એક બિંદુએથી બીજા બિંદુએ જતાં કણના વેગમાં અનિયમિત અને ઝડપી ફેરફાર થતો હોય છે. જેમકે ધોધ રૂપે પડતા પાણીની ગતિ, કિનારા પરના ખડકો સાથે અફળાતાં દરિયાનાં મોજામાંના પાણીની ગતિ.

(4) અચક્રીય વહન (Irrotational flow) : તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે જો તરલના અંશને (તરલના નાના ભાગને) તે બિંદુને અનુલક્ષીને કોઈ પરિણામી કોણીય વેગ ન હોય, તો તરલનું વહન અચક્રીય વહન કહેવાય છે.

વહેણમાં નાના હળવા ચક્રની ગતિ

આકૃતિ 5.11

જો તરલ વહન અચક્રીય હોય, તો આકૃતિ 5.11માં દર્શાવ્યા મુજબ વહેણમાં એક નાનું હળવું પાંખિયાંવાળું ચક્ર મૂકીએ, તો તે ચક્રીય ગતિ કર્યા સિવાય ફક્ત રેખીય ગતિ જ કરશે.

(5) ચક્રીય વહન (Rotational–flow) : જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલના નાના અંશને તે બિંદુને અનુલક્ષીને કંઈક ચોખ્ખો કોણીય વેગ હોય, તો વહન ચક્રીય કહેવાય છે. આવા વહનમાં મૂકેલ પાંખિયાંવાળું ચક્ર ગોળ-ગોળ ફરતું-ફરતું રેખીય ગતિ કરે છે. ચક્રીય વહન વમળયુક્ત હોય છે. જેમકે ઘૂમરીવાળા પાણીના પ્રવાહો, એક્ઝોસ્ટ ફેનમાંથી બહાર આવતી હવાની ગતિ.

(6) અદબનીય વહન (Incompressible flow) : જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે દરેક ક્ષણ તરલની ઘનતા અચળ રહેતી હોય, તો તેવા વહનને અદબનીય

વહન કહે છે. આમ, અદબનીય વહનમાં સમય કે સ્થાન સાથે તરલની ઘનતામાં કોઈ ફેરફાર થતો નથી. સામાન્ય રીતે પ્રવાહીરૂપ તરલ અદબનીય વહન કરે છે. વાયુરૂપ તરલ માટે અમુક પરિસ્થિતિમાં ઘનતામાં થતા ફેરફારો બહુ અગત્યના હોતા નથી. આવા કિસ્સાઓમાં વાયુરૂપ તરલ અદબનીય વહન કરે છે તેમ કહી શકાય. જેમકે ધ્વનિની ઝડપ કરતાં ઘણી ઓછી ઝડપે ઊડતા વિમાનની પાંખોની સાપેક્ષે હવાની ગતિ લગભગ અદબનીય ગણી શકાય.

(7) દબનીય વહન (Compressible flow) : જો તરલ વહનમાં સ્થાન અને સમય સાથે તરલની ઘનતા બદલાતી રહેતી હોય, તો તેવા વહનને દબનીય વહન કહે છે.

(8) અશ્યાન વહન (Non-viscous flow) : જે તરલ માટે શ્યાનતા-ગુણાંક (co-efficient of viscosity) નું મૂલ્ય ઓછું હોય, તેવા તરલના વહનને અશ્યાન વહન કહે છે. સામાન્ય શબ્દોમાં કહીએ તો સહેલાઈથી વહેતા વહનને અશ્યાન વહન કહે છે. જેમકે સામાન્ય સ્થિતિમાં પાણીનું વહન.

(9) શ્યાન વહન (Viscous flow) : જે તરલ માટે શ્યાનતા-ગુણાંકનું મૂલ્ય વધારે હોય, તેવા તરલના વહનને શ્યાન વહન કહે છે. સામાન્ય શબ્દોમાં કહીએ તો સહેલાઈથી ન વહી શકતા તરલના વહનને શ્યાન વહન કહે છે. જેમકે દિવેલનું, મધનું વહન.

અહીં પ્રારંભમાં, આપણે સ્થાયી, અચક્રીય, અદબનીય અને અશ્યાન વાહનનો જ વિચાર કરીશું. જોકે વાસ્તવિક પરિસ્થિતિ કરતાં આપણી ધારણા વધારે પડતી આદર્શ છે. શું આપણી આ ધારણા પ્રમાણેનું તરલ પ્રવાહી મળે ખરું ? વિચારો.

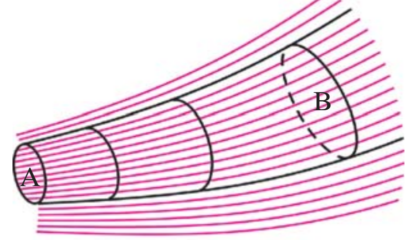
5.6.1 ધારારેખાઓ (Streamlines), વહનનળી (Tube of flow) :

તરણકણના ગતિમાર્ગને પ્રવાહરેખા (line of flow) કહેવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે પોતાના ગતિમાર્ગ પર કણના વેગનું મૂલ્ય અને દિશા બદલાતી જતી હોય છે, અને એક જ બિંદુ પાસેથી પસાર થતા બધા કણો એક જ માર્ગે ગતિ કરતા ન પણ હોય. આમ છતાં, સ્થાયી વહનમાં પરિસ્થિતિ રસપ્રદ છે.

સ્થાયી વહનમાં, દરેક બિંદુ પાસેથી પસાર થતા કણનો વેગ સમય સાથે અફર હોય છે. આકૃતિ 5.10 માં, સ્થાયી વહનમાં, ધારો કે P પાસેથી પસાર થતા કણનો વેગ $\vec{v_P}$ છે. તે સમય સાથે બદલાતો નથી. આમ, P પાસેથી પસાર થતા દરેક કણનો વેગ $\vec{v_P}$ છે અને આ દરેક કણ P પાસેથી એકસરખી દિશામાં જ આગળ વધે છે. જ્યારે P પાસેથી પસાર થતો દરેક કણ Q પાસે જાય છે, ત્યાં તેનો વેગ $\vec{v_Q}$ પણ સમય સાથે અફર છે અને ત્યાંથી તે આગળ વધીને R પાસે જાય છે. ત્યાં પણ તેનો વેગ $\vec{v_R}$ સમય સાથે અફર હોય છે. આમ, P પાસેથી પસાર થતા દરેક કણનો ગતિમાર્ગ PQR બને છે. સમય જતાં આ માર્ગ બદલાતો નથી. સ્થાયી વહનમાંના આવા સ્થિર ગતિમાર્ગને ધારારેખા કહે છે. અહીં સ્પષ્ટ છે કે સ્થાયી વહનમાં પ્રવાહ રેખા અને ધારારેખા એકાકાર બની જાય છે. આ ચર્ચા પરથી ધારારેખાની વ્યાખ્યા બીજી રીતે પણ આપી શકાય. જે વક્ર પરના દરેક બિંદુ પાસેનો સ્પર્શક તે બિંદુ પાસેથી પસાર થતા કણના વેગની દિશામાં હોય તેવા વક્રને ધારારેખા કહે છે. જે વહન માટે આવી ધારારેખાઓ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય છે, તેવા વહનને ધારારેખી વહન (Streamline flow) પણ કહેવાય છે. અસ્થાયી વહનમાં પ્રવાહરેખાઓ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય પણ ધારારેખાઓ વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય નહિ.

સ્થાયી વહનમાં ધારારેખાઓ એકબીજીને છેદી શકે નહિ. જો તેઓ છેદે તો છેદનબિંદુ પાસેના બે સ્પર્શકોમાંના કોઈ પણ સ્પર્શકની દિશામાં કણ ગતિ કરે, જે સ્થાયી વહનમાં શક્ય નથી..

વહનનળી (પ્રવાહનળી) (Tube of flow) : સૈદ્ધાંતિક રીતે દરેક બિંદુમાંથી પસાર થતી ધારારેખા દોરી શકાય. આકૃતિ 5.12માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોઈ પૃષ્ઠની પરિસીમામાંથી પસાર થતી ધારારેખાઓનું બંડલ વિચારીએ, તો આ બંડલ વડે ઘેરાતા નળી જેવા ભાગને વહનનળી કહે છે. વહનનળીની દીવાલ ધારારેખાઓની બનેલી હોય છે. સ્થાયી વહનમાં બે ધારારેખાઓ છેદી શકતી ન હોવાથી કોઈ તરલ કણ વહન નળીની દીવાલમાંથી પસાર થઈ શકતો નથી અને વહનનળીને ખરેખર નળી ગણવામાં વાંધો આવતો નથી.

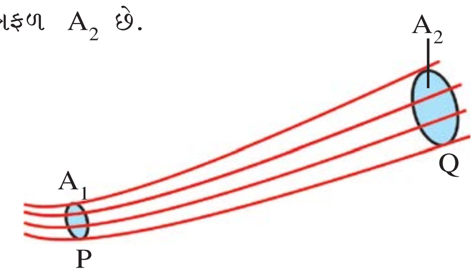


વહનનળી

આકૃતિ 5.12

5.7 સાતત્ય-સમીકરણ (Equation of Continuity)

આકૃતિ 5.13માં દર્શાવ્યા મુજબ એક પ્રવાહનળી વિચારો. P બિંદુ આગળ તરલનો વેગ v_1 છે. P આગળ પ્રવાહનળી આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A_1 છે, તથા બિંદુ Q, આગળ વેગ v_2 છે. Q આગળ પ્રવાહનળીના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ A_2 છે.



આકૃતિ 5.13

આમ, P આગળના આડછેદમાંથી પસાર થતું તરલ એકમ સમયમાં v_1 જેટલું અંતર કાપશે. તેથી P આગળના

આડછેદમાંથી પસાર થતા તરલનું કદ A_1v_1 થશે. જો અદબનીય તરલની ઘનતા ρ હોય તો P આગળના આડછેદમાંથી એકમસમયમાં પસાર થતું તરલનું દળ ρA_1v_1.

કોઈ આડછેદમાંથી એકમસમયમાં પસાર થતા તરલનું દળ દળ-ફ્લક્સ કહેવાય છે. આમ,

P આગળ દળ ફ્લક્સ $= \rho A_1v_1$. (5.7.1)

આ જ રીતે Q આગળ દળ ફ્લક્સ $= \rho A_2v_2$ (5.7.2)

તરલ પ્રવાહનળીની દીવાલમાંથી પસાર થઈ શકતું નથી વળી તરલનો નાશ કે નવા તરલનું સર્જન પ્રવાહનળીમાં શક્ય નથી. તેથી P અને Q આગળના આડછેદ માટે દળ ફ્લક્સ સમાન હોવાં જોઈએ. આમ, સમીકરણ 5.7.1 અને 5.7.2 પરથી,

$$\rho A_1v_1 = \rho A_2v_2$$

$$\therefore A_1v_1 = A_2v_2 \quad (5.7.3)$$

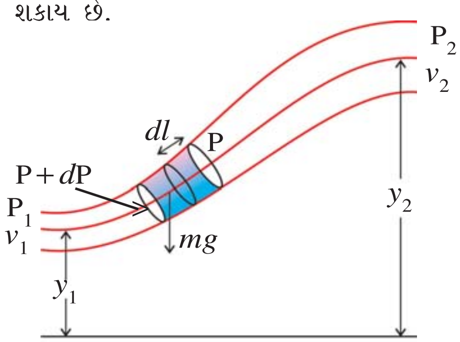
અથવા પ્રવાહનળીના કોઈ પણ આડછેદ માટે

$$Av = \text{અચળ} \quad (5.7.4)$$

સમીકરણ 5.7.3 અથવા 5.7.4 સાતત્યનું સમીકરણ કહેવાય છે. કોઈ પણ આડછેદ પાસેના વેગ અને ક્ષેત્રફળના ગુણાકારને કદ ફ્લક્સ (volume–flux) કહે છે. સમીકરણ 5.7.4 દર્શાવે છે કે વહનનળીના સાંકડા વિભાગમાં ધારા રેખાઓ ગીચોગીચ થઈ જાય છે. જે દર્શાવે છે કે જ્યાં ધારા રેખાઓ ગીચ હોય ત્યાં વેગ વધારે હોય છે. પહોળા વિભાગમાં આથી ઊલટું હોય છે. આમ, ગીચ ધારારેખાઓ વધારે વેગનો અને છુટ્ટીછુટ્ટી ધારાઓ ઓછા વેગનો નિર્દેશ કરે છે.

5.8 બર્નુલીનું સમીકરણ અને તેના ઉપયોગો (Bernoulli's Equations and its Applications)

બર્નુલીનું સમીકરણ તરલ-મિકેનિક્સમાં પાયાનું સમીકરણ છે. આ સમીકરણ તરલ-મિકેનિક્સમાં કોઈ નવો સિદ્ધાંત રજૂ નથી કરતું. આ સમીકરણ કાર્ય-ઊર્જાપ્રમેયથી મેળવી શકાય છે.



આકૃતિ 5.14

આપણે અહીં ધારારેખી, સ્થાયી, અચક્રીય અદબનીય અને અશ્યાન પ્રવાહ ધ્યાનમાં લઈશું. આ પ્રવાહ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ વહનનળીમાંથી પસાર થઈ રહ્યો છે. A ક્ષેત્રફળ અને dl લંબાઈનો નાનો તરલખંડ વિચારો. આ તરલખંડના મધ્યમાંથી પસાર થતી મધ્યમાન ધારારેખા સંદર્ભસપાટીને સાપેક્ષ y_1 અને y_2 ઊંચાઈએથી પસાર થાય છે. y_1 ઊંચાઈએ દબાણ P_1 અને તરલનો વેગ v_1 જ્યારે y_2 ઊંચાઈએ દબાણ P_2 અને વેગ v_2 છે. આ તરલખંડ પર બે બળો લાગે છે : (1) દબાણના તફાવતને કારણે લાગતું બળ (AdP) અને (2) ગુરુત્વાકર્ષણ બળ mg ધારો કે આ તરલ-ખંડ dl જેટલું અંતર કાપે છે. આ દરમિયાન પ્રથમ બળ દ્વારા થતું કાર્ય $Adl\ dP$ છે અને ગુરુત્વાકર્ષણ બળ વિરુદ્ધ થતું કાર્ય (સ્થિતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર)–$mgdy$ છે. જ્યાં dy તરલખંડની ઊંચાઈમાં થતો ફેરફાર છે. જો શરૂઆતમાં તેની ગતિ-ઊર્જા $\frac{1}{2}mv^2$ હોય, તો આ સ્થાનાંતર dy દરમિયાન ગતિ-ઊર્જામાં થતો ફેરફાર $d(\frac{1}{2}mv^2) = mvdv$ થાય.

કાર્ય-ઊર્જા પ્રમેય અનુસાર,

$$mvdv = AdldP - mg\ dy \quad (5.8.1)$$

Adl તરલખંડનું કદ હોવાથી સમીકરણ 5.8.1 નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$\frac{m}{Adl}vdv = dP - \frac{m}{Adl}gdy \quad (5.8.2)$$

અહીં m/Adl તરલની ઘનતા છે અને તરલ અદબનીય હોવાથી તે અચળ છે. આમ, સમીકરણ 5.8.2 નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\rho vdv = -dp - \rho gdy$$

$$\therefore \rho\int_{v_1}^{v_2} vdv = -\int_{P_1}^{P_2} dP - \rho g\int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$\therefore \rho\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = -[P]_{P_1}^{P_2} - \rho g[y]_{y_1}^{y_2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = -[P_2 - P_1] - \rho g(y_2 - y_1)$$

$$\therefore P_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho gy_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (5.8.3)$$

$$\therefore P + \rho gy + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{અચળ} \quad (5.8.4)$$

સમીકરણ 5.8.3 અથવા 5.8.4 બર્નુલીના સમીકરણ તરીકે ઓળખાય છે. અત્રે નોંધવું જરૂરી છે. આ સમીકરણના બધાં પદો એક જ ધારારેખા પર ગણવાં જોઈએ. જો વહન અચક્રીય હોય તો એવું સાબિત કરી શકાય કે સમીકરણ 5.8.4માં આવતો અચળાંક બધી જ ધારારેખાઓ માટે સમાન છે.

સમીકરણ 5.8.4ને ρg વડે ભાગતાં

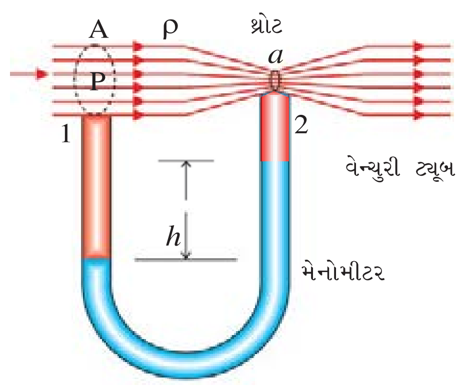
$$\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + y = \text{અચળ} \qquad (5.8.5)$$

આ સમીકરણ બર્નુલીના સમીકરણનું વૈકલ્પિક સ્વરૂપ છે. આ સમીકરણમાં પ્રથમ પદ પ્રેસરહેડ, બીજું પદ વેલોસિટી હેડ અને ત્રીજું પદ એલિવેશન હેડ તરીકે ઓળખાય છે.

બર્નુલીના સમીકરણના ઉપયોગો

(1) વેન્ચુરીમીટર : આ સાધનનો ઉપયોગ તરલનો વેગ જાણવા માટે થાય છે. વેન્ચુરીમીટરની રચના આકૃતિ 5.15માં દર્શાવી છે. વેન્ચુરીમીટરમાં ખાસ પ્રકારની વેન્ચુરી-ટ્યુબ સાથે મેનોમીટર જોડેલું છે. વેન્ચુરી ટ્યૂબનો સાંકડો ભાગ થ્રોટ તરીકે ઓળખાય છે.

પહોળા ભાગના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ‘A’ અને થ્રોટના આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ‘a’ છે. પહોળા ભાગ આગળ તરલનો વેગ v_1 અને થ્રોટ પાસે તેનો વેગ v_2 છે. આ સ્થાનો પર દબાણ P_1 અને P_2 છે. મેનોમીટરમાં રહેલા પ્રવાહીની ઘનતા ρ_2 અને જેનો વેગ માપવાનો છે, તે તરલની ઘનતા ρ_1 છે.



વેન્ચુરીમીટર

આકૃતિ 5.15

બિન્દુ ‘1’ અને ‘2’ માટે બર્નુલીનું સમીકરણ વાપરતાં,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_1 g v_2^2 + \rho_1 g y_2$$

બિન્દુ ‘1’ અને ‘2’ની સંદર્ભસપાટીથી ઊંચાઈ સરખી હોવાથી $y_1 = y_2$

$$\therefore P_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 = P + \frac{1}{2}\rho_1 g v_2^2$$

$$\therefore P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho_1(v_2^2 - v_1^2) \qquad (5.8.6)$$

અહીં મેનોમીટર માટે $P_1 - P_2 = (\rho_2 - \rho_1)gh$ (ઉદાહરણ 2 જુઓ)

$P_1 - P_2$ની આ કિંમત સમીકરણ 5.8.6માં મૂકતાં,

$$(\rho_2 - \rho_1)\, gh = \frac{1}{2}\rho_1(v_2^2 - v_1^2) \qquad (5.8.7)$$

પણ, $Av_1 = av_2$ ($\because$ સાતત્ય સમીકરણ)

$$\therefore v_2 = \frac{Av_1}{a}$$

v_2ની કિંમત સમીકરણ 5.8.7માં મૂકતાં,

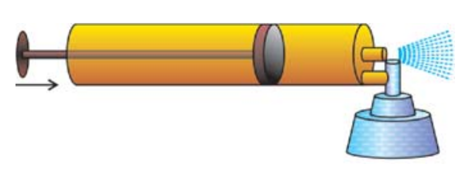
$$(\rho_2 - \rho_1)gh = \frac{1}{2}\rho_1\left(\frac{A^2}{a^2}\ v_1^2 - v_1^2\right)$$

$$\therefore v_1^2 = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)gh}{\rho_1} \cdot \frac{a^2}{A^2 - a^2}$$

$$\therefore v_1 = a\sqrt{\frac{2(\rho_2 - \rho_1)gh}{\rho_1(A^2 - a^2)}} \qquad (5.8.8)$$

કદ-ફ્લક્સ અથવા પ્રવાહદર શોધવા માટે $R = v_1 A$ અથવા $v_2 a$ શોધવું જોઈએ.

વાહનોના કાર્બ્યુરેટરમાં રહેલ વેન્ચુરી ચેનલમાંથી હવાનું વહન થાય છે. થ્રોટ પાસે દબાણ ઓછું હોવાથી બળતણ અંદર ખેંચાઈ આવે છે અને દહન માટે આવશ્યક પ્રમાણમાં હવા અને બળતણ પૂરાં પાડે છે.



સ્પ્રેપંપ

આકૃતિ 5.16

આકૃતિ 5.16માં દર્શાવેલ સ્પ્રેપંપમાં પણ આજ સિદ્ધાંતનો ઉપયોગ થાય છે. પિસ્ટનને ધક્કો મારતાં પંપના નાના કાણામાંથી વધુ ઝડપે હવા બહાર આવે છે. પરિણામે કાણા પાસે દબાણ ઓછું થાય છે. અને તેથી પ્રવાહી સાંકડી નળીમાંથી ઉપર તરફ ખેંચાઈ આવે છે અને હવા સાથે તેનો છંટકાવ થાય છે.

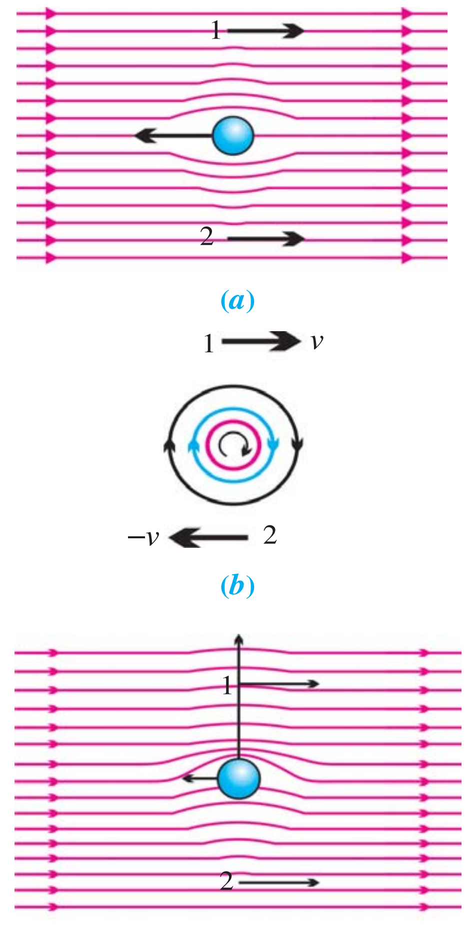
(2) ઊંડાઈ સાથે દબાણમાં થતો ફેરફાર : અગાઉ આપણે $P - P_a = h\rho g$ સમીકરણ મેળવ્યું છે. આ સમીકરણ બર્નુલીના સમીકરણની મદદથી પણ મેળવી શકાય. જો તરલ સ્થિર હોય તો $v_1 = v_2 = 0$, $P_2 = P_a$ (પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પરનું દબાણ, જુઓ આકૃતિ 5.6) જો ઊંચાઈનો તફાવત $y_2 - y_1 = h$ લેવામાં આવે, તો બર્નુલીના સમીકરણ પરથી $P_1 = P_a + \rho gh$.

(3) ડાયનેમિક લિફ્ટ (Dynamic Lift) અને સ્વિંગ-બૉલિંગ (Swing Bowling) : આપણે શીખી ગયાં કે જ્યારે કોઈ વસ્તુને તરલમાં મૂકવામાં આવે છે ત્યારે આર્કિમિડિઝના સિદ્ધાંત અનુસાર તેના પર ઉત્પ્લાવક બળ લાગે છે. આ બળને સ્ટેટીક લિફ્ટ (static lift) પણ કહે છે. હવે, જ્યારે વસ્તુ તરલની સાપેક્ષે ગતિ કરે ત્યારે એક બીજું બળ ઉદ્ભવે છે, જેને ડાયનેમિક લિફ્ટ કહે છે.

આ હકીકત સમજવા માટે આકૃતિ 5.17(*a*) ધ્યાનમાં લો. આકૃતિમાં હવામાં ગતિ કરતો એક દડો બતાવ્યો છે. આ દડાની સાપેક્ષમાં હવાની ધારારેખાઓ દડાને અનુલક્ષીને સંમિત છે. (કારણ કે દડો પોતે જ સંમિત છે.) બિંદુ 1 અને 2 પાસે હવાના વેગ એકસમાન છે. બર્નુલીના સમીકરણ અનુસાર 1 અને 2 પાસે દબાણ સરખાં થાય છે અને દડા પરનો ડાયનેમિક લિફ્ટ શૂન્ય બને છે.

હવે, આકૃતિ 5.17(*b*)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ધારો કે પુસ્તકના પાનને લંબ અને દડાના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી અક્ષને અનુલક્ષીને દડો સ્પિનગતિ કરે છે. દડો સંપૂર્ણ રીતે લીસો ન હોતાં તેની સાથે થોડી હવાને ઘસડે છે, જેને લીધે મળતી ધારારેખાઓ આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.

આકૃતિ 5.17(*c*)માં દડો જ્યારે સ્પિનગતિ અને રેખીય ગતિ એમ બંને ગતિ કરે ત્યારે તેની આસપાસ હવાની ધારારેખાઓ કેવી હોય તે દર્શાવ્યું છે. અહીં બિંદુ 1 પાસે ગીચ થઈ જતી ધારારેખાઓ વધારે વેગ અને ઓછું દબાણ સૂચવે છે, જ્યારે 2 પાસે ઓછો વેગ અને વધારે દબાણ હોય છે. પરિણામે દડા પર ઊર્ધ્વ દિશામાં ધક્કો લાગે છે. એટલે કે દડાને ડાયનેમિક લિફ્ટ મળે છે. આમ, આ રીતે સ્પિન કરી ફેંકેલો દડો તેના ગતિ પથ પર ધારણા કરતાં ઊંચો રહી જાય છે. (બૉલરે દડો સાથે છેડછાડ કરવા કેમ લલચાય છે તે હવે તમને સમજાયું હશે.)



(*a*)

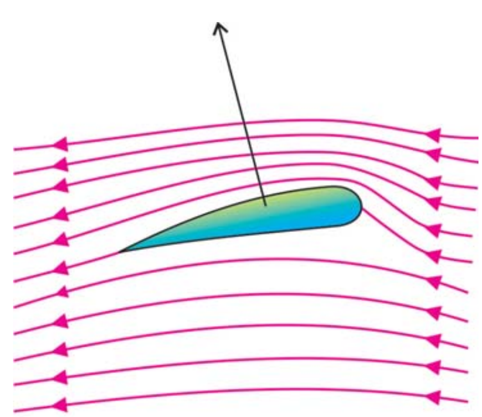
(*b*)

(*c*)

સ્પ્રેપંપ

આકૃતિ 5.17

હવે, જો પુસ્તકના પાનના સમતલમાં રહેલી અને દડાની રેખીય ગતિને લંબ એવી અક્ષની સાપેક્ષે દડાને સ્પિન કરતો ફેંકવામાં આવે, તો દડો ઑફ કે લેગ સ્ટમ્પ બાજુ વળે છે. ઝડપી બૉલિંગમાં સ્વિંગનું મુખ્ય કારણ આ છે.



ઍરોફૉઈલ

આકૃતિ 5.18

(4) ઍરોફૉઈલ : આકૃતિ 5.18માં દર્શાવ્યા મુજબના વિશિષ્ટ આકારના ઘન ટુકડાને ઍરોફૉઈલ કહે છે. તેના આ વિશિષ્ટ આકારના કારણે જ્યારે ઍરોફૉઈલ હવામાં સમક્ષિતિજ દિશામાં ગતિ કરતો હોય ત્યારે પણ ઊર્ધ્વ દિશામાં બળ લાગે છે. પરિણામે તે હવામાં તરી શકે છે.

વિમાનની પાંખનો આકાર (પાંખની લંબાઈને લંબ આડછેદનો આકાર) ઍરોફૉઈલ જેવો રાખવામાં આવે છે. આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ પાંખની આસપાસ હવાનું ધારારેખીય વહન થતું હોય છે. (જોકે વિમાનની પાંખ અને ગતિની દિશા વચ્ચેનો ખૂણો-angle of attack નાનો હોય ત્યારે જ ધારારેખી વહન શક્ય છે.) આકૃતિ 5.18માં પાંખની આસપાસની ધારારેખાઓ દર્શાવેલ છે. પાંખના ઉપરના ભાગની ગીચ ધારારેખાઓ વધારે વેગ અને ઓછું દબાણ દર્શાવે છે, જ્યારે પાંખની નીચેના ભાગની છૂટી ધારારેખાઓ ઓછો વેગ અને વધારે દબાણ દર્શાવે છે. દબાણના આ તફાવતના કારણે ઊર્ધ્વ દિશામાં બળ લાગે છે. આથી ગતિ કરતા વિમાન પરની ડાયનેમિક લિફ્ટને કારણે તે હવામાં તરી શકે છે.

ઉદાહરણ 3 : પાણીનું વહન કરતી નળીના એક છેડાનો વ્યાસ 2 cm અને બીજા છેડાનો વ્યાસ 3 cm છે. સાંકડા છેડા પાસે પાણીનો વેગ 2 ms^{-1} અને દબાણ 1.5×10^5 Nm^{-2} છે. જો નળીના પહોળા અને સાંકડા છેડા વચ્ચેનો ઊંચાઈનો તફાવત 2.5 m હોય, તો નળીના પહોળા છેડા પાસે પાણીનો વેગ અને દબાણ શોધો. (પાણીના ઘનતા 1×10^3 kg m^{-3} લો.) નળીનો સાંકડો છેડો વધુ ઊંચાઈએ લો.

ઉકેલ :

વહનનળીનો સાંકડો છેડો

$d_1 = 2$ cm

$\therefore r_1 = 1 \text{ cm} = 1 \times 10^{-2}$ m

$v_1 = 2$ ms^{-1}

$P_1 = 1.5 \times 10^5$ Nm^{-2}

વહનનળીનો પહોળો છેડો

$d_2 = 3$ cm

$\therefore r_2 = 1.5 \text{ cm} = 1.5 \times 10^{-2}$ m

$v_2 = ?$

$P_2 = ?$

$A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$\therefore v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$$

$$= \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} \cdot v_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot v_1$$

$$= \frac{(1 \times 10^{-2})^2}{(1.5 \times 10^{-2})^2} \times 2$$

$$= 0.89 \text{ ms}^{-1}$$

બર્નુલીના સમીકરણ મુજબ,

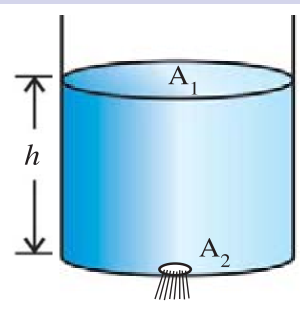
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_2$$

$$\therefore P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) + \rho g(y_1 - y_2)$$

$$= (1.5 \times 10^5) + \frac{1}{2} \times 1 \times 10^3 \times [(2)^2 - (089)^2] + 1 \times 10^3 \times 9.8 \times 2.5$$

$$P_2 = 1.76 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$$

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 5.19માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે મોટો આડછેદ A_1 ધરાવતા એક નળાકાર પાત્રમાં ρ જેટલી ઘનતા ધરાવતું પ્રવાહી ભરેલ છે. પાત્રના તળિયે A_2 જેટલા આડછેદનું ક્ષેત્રફળ ધરાવતું નાનું હોલ (છિદ્ર) છે. જ્યારે આડછેદ A_2 થી પ્રવાહીના સ્તંભની ઊંચાઈ h હોય ત્યારે તેમાંથી બહાર આવતા પ્રવાહીનો વેગ શોધો. (અહીં, $A_1 >> A_2$)



આકૃતિ 5.19

ઉકેલ : ધારો કે A_1 અને A_2 આડછેદો પાસે પ્રવાહીનો વેગ અનુક્રમે v_1 અને v_2 છે. બંને આડછેદ વાતાવરણમાં ખુલ્લા હોવાથી ત્યાં વાતાવરણના દબાણ P_a જેટલું જ દબાણ પ્રવર્તે છે. બંને આડછેદો માટે બર્નુલીનું સમીકરણ લાગુ પાડતાં,

$$\therefore P_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = P_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (1)$$

સાતત્યના સમીકરણ અનુસાર,

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

$$\therefore v_1 = \frac{A_2v_2}{A_1} \quad (2)$$

સમીકરણ (2)માંથી સમીકરણ (1)માં v_1નું મૂલ્ય મૂકતાં,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 + gh = \frac{1}{2}v_2^2$$

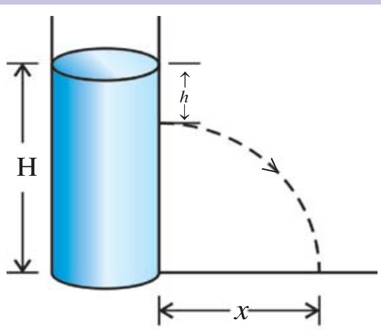
$$\therefore v_2^2 = \frac{2gh}{\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]} \cong 2gh$$

$$(\because A_2 << A_1)$$

$$\therefore v_2 = \sqrt{2gh}$$

નોંધ : પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીથી h ઊંડાઈએ રહેલા હોલમાંથી બહાર આવતા પ્રવાહીનો વેગ, તેટલી જ ઊંચાઈ પરથી મુક્તપતન કરતા કણના અંતિમ વેગ જેટલો હોય છે. આ વિધાનને ટોરીસિલિ(Torriceli)નો નિયમ કહે છે.

ઉદાહરણ 5 : આકૃતિ 5.20માં દર્શાવેલ એક પાત્રમાં H જેટલી ઊંચાઈ સુધી પાણી ભરેલ છે. પાણીની સપાટીથી h જેટલી ઊંડાઈએ પાત્રની દીવાલમાં એક હોલ પાડવામાં આવે છે. તો હોલમાંથી બહાર આવતી પાણીની ધાર જમીન પર દીવાલથી કેટલા સમક્ષિતિજ અંતરે પડતી હશે ? hના કયા મૂલ્ય માટે આ અંતર મહત્તમ થશે ? આ મહત્તમ અંતર શોધો.



આકૃતિ 5.20

ઉકેલ : પાણીની સપાટીથી h ઊંડાઈ પર રહેલા હોલમાંથી બહાર આવતા પાણીનો સમક્ષિતિજ દિશામાં વેગ

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

અહીં, બહાર આવતા પાણી પર માત્ર અધોદિશામાં પ્રવેગ (ગુરુત્વપ્રવેગ g) લાગતો હોવાથી સમક્ષિતિજ દિશામાં તે અચળ વેગથી ગતિ કરે છે અને અધોદિશામાં અચળ પ્રવેગી ગતિ કરે છે. (પ્રક્ષિપ્ત ગતિ જેવું)

ગતિનાં સમીકરણો પરથી,

અધોદિશામાં કપાયેલ અંતર, $H - h = \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$

જ્યાં, t = હોલમાંથી બહાર નીકળતા પાણીએ જમીન પર પહોંચવા લીધેલ સમય.

સમક્ષિતિજ દિશામાં કપાયેલ અંતર $x = vt \quad (3)$

સમીકરણ (1) અને (2)માંથી v અને tનાં મૂલ્યો સમીકરણ (3)માં મૂકતાં,

$$x = \sqrt{2gh}\left(\frac{2(H-h)}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (4hH - 4h^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= [H^2 - (H-2h)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

સમીકરણ (4) દર્શાવે છે કે $H = 2h$ માટે x મહત્તમ થાય.

$$\therefore h = \frac{H}{2}$$

આ માટે $h = \frac{H}{2}$ સમીકરણ (4)માં મૂકતાં,

$$\therefore x = H$$

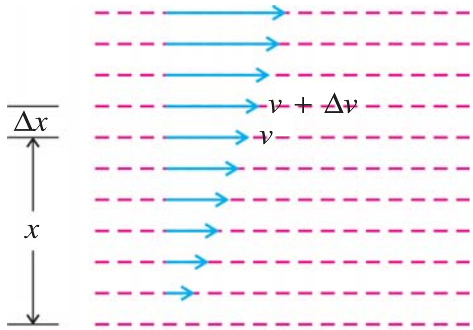
5.9 શ્યાનતા

આપણે જાણીએ છીએ કે પાણી કે કેરોસીન જેવાં પ્રવાહીઓ આસાનીથી વહી શકે છે, જ્યારે મધ કે દિવેલ (castor oil) જેવાં પ્રવાહીઓનું વહન આસાનીથી થતું નથી. જો બર્નુલીના સમીકરણમાં સમક્ષિતિજ પ્રવાહ માટે $y_1 = y_2$ મૂકીએ,

તો $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

આ સમીકરણ દર્શાવે છે કે સમક્ષિતિજ તરલ-વહન માટે અચળ ઝડપથી ($v_1 = v_2$) તરલના વહન માટે દબાણનો તફાવત જરૂરી નથી એટલે કે $P_1 = P_2$. પરંતુ વાસ્તવમાં આવું બનતું નથી. અચળ ઝડપથી તરલનું વહન શક્ય બનાવવા માટે દબાણનો તફાવત જરૂરી બને છે. આ દર્શાવે છે કે તરલના વહનનો વિરોધ કરતું બળ હોવું જ જોઈએ.

આ બાબત સમજવા માટે કોઈ સ્થિર સમક્ષિતિજ સપાટી પર તરલનો સ્થાયી પ્રવાહ ધ્યાનમાં લો.



સ્તરીય વહન
આકૃતિ 5.21

અહીં સપાટી અને પ્રવાહીના અણુઓ વચ્ચે લાગતાં આસક્તિ બળોને કારણે સપાટીના સંસર્ગમાં રહેલો પ્રવાહીનું સ્તર સપાટીને ચીટકી રહે છે. સૌથી ઉપરના સ્તરનો વેગ સૌથી વધુ હોય છે.

આકૃતિ 5.21માં પ્રવાહીના કેટલાક સ્તર અને તેમના વેગસદિશો દર્શાવ્યા છે. આમ, સ્થાયી પ્રવાહમાં પ્રવાહીના જુદા જુદા સ્તર એકબીજામાં ભળી ગયા સિવાય એકબીજા પર સરકે છે. આવા વહનને સ્તરીય વહન (laminar flow) કહે છે.

સ્તરીય વહનમાં તરલના કોઈ પણ બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ હોય છે. પરિણામે તેમની સંપર્કસપાટી પર સ્પર્શીય અવરોધક બળ ઉદ્ભવે છે. આવા આંતરિક અવરોધક બળને શ્યાનતાબળ (viscous force) કહે છે. તરલના જે ગુણધર્મને કારણે બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચેની સાપેક્ષ ગતિ અવરોધાય છે, તેને તરલની શ્યાનતા કહે છે. આથી જો સ્તરો વચ્ચેની સાપેક્ષ ગતિ જાળવી રાખવી હોય તો શ્યાનતાબળોને સમતોલે તેટલું ઓછામાં ઓછું બળ લગાડવું જરૂરી છે. આવાં બાહ્ય બળોની ગેરહાજરીમાં શ્યાનતા બળોને લીધે સ્તરો વચ્ચેની સાપેક્ષ ગતિ સમય જતાં મંદ પડે છે અને તરલ સ્થિર થઈ જાય છે. આ કારણને લીધે પ્યાલામાં રાખેલ દૂધ ચમચીથી હલાવ્યા પછી થોડી વારમાં સ્થિર થઈ જાય છે.

વેગપ્રચલન (Velocity gradient) : સ્તરીય વહનમાં વહનની દિશાને લંબ એવી દિશામાં એકબીજાથી એકમ અંતરે રહેલા બે સ્તરોના વેગના તફાવતને વેગપ્રચલન કહે છે.

આકૃતિ 5.21માં દર્શાવ્યા મુજબ એકબીજાથી Δx જેટલા અંતરે આવેલા બે સ્તરોના વેગમાં તફાવત Δv છે. આમ, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ વેગપ્રચલન થાય. જો Δx નું મૂલ્ય ખૂબ જ નાનું હોય

તો વેગપ્રચલન $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$ થાય.

સ્તરીય વહન માટે વેગપ્રચલન કોઈ પણ સ્તરો માટે સમાન હોય છે. તેનો એકમ s^{-1} છે.

હવે શ્યાનતા પર આપણું ધ્યાન ફરીથી કેન્દ્રિત કરીએ. અહીં શ્યાનતાબળ ગતિનો વિરોધ કરતું બળ છે. ન્યૂટનના પ્રાયોગિક કાર્ય અનુસાર અચળ તાપમાને શ્યાનતાબળનું મૂલ્ય નીચેના સૂત્રથી મળે.

$$F = \eta A \frac{dv}{dx} \qquad (5.9.1)$$

અહીં F શ્યાનતાબળ અને A બે સ્તર વચ્ચેની સંપર્ક સપાટીનું ક્ષેત્રફળ છે. η સપ્રમાણતાનો અચળાંક છે. જે શ્યાનતા-ગુણાંક તરીકે પણ ઓળખાય છે. ηનું મૂલ્ય તરલના પ્રકાર અને તાપમાન પર આધાર રાખે છે.

આમ, ηનું મૂલ્ય વધુ હોય તો શ્યાનતાબળનું મૂલ્ય વધુ હોય છે, અને તેને કારણે તરણનું વહન ધીમું થાય છે. આમ, શ્યાનતા-ગુણાંક તરલની શ્યાનતાનું માપ છે. વળી, η નું મૂલ્ય પ્રવાહીમાં તાપમાન સાથે ઘટે છે જ્યારે વાયુમાં તેનું મૂલ્ય તાપમાન સાથે વધે છે. સમીકરણ 5.9.1 પરથી,

$$\eta = \frac{F}{A\frac{dv}{dx}}$$

જો A = 1 એકમ અને $\frac{dv}{dx} = 1$ એકમ લેવામાં આવે

તો, η = F

આમ, **"સ્તરીય વહનમાં તરલના કોઈ પણ બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચે એકમ વેગપ્રચલન અને એકમ સંપર્ક-ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉદ્ભવતા શ્યાનતાબળને તરલનો શ્યાનતા-ગુણાંક કહે છે."**

શ્યાનતા-ગુણાંકનો CGS એકમ dyne s cm^{-2}, છે અને તે તબીબ અને ભૌતિકવિજ્ઞાની Jean Lois Poiseuilleની સ્મૃતિમાં 'poise' તરીકે ઓળખાય છે. તેનો SI એકમ N s m^{-2} અથવા Pa s છે. તેનું પારિમાણિક સૂત્ર $M^1L^{-1}T^{-1}$.

કેટલાક તરલ માટે શ્યાનતા-ગુણાંકનાં મૂલ્યો નીચે ટેબલ 5.2માં આપ્યા છે.

ટેબલ 5.2
તરલના શ્યાનતા-ગુણાંક (માત્ર જાણકારી માટે)

તરલ	તાપમાન	શ્યાનતા-ગુણાંક ($N\ s\ m^{-2}$)
પાણી	20°C	1×10^{-3}
	100°C	2.8×10^{-4}
હવા	0°C	1.71×10^{-5}
	340°C	1.9×10^{-5}
લોહી	38°C	1.5×10^{-3}
તલનું તેલ		4.0×10^{-2}
એન્જિન ઑઈલ	16°C	1.13×10^{-1}
	38°C	3.4×10^{-2}
મધ		2.0×10^{-1}
પાણીની બાષ્પ	100°C	1.25×10^{-5}
ગ્લિસરીન	20°C	8.30×10^{-1}
એસિટોન	25°C	3.6×10^{-4}

ઉદાહરણ 6 : $10^{-2}\ m^2$ ક્ષેત્રફળ ધરાવતી ધાતુની એક તકતી 2×10^{-3} m જાડાઈના તેલના સ્તર પર મૂકી છે. તેલનો શ્યાનતા-ગુણાંક $1.55\ N\ s\ m^{-2}$ હોય, તો તકતીને $3 \times 10^{-2}\ ms^{-1}$ ના વેગથી ગતિ કરાવવા માટે જરૂરી સમક્ષિતિજ (સ્પર્શીય) બળની ગણતરી કરો.

ઉકેલ :

$A = 10^{-2}\ m^2$

$\Delta v = 3 \times 10^{-2}\ ms^{-1}$

$\Delta x = 2 \times 10^{-3}$ m

$\eta = 1.55\ N\ s\ m^{-2}$

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= 1.55 \times 10^{-2} \times \frac{3 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-3}}$$

$$\therefore F = 2.32 \times 10^{-1}\ N$$

ઉદાહરણ 7 : એક નળીમાં વહેતા પ્રવાહીના અક્ષથી 0.8 cm અને 0.82 cm અંતરે રહેલા બે નળાકાર સ્તરોના વેગ અનુક્રમે 3 cm s^{-1} અને 2.5 cm s^{-1} છે. જો નળીની લંબાઈ 10 cm હોય અને પ્રવાહીનો શ્યાનતા-ગુણાંક 8 પોઇસ હોય, તો આ બે સ્તરો વચ્ચે લાગતું શ્યાનતાબળ શોધો.

ઉકેલ :

$r_1 = 0.8$ cm

$r_1 = 0.82$ cm

$\Delta v = 3 - 2.5 = 0.5$ cm s^{-1}

Δx = બે સ્તરો વચ્ચેનું અંતર

= 0.02 cm

L = 10 cm

A = સ્તરોનું સંપર્ક ક્ષેત્રફળ

$$= 2\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)L$$

η = 8 પોઇસ

$$F_v = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= \eta\left[2\pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)L\right]\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$= 8\left[2 \times 3.14\left(\frac{0.8 + 0.82}{2}\right)10\right]\frac{0.5}{0.02}$$

$$= 16 \times 3.14 \times 0.81 \times 10 \times \frac{0.5}{0.02}$$

= 10173.6 dyne

5.10 સ્ટોક્સનો નિયમ (Stokes' Law)

જ્યારે કોઈ વસ્તુ શ્યાન માધ્યમમાં ગતિ કરે ત્યારે વસ્તુના સંપર્કમાં રહેલા માધ્યમના સ્તર તેની સાથે ઘસડાય છે. તેથી આ સ્તર વસ્તુના વેગ જેટલા જ વેગથી ગતિ કરે છે. પરંતુ વસ્તુથી અતિ દૂરનો સ્તર સ્થિર રહે છે. આમ, વસ્તુ અને અતિ દૂરના સ્થિર સ્તર વચ્ચેના વિસ્તારમાં સ્તરીય વહન ઉદ્‌ભવે છે. અહીં પણ માધ્યમના બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચે શ્યાનતાબળ ઉદ્‌ભવે છે, જે આખરે માધ્યમમાં ગતિ કરતાં પદાર્થ પરના અવરોધક બળમાં પરિણમે છે. સ્ટોક્સ નામના વિજ્ઞાનીએ દર્શાવ્યું કે,

η જેટલો શ્યાનતા-ગુણાંક ધરાવતા મોટા વિસ્તારવાળા શ્યાન માધ્યમમાં v જેટલા વેગથી ગતિ કરતી r ત્રિજ્યાવાળી નાની લીસી ગોળાકાર ઘન વસ્તુ પર લાગતું ગતિ અવરોધક બળ, (શ્યાનતાબળ)

$$F(v) = 6\pi\eta v \quad (5.10.1)$$

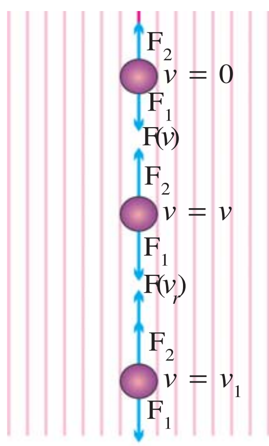
હોય છે. આ સૂત્રને સ્ટોક્સનો નિયમ કહે છે.

સ્ટોક્સનો નિયમ વેગ આધારિક બળનું એક રસપ્રદ ઉદાહરણ છે. માધ્યમમાં ગતિ કરતી વસ્તુ પર વસ્તુના વેગને સમપ્રમાણમાં ગતિ વિરુદ્ધ બળ લાગે છે.

તરલમાં ગોળાની ગતિ અને ટર્મિનલ વેગ (Motion of the sphere in a fluid and terminal velocity) :

આકૃતિ 5.22માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે r ત્રિજ્યા ધરાવતો, ρ જેટલી દ્રવ્યની ઘનતા ધરાવતો એક નાનો લીસો ઘન ગોળો તરલમાં ધારો કે શૂન્ય વેગ સાથે ગતિ શરૂ કરે છે. તરલનો શ્યાનતા-ગુણાંક η તથા ઘનતા ρ_o છે. અહીં $\rho > \rho_o$ છે.

આકૃતિ 5.22માં ગતિ દરમિયાન ત્રણ જુદી-જુદી ક્ષણે ગોળા પર લાગતાં બળો દર્શાવ્યાં છે. આ બળો નીચે પ્રમાણે છે : (1) ગોળાનું વજન F_1 (અધોદિશામાં) (2) તરલ ઉત્પ્લાવક બળ, F_2 (ઊર્ધ્વ દિશામાં) (3) ગતિ-અવરોધક બળ $F(v)$ (ઊર્ધ્વ દિશામાં).



શ્યાન-માધ્યમમાં નાની લીસી ગોળાકાર વસ્તુનું પતન

આકૃતિ 5.22

(1) ગોળાનું કદ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ ગોળાનું દળ $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$

$\therefore$ ગોળાનું વજન $F_1 = mg = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g$

(2) તરલનું ઉત્પ્લાવક બળ ગોળા વડે વિસ્થાપિત થયેલા તરલના વજન જેટલું હોય છે. ગોળા વડે વિસ્થાપિત થયેલા તરલનું કદ,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$\therefore$ ગોળા વડે વિસ્થાપિત થયેલા તરલનું દળ

$$m_o = V\rho_o = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_o$$

$\therefore$ ગોળા વડે વિસ્થાપિત થયેલા તરલનું વજન $= m_o g$ $= \frac{4}{3}\pi r^3\rho_o g.$

$\therefore$ ઉત્પ્લાવક બળ $F_2 = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_o g$ (5.10.3)

(3) સ્ટોક્સના નિયમ પ્રમાણે ગતિ અવરોધક બળ $F(v) = 6\pi\eta rv$ (5.10.4)

$\therefore$ ગોળા પર લાગતું પરિણામી બળ

$F = F_1 - F_2 - F(v)$

$$\therefore F = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_o g - 6\pi\eta rv \quad (5.10.5)$$

સમીકરણ 5.10.5 ગોળાની ગતિનું સમીકરણ દર્શાવે છે.

$t = 0$ સમયે તરલમાં ગોળાની ગતિ શરૂ થાય ત્યારે ગોળાનો વેગ $v = 0$ છે. તેથી આ વખતે ગતિ-અવરોધક બળ $F(v) = 0$ થશે.

$$\therefore F = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_o g = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_o) \quad (5.10.6)$$

જો $t = 0$ સમયે ગોળાનો પ્રવેગ a_o હોય, તો

$$F = ma_o = \frac{4}{3}\pi r^3\rho a_o \quad (5.10.7)$$

(5.10.6) અને (5.10.7) સરખાવતાં,

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho a_o = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_o)$$

$$a_o = \frac{\rho - \rho_o}{\rho} \quad (5.10.8)$$

ગોળો તરલમાં પ્રવેગી ગતિ શરૂ કરે છે. સમય જતાં ગોળાનો વેગ જેમજેમ વધતો જાય છે, તેમતેમ તેના પર ઊર્ધ્વ દિશામાં લાગતું ગતિ-અવરોધક બળ વધતું જાય છે. F_1 અને F_2 બળો અચળ છે. તેથી પરિણામી બળ અને તેથી પ્રવેગ ઘટતો જાય છે. આમ, ગોળાનો વેગ વધતો જાય છે અને પ્રવેગ ઘટતો જાય છે. જ્યારે $F_1 = F_2 + F(v)$ થાય ત્યારે ગોળા પર લાગતું પરિણામી બળ શૂન્ય બને છે અને તેથી પ્રવેગ પણ શૂન્ય થાય છે. આ ક્ષણથી ગોળો અચળ વેગથી ગતિ શરૂ કરે છે. આ વેગને ગોળાનો ટર્મિનલ વેગ (terminal velocity) v_t કહે છે. હવે પછીની સમગ્ર ગતિ દરમિયાન ગોળાનો વેગ અચળ જળવાઈ રહે છે. ગોળો ટર્મિનલ વેગ પ્રાપ્ત કરે ત્યારે સમીકરણ (5.10.8) $F = 0$ અને $v = v_t$ થશે.

$$\therefore\ 0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_o g - 6\pi\eta r v_t$$

$$\therefore\ 6\pi\eta r v_t = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_o)$$

$$\therefore\ v_t = \frac{2}{9}\ \frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho_o) \qquad (5.10.9)$$

ગોળાને તરલમાં મુક્ત પતન કરાવી તેનો ટર્મિનલ વેગ પ્રાયોગિક રીતે માપી લેવામાં આવે, તો સમીકરણ (5.10.9)નો ઉપયોગ કરી તરલનો શ્યાનતા-ગુણાંક શોધી શકાય છે.

પ્રવાહીમાં રચાતા હવાના પરપોટાને હવાનો ગોળો ગણી શકાય. આ કિસ્સામાં $\rho_o > \rho$ થાય છે. પરિણામે પ્રારંભથી જ $F_1 < F_2$ થતા પરપોટાને ઊર્ધ્વ દિશામાં પ્રવેગ મળે છે. પરિણામે તે પ્રવાહીમાં ઊંચે ચડે છે અને અમુક સમય પછી ટર્મિનલ વેગ પ્રાપ્ત કરે છે. આ અંતિમ વેગ સમીકરણ (5.10.9)નો ઉપયોગ કરી શોધી શકાય છે. અહીં v_t ઋણ મળે છે જે સૂચવે છે કે પરપોટાનો ટર્મિનલ વેગ ઊર્ધ્વ દિશામાં છે. સોડાવૉટરની બૉટલમાં ઊંચે ચઢતા પરપોટા તમે જોયાં હશે.

ઉદાહરણ 8 : સમાન કદના વરસાદનાં બે ટીપાં હવામાં 10 cm s^{-1}ના અંતિમ વેગથી ગતિ કરતાં-કરતાં એકબીજાંમાં ભળી જઈ એક મોટું ટીપું બનાવે છે, તો આ મોટા ટીપાનો અંતિમ વેગ શોધો.

ઉકેલ :

બંને ટીપાંની ત્રિજ્યા ધારો કે r અને કદ V છે. જ્યારે તે બંને એકત્ર થઈ એક ટીપું બનાવે ત્યારે (કુલ દળ અને ઘનતા અચળ હોવાથી) તે નવા ટીપાનું કદ V' તે દરેકના કદ કરતાં બમણું થશે.

ધારો કે નવા ટીપાની ત્રિજ્યા R છે.

હવે, $V' = 2V$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$R^3 = 2r^3$$

$$\therefore\ R = (2^{\frac{1}{3}})r$$

નાના ટીપાનો ટર્મિનલ વેગ v અને મોટા ટીપાનો ટર્મિનલ વેગ v' કહીએ, તો

$$v = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho_o) \text{ અને}$$

$$v' = \frac{2}{9}\frac{R^2 g}{\eta}(\rho - \rho_o)$$

$$\therefore\ \frac{v'}{v} = \frac{R^2}{r^2}$$

$$\therefore\ v' = v\frac{R^2}{r^2} = 10(2^{\frac{1}{3}})^2 = 15.87 \text{ cm s}^{-1}$$

5.11 રેનોલ્ડ્-અંક અને ક્રાંતિવેગ (Reynold's Number and Critical Velocity)

નળીમાંથી વહેતા તરલનું વહન ધારારેખી કે વમળયુક્ત કે મિશ્ર પ્રકારનું હોઈ શકે. શ્યાનતા-ગુણાંકના લગભગ બધા જ પ્રયોગો વહન ધારારેખી હોવું જરૂરી છે. આથી કયા સંજોગોમાં ધારારેખી વહન મળે તે જાણવું જરૂરી છે.

બ્રિટિશ ગણિતશાસ્ત્રી અને ભૌતિકવિજ્ઞાની ઓસબોર્ન રેનોલ્ડ્ઝે દર્શાવ્યું કે નળીમાંથી વહેતા તરલના વહનનો પ્રકાર નીચેની બાબતો પર આધારિત છે : (1) તરલનો શ્યાનતા-ગુણાંક (η) (2) તરલની ઘનતા (ρ) (3) તરલનો સરેરાશ વેગ (v) (4) નળીનો વ્યાસ (D)

આ ચાર ભૌતિક રાશિના સમન્વયથી બનતા અંકને N_Rને રેનોલ્ડ્ઝ-અંક કહે છે.

$$\text{રેનોલ્ડ્ઝ અંક } N_R = \frac{\rho v D}{\eta} \qquad (5.11.1)$$

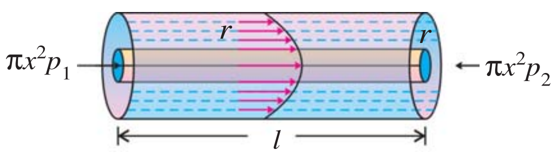
N_Rનું મૂલ્ય તરલ વહનના પ્રકાર પર આધાર રાખે છે. N_R પરિમાણરહિત અંક છે. પ્રયોગો દર્શાવે છે કે જો $N_R < 2000$ હોય, તો વહન ધારારેખી વહન હોય છે. જો $N_R > 3000$ તો તરલ વહન વમળયુક્ત હોય છે અને જે $2000 < N_R < 3000$ હોય, તો તરલ વહન અસ્થિર હોય છે અને વહનનો પ્રકાર બદલાતો જાય છે.

ક્રાંતિ વેગ (Critical Velocity) : સમીકરણ 5.11.1 પરથી સ્પષ્ટ છે કે વેગ વધવા સાથે રેનોલ્ડ્ઝ-અંકનું મૂલ્ય વધે છે. વેગના જે મહત્તમ મૂલ્ય સુધી તરલ વહન ધારા રેખી રહે તે વેગના મૂલ્યને ક્રાંતિવેગ કહે છે. ક્રાંતિવેગને અનુસંગત રેનોલ્ડ્ઝ અંકના મૂલ્યને ક્રિટીકલ રેનોલ્ડ્ઝ-અંક કહે છે.

એ સ્પષ્ટ છે કે જો $\eta = 0$ (એટલે કે અશ્યાન તરલ માટે) N_R નું મૂલ્ય અનંત બને. આમ અશ્યાન તરલનું વહન કદી ધારારેખીય ન હોઈ શકે.

ઉદાહરણ 9 : આકૃતિ 5.23માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, નિયમિત આંતરિક ત્રિજ્યા r ધરાવતી l લંબાઈની એક નળીમાં η જેટલો શ્યાનતા-ગુણાંક ધરાવતા એક તરલનું સ્તરીય વહન થઈ રહ્યું છે. નળીમાં આવું વહન જાળવી

રાખવા માટે શ્યાનતાબળને સમતોલતું બળ, નળીના બે છેડે દબાણનો તફાવત (p) ઉત્પન્ન કરીને મેળવવા આવે છે. તો નળીના અક્ષથી 'x' અંતરે રહેલા સ્તરના વેગનું સૂત્ર $v = \frac{p}{4\eta l}(r^2 - x^2)$ મેળવો.



આકૃતિ 5.23

ઉકેલ : આકૃતિ 5.23માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે x જેટલી ત્રિજ્યાવાળો અક્ષ પરનો પ્રવાહીનો નળાકાર ધ્યાનમાં લો. તેના પર લાગતાં બળો નીચે મુજબ છે :

(1) દબાણના તફાવત p વડે ઉદ્‌ભવતું બળ, $F_1 = \pi x^2 p$

(2) શ્યાનતાબળ, $F_2 = \eta A \frac{dv}{dx}$

$$= \eta(2\pi x l)\left(-\frac{dv}{dx}\right)$$

જ્યાં, A = વિચારેલ નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi x l$

અત્રે, x વધતાં v ઘટતો હોવાથી વેગ-પ્રચલન ઋણ લીધેલ છે. અહીં, નળાકારના અચળવેગી વહન માટે

$F_1 = F_2$

$$\therefore \pi x^2 p = -\eta \cdot 2\pi x l \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore -dv = \frac{p}{2\eta l}\, x\, dx$$

$x = r$ પર વેગ $v = 0$ છે અને $x = x$, $v = v$ હોવાથી આ limitsમાં સંકલન કરતાં

$$-\int_v^0 dv = \int_x^r \frac{p}{2\eta l}\, x\, dx$$

$$\therefore -[v]_v^0 = \frac{p}{4\eta l}\left[x^2\right]_x^r$$

$$\therefore -[0 - v] = \frac{p}{4\eta l}[r^2 - x^2]$$

$$\therefore v = \frac{p}{4\eta l}(r^2 - x^2)$$

ઉદાહરણ 10 : ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણમાં નળીમાંથી દર સેકન્ડે વહેતા પ્રવાહીનું કદ શોધો. [**Hint :** નળીમાંથી વહેતા પ્રવાહીનો વેગ તેની અક્ષ અને દીવાલ પાસેના વેગોના સરેરાશ જેટલો લો.]

ઉકેલ :

$$v = \frac{p}{4\eta l}(r^2 - x^2)$$

$\therefore$ અક્ષ ($x = 0$), પર વેગ $v = \frac{pr^2}{4\eta l}$

દીવાલ ($x = r$), પર વેગ $v = 0$

$\therefore$ સરેરાશ વેગ $= \frac{pr^2}{8\eta l}$

હવે, નળીમાંથી દર સેકન્ડે વહેતા પ્રવાહીનું કદ

V = (વેગ) (આડછેદનું ક્ષેત્રફળ)

$$= \left(\frac{pr^2}{8\eta l}\right)(\pi r^2)$$

$$\therefore V = \frac{\pi p r^4}{8\eta l}$$

[**નોંધ :** આ સમીકરણને Poiseuilleનો નિયમ કહે છે.]

ઉદાહરણ 11 : એક પાઇપલાઇનના આડછેદની ત્રિજ્યા $r = r_0 e^{-\alpha x}$; સૂત્ર પ્રમાણે ઘટતી જાય છે, જ્યાં $\alpha = 0.50\ m^{-1}$ અને x એ પાઇપલાઇનના પ્રથમ છેડાથી ($x = 0$)થી આડછેદનું અંતર છે, તો એકબીજાથી 2 m જેટલા અંતરે રહેલા બે આડછેદ માટે રેનોલ્ડ્ઝ-અંકનો ગુણોત્તર શોધો. ($e = 2.718$ લો.)

ઉકેલ : રેનોલ્ડ્ઝ-અંક $N_R = \frac{\rho v D}{\eta}$

$\therefore$ આપેલ પ્રવાહી માટે $N_R \propto vD$

$$\therefore \frac{(N_R)_1}{(N_R)_2} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{D_1}{D_2} \quad (1)$$

સાતત્યના સમીકરણ પરથી,

$A_1 v_1 = A_2 v_2$

$\therefore \pi r_1^2 v_1 = \pi r_2^2 v_2$

$$\therefore \frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$\frac{(N_R)_1}{(N_R)_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \times \frac{D_1}{D_2} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_0 e^{-\alpha x_2}}{r_0 e^{-\alpha x_1}}$$

$$\frac{(N_R)_1}{(N_R)_2} = e^{-\alpha(x_2 - x_1)} = e^{-(0.5)(2)} = e^{-1}$$

$$= 0.368$$

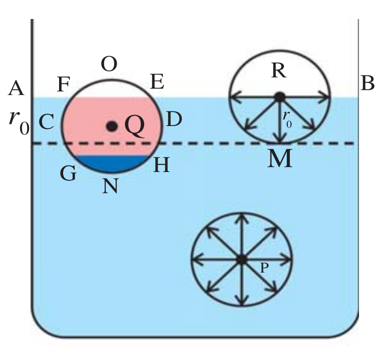
5.12 પૃષ્ઠ-ઊર્જા અને પૃષ્ઠતાણ (Surface Energy and Surface Tension)

આપ સૌએ એક બાબતની નોંધ લીધી હશે કે પાણીથી કાચ ભીંજાય છે, પણ કમળ કે તેનું પર્ણ નહીં. દીવામાં તેલ ગુરુત્વાકર્ષણ વિરુદ્ધ ઉપર ચઢે છે. પાણી પર અમુક કિટકો ચાલી શકે છે. જો પૂરતી કાળજી લેવામાં આવે, તો પાણી પર સમક્ષિતિજ મૂકેલ સોય પાણી પર તરે છે. આવી ઘટનાઓ માટે પ્રવાહીનો પૃષ્ઠતાણ નામનો ગુણધર્મ જવાબદાર છે. પૃષ્ઠતાણને કારણે પ્રવાહી એક ખેંચી રાખેલા પડની જેમ વર્તે છે. પૃષ્ઠતાણ માત્ર પ્રવાહીનો ગુણધર્મ છે.

5.12.1 પૃષ્ઠ-ઊર્જા (Surface energy) :

એક જ દ્રવ્યના અણુઓ વચ્ચે લાગતા આકર્ષણબળને **સંસક્તિ (cohesive) બળ** અને જુદાં-જુદાં દ્રવ્યના અણુઓ વચ્ચે લાગતા આકર્ષણબળને **આસક્તિ (adhesive) બળ** કહે છે.

જે ગુરુતમ અંતર સુધી બે અણુઓ એકબીજા પર આકર્ષણબળ લગાડી શકે તે અંતરને અણુઓની **અણુક્રિયા-અવધિ** કહે છે. અણુને કેન્દ્ર તરીકે લઈ અણુક્રિયા-અવધિ જેટલી ત્રિજ્યાનો ગોળો વિચારીએ, તો તેને તે અણુનો **અણુક્રિયા-ગોળો** કહે છે. આવા ગોળાની અંદર રહેલા અણુઓ જ કેન્દ્ર પર રહેલા અણુ પર આકર્ષણબળ લગાડી શકે છે. ગોળાની બહાર રહેલા અણુઓ કેન્દ્ર પર રહેલા અણુ પર આકર્ષણબળ લગાડી શકતા નથી.



અણુક્રિયા-ગોળાઓ
આકૃતિ 5.24

આંતર-અણુબળોને લીધે ઉદ્‌ભવતી પૃષ્ઠ-અસર સમજવા માટે આકૃતિ 5.23માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે એક પ્રવાહીમાંના ત્રણ અણુઓ P, Q, અને R તેમના અણુક્રિયા ગોળાઓ સાથે ધ્યાનમાં લો.

ધારો કે અણુક્રિયા-અવધિ r_0 છે. AB પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી દર્શાવે છે. P અણુનો અણુક્રિયા-ગોળો પ્રવાહીમાં સંપૂર્ણપણે ડૂબેલો છે. તેથી તે સમાન રીતે પ્રવાહીના અણુઓથી ભરાયેલો છે. પરિણામે P અણુ પર બધી જ દિશાઓમાંથી એકસરખું આકર્ષણબળ લાગે છે. તેથી તેના પર લાગતું પરિણામી બળ શૂન્ય થાય છે અને તે સંતુલનમાં રહે છે. પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીથી r_0 કરતાં વધારે ઊંડાઈએ આવેલા બધા જ અણુઓની પરિસ્થિતિ આવી હોય છે.

હવે r_0 કરતાં ઓછી ઊંડાઈએ આવેલા અણુ Q અને તેના અણુક્રિયા-ગોળાને ધ્યાન પર લો. આ અણુક્રિયા-ગોળાનો FOEF ભાગ પ્રવાહીની બહાર છે. આ ભાગમાં હવા અને બાષ્પના અણુઓ રહેલા હોય છે. હવા અને પ્રવાહીની બાષ્પની ઘનતા પ્રવાહીની ઘનતાં કરતાં ઘણી ઓછી હોય છે. ઉપરાંત હવા અને પ્રવાહીના અણુઓ વચ્ચેનાં આસક્તિબળો પ્રમાણમાં નબળાં હોય છે. આથી GNHG ભાગમાંના પ્રવાહીના અણુઓ વડે Q પર લાગતું અધોદિશામાંનું સમાસબળ પ્રવાહીની બહાર રહેલા તેના જેવા જ FOEF ભાગમાંના હવા અને બાષ્પના અણુઓ વડે લાગતા ઊર્ધ્વ દિશામાંના સમાસબળ કરતાં વધારે હોય છે. અણુક્રિયા-ગોળાના CDHG અને CDEF ભાગોમાં તો પ્રવાહીના અણુઓની સંખ્યા સમાન છે. પરિણામે તે ભાગોમાંના અણુઓ વડે Q પર લાગતું સમાસબળ શૂન્ય હોય છે. આમ, Q અણુ પર સમાસ આંતર-અણુબળ અધોદિશામાં લાગે છે. **મુક્ત સપાટીથી r_0 જેટલી જાડાઈના સ્તરને પ્રવાહીનું પૃષ્ઠ કહે છે.** આમ, પ્રવાહીના પૃષ્ઠમાં રહેલા અણુઓ પર અધોદિશામાં સમાસબળ લાગે છે. પૃષ્ઠમાં જેમ-જેમ ઉપર આવતાં જઈએ તેમ આ સમાસબળનું મૂલ્ય વધતું જાય છે. મુક્ત સપાટી AB પરના અણુઓ માટે તે મહત્તમ હોય છે. આથી પ્રવાહીના પૃષ્ઠમાં રહેલા અણુઓ પ્રવાહીની અંદર જવાનું વલણ ધરાવે છે.

આ સંજોગોમાં કેટલાક અણુઓ પ્રવાહીની અંદર (પૃષ્ઠ નીચે) જવા શક્તિમાન પણ બને છે. આમ થતાં પૃષ્ઠની નીચે પ્રવાહીની ઘનતા વધી જાય છે અને અમુક કરતાં વધારે અણુઓ પૃષ્ઠની નીચે જઈ શકતા નથી. પરિણામે પ્રવાહીના પૃષ્ઠ નીચે પ્રવાહીની ઘનતા વધારે હોય છે. જ્યારે

પૃષ્ઠમાં ઉપર જઈ એ તેમ ક્રમશઃ તે ઘટતી જાય છે. બીજી રીતે કહીએ, તો પ્રવાહીમાં તેના પૃષ્ઠની નીચે આંતર-અણુ-અંતરો ઓછાં હોય છે. જ્યારે પૃષ્ઠમાં તે વધારે હોય છે. હવે આંતર-અણુબળોને આંતર-અણુ-અંતરોના વિધેય તરીકે લઈને સાબિત કરી શકાય છે કે, પૃષ્ઠમાં આંતર-અણુ-અંતરો વધારે હોવાથી તેમાં રહેલા પ્રવાહીના અણુઓ વચ્ચે પૃષ્ઠને સમાંતર ખેંચાણબળ ઉદ્ભવે છે.

આથી પ્રવાહીનું પૃષ્ઠ ખેંચાયેલી સ્થિતિસ્થાપક કપોટી (film)ની માફક સંકોચાવાનું વલણ ધરાવે છે. તેમાં પૃષ્ઠને સમાંતર તણાવબળ પ્રવર્તતું હોય છે. આ તણાવબળનું માપ પૃષ્ઠતાણ નામની ભૌતિક રાશિ વડે આપવામાં આવે છે.

પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પર કલ્પેલી એકમલંબાઈની રેખાની એક બાજુ પર રહેલા પ્રવાહીના અણુઓ રેખાની બીજી બાજુ પર રહેલા અણુઓ પર, રેખાને લંબ અને સપાટીને સમાંતર જે બળ લગાડે છે તેને પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ કહે છે.

$$\therefore \text{ પૃષ્ઠતાણ } T = \frac{F}{L} \qquad (5.12.1)$$

$$\therefore F = TL \qquad (5.12.2)$$

પૃષ્ઠતાણનો એકમ $N\ m^{-1}$ છે.

યાદ રાખો કે પૃષ્ઠતાણનું બળ પ્રવાહીની સપાટી પરના અણુઓ વચ્ચે લાગતું સમાસ-આંતર-અણુબળ નથી. સપાટી પર રહેલા અણુઓ પર લાગતાં સમાસ-આંતર-અણુબળો તો સપાટીને લંબરૂપે પ્રવાહીની અંદર તરફ હોય છે. જ્યારે પૃષ્ઠતાણનું બળ સપાટીને સમાંતર હોય છે.

જો એકમલંબાઈની રેખા સપાટીના મધ્ય ભાગમાં કલ્પવામાં આવે, તો તેની બંને બાજુના અણુઓ એકબીજા પર સમાન મૂલ્યના પરંતુ પરસ્પર વિરુદ્ધ દિશાનાં બળો લગાડતાં હોવાથી સપાટીના મધ્ય ભાગમાં પૃષ્ઠતાણનું બળ અસરકારક જણાતું નથી. સપાટીના કિનારીની બીજી બાજુ પ્રવાહીના અણુઓ ન હોવાથી કિનારી પર પૃષ્ઠતાણનું બળ સપાટીને સમાંતર અને કિનારીને લંબ અંદર તરફનું અનુભવાય છે.

સ્થિતિ-ઊર્જાના સંદર્ભમાં પૃષ્ઠતાણ

આપણે જોયું કે પ્રવાહીના પૃષ્ઠમાં રહેલા અણુઓ પ્રવાહીની અંદર જવાનું વલણ ધરાવે છે. આ વલણ અણુઓની સ્થિતિ-ઊર્જાના સંદર્ભમાં પણ સમજી શકાય છે. આકૃતિ 5.24માં જો P જેવા અણુને પૃષ્ઠમાં લાવવો હોય તો તે પૃષ્ઠમાં જેટલું અંતર (ઊર્ધ્વ દિશામાં) કાપે તે દરમિયાન તેના પર અધોદિશામાં લાગતા બળની વિરુદ્ધ કાર્ય કરવું પડે છે. આથી આવો અણુ પૃષ્ઠમાં આવે ત્યારે સ્થિતિ-ઊર્જા પ્રાપ્ત કરે છે. આ હકીકત દર્શાવે છે કે પૃષ્ઠમાં રહેલા અણુઓની સ્થિતિ-ઊર્જા પૃષ્ઠની નીચે રહેલા અણુઓની સ્થિતિ-ઊર્જા કરતાં વધારે હોય છે. **હવે, કોઈ પણ તંત્ર પોતાની સ્થિતિ-ઊર્જા લઘુતમ રહે તેવી સ્થિતિમાં રહેવા હંમેશાં પ્રયત્ન કરે છે.** આથી, પૃષ્ઠમાંના અણુઓ પોતાની સ્થિતિ-ઊર્જા ઘટાડવાનું વલણ ધરાવે છે અને પ્રવાહીનું પૃષ્ઠ પોતાનું ક્ષેત્રફળ લઘુતમ બને તે રીતે સંકોચાવાનું વલણ ધરાવે છે.

પૃષ્ઠતાણનું મૂલ્ય અણુઓની સ્થિતિ-ઊર્જાના સંદર્ભમાં પણ માપી શકાય છે. આપણે જોયું કે અણુઓને પ્રવાહીની અંદરની સપાટી પર લાવવા માટે કાર્ય કરવું પડે છે જે તેમાં સ્થિતિ-ઊર્જાના રૂપમાં સંગ્રહ પામે છે. નોંધનીય વાત તો એ છે કે આ રીતે સપાટી પર આવતો અણુ સપાટી પર રહેલા મૂળ બે અણુઓની વચ્ચે ગોઠવાતો હોતો નથી. સપાટી પર આવતા અણુઓ નવી સપાટીનું નિર્માણ કરે છે. અર્થાત્ સપાટીનું વિસ્તરણ થાય છે. પ્રવાહીની સમગ્ર સપાટી આ રીતે જ નિર્માણ પામેલી ગણી શકાય. આમ, પ્રવાહીની સપાટીમાંના અણુઓ, તેમને સપાટી પર લાવતાં તેમના પર થયેલ કાર્ય જેટલી સ્થિતિ-ઊર્જા મેળવતા હોય છે.

"પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીના એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ રહેલી સ્થિતિ-ઊર્જાને પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ (T) કહે છે."

આ વ્યાખ્યા મુજબ, પૃષ્ઠતાણ $T = \frac{E}{A}$

આ સંદર્ભમાં પૃષ્ઠતાણનો એકમ $J\ m^{-2}$ થશે.

હવે, $\frac{\text{જૂલ}}{\text{મીટર}^2} = \frac{\text{ન્યૂટન મીટર}}{\text{મીટર}^2} = \frac{\text{ન્યૂટન}}{\text{મીટર}}$ છે.

આથી બંને વ્યાખ્યાઓથી મળતા એકમો સમાન જ છે.

પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ પ્રવાહીની જાત તેમજ તાપમાન પર આધાર રાખે છે. તાપમાન વધતાં પૃષ્ઠતાણ ઘટે છે અને ક્રાંતિ તાપમાને તે શૂન્ય બને છે. વળી, પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ પ્રવાહી જે માધ્યમનાં સંપર્કમાં હોય તે માધ્યમ પર પણ આધાર રાખે છે.

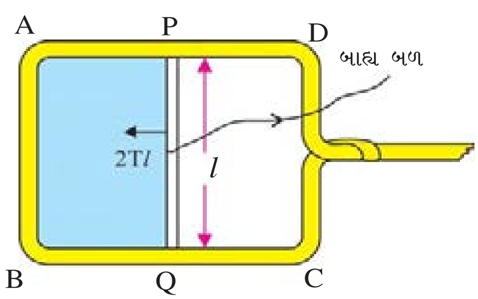
પૃષ્ઠ-ઊર્જા (Surface energy) : ધારો કે એક પ્રવાહીનું આપેલા તાપમાને પૃષ્ઠતાણ T છે. અચળ તાપમાને પ્રવાહીની સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં એકમવધારો કરવો હોય તો T જેટલું કાર્ય કરવું પડે. આપણે જાણીએ છીએ કે સપાટીનું વિસ્તરણ થતાં તેનું તાપમાન ઘટે છે. આથી તાપમાન અચળ

રાખવું હોય, તો વિસ્તરણ દરમિયાન તેને બહારથી ઉષ્મા-ઊર્જા આપવી પડે છે. આમ, પ્રવાહીની સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં એક એકમ જેટલો વધારો થતાં આ એક એકમ જેટલી નવી સપાટીને સ્થિતિ-ઊર્જા (=T) ઊર્જા ઉપરાંત ઉષ્મા-ઊર્જા પણ મળે છે.

∴ એકમક્ષેત્રફળ દીઠ કુલ પૃષ્ઠ-ઊર્જા = સ્થિતિ-ઊર્જા (પૃષ્ઠતાણ) + ઉષ્મા-ઊર્જા

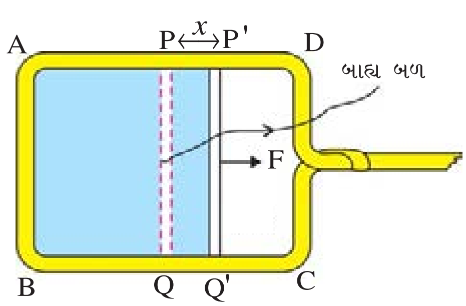
આમ, આપેલા તાપમાને પૃષ્ઠ-ઊર્જાનું મૂલ્ય પૃષ્ઠતાણ કરતાં વધારે હોય છે. તાપમાન વધારતાં પૃષ્ઠતાણ અને પૃષ્ઠ-ઊર્જા ઘટે છે અને ક્રાંતિ-તાપમાને તેઓ શૂન્ય બને છે.

અત્યાર સુધીની આપણી ચર્ચા ઘટનાત્મક પ્રકારની (phenomenological) છે. હવે આ ચર્ચાના નિષ્કર્ષોને આપણે પ્રયોગની એરણ પર ચઢાવીને ચકાસીએ. આ માટે આકૃતિ 5.25માં દર્શાવ્યા મુજબની તારમાંથી બનાવેલી એક લંબચોરસ ફ્રેમ ABCD પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરો. તાર PQ આ ફ્રેમની AD અને BC ભુજાઓ પર ઘર્ષણરહિત સરકી શકે છે. તાર PQ સાથે એક પાતળી દોરી બાંધેલી છે.



(*a*)

લંબચોરસ ફ્રેમ પર રચેલ પ્રવાહીની ફિલ્મ



(*b*)

ફિલ્મનું વિસ્તરણ

આકૃતિ 5.25

જો ફ્રેમને સાબુના દ્રાવણમાં બોળીને, દોરી વડે તાર PQ ને યોગ્ય રીતે ખેંચી રાખીને, ફ્રેમને દ્રાવણમાંથી બહાર કાઢીએ, તો ફ્રેમ પર દ્રાવણની ફિલ્મ (film) ABQP મેળવી શકાય છે. જો દોરી છોડી દઈએ, તો PQ તાર AB બાજુ તરફ સરકી જતો જણાય છે, એટલે કે ફિલ્મ સંકોચાય છે. આ પ્રયોગ દર્શાવે છે કે પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીની કિનારી પર, કિનારીને લંબ અને સપાટીને સમાંતર પૃષ્ઠતાણનું બળ લાગે છે.

હવે ફિલ્મ ABQP ફરીથી તૈયાર કરી, દોરીને તાર PQ પર લાગતાં બળ કરતાં સહેજ વધારે બળથી ખેંચીને તાર PQને આકૃતિ 5.25(*b*)માં દર્શાવ્યા મુજબ x જેટલું સ્થાનાંતર કરાવીએ, તો થતું કાર્ય નીચે પ્રમાણે ગણી શકાય :

ધારો કે દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ T અને તાર PQની લંબાઈ l છે.

તેથી તાર પર લાગતું પૃષ્ઠતાણનું બળ 2Tl; અહીં ફિલ્મને બે મુક્ત સપાટીઓ હોવાથી બળના સૂત્રમાં 2 આવે છે. (5.12.4)

∴ લગાડેલું બાહ્ય બળ $F = 2Tl$

કાર્ય = બાહ્ય બળ × સ્થાનાંતર

∴ $W = 2Tlx$

પણ, ફિલ્મની સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો = $\Delta A = 2lx$ (5.12.5)

∴ $W = T\Delta A$

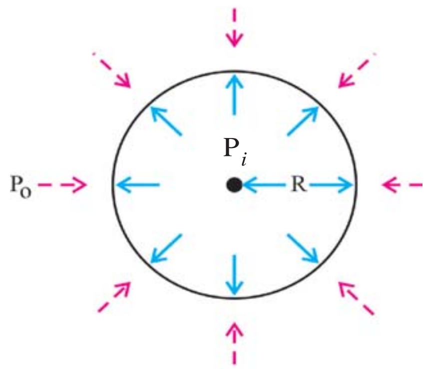
જો $\Delta A = 1$ એકમ થાય, તો $W = T$

∴ સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં એક એકમ જેટલો વધારો કરવા માટે કરવું પડતું કાર્ય પૃષ્ઠતાણના માપ જેટલું હોય છે.

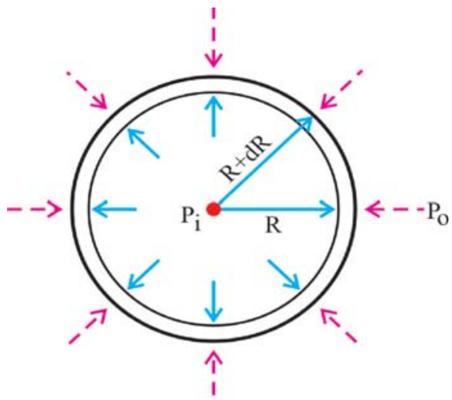
5.13 બુંદ અને પરપોટાઓ (Drops and Bubbles)

પ્રવાહીનાં નાનાં બુંદ કે પરપોટા હંમેશાં ગોળાકાર હોય છે. તમને સ્વાભાવિક રીતે જ પ્રશ્ન થાય કે આમ શા કારણે થતું હશે ? પૃષ્ઠતાણને કારણે પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી તેનું ક્ષેત્રફળ લઘુતમ રહે તેવી સ્થિતિમાં રહે છે. આપેલા કદ માટે ગોળાકાર સપાટીનું ક્ષેત્રફળ લઘુતમ હોય છે. આથી પ્રવાહીનાં નાનાં બુંદ હંમેશાં ગોળાકાર હોય છે.

બુંદ કે પરપોટાની સપાટીઓ વક્રાકાર હોય છે. પ્રવાહીની આ વક્રાકાર સપાટીના અંતર્ગોળ ભાગ પર લાગતું દબાણ, બહિર્ગોળ ભાગ પર લાગતા દબાણ કરતાં વધારે હોય છે. આથી જ પ્રવાહીનાં બુંદ કે પરપોટાની અંદરનું દબાણ બહારના દબાણ કરતાં વધારે હોય છે.



(*a*)



(*b*)

પરપોટો

આકૃતિ 5.26

આકૃતિ 5.26*a* માં દર્શાવ્યા મુજબ R ત્રિજ્યા ધરાવતા હવામાં રહેલા કોઈ એક પરપોટાને ધ્યાનમાં લો. તેની અંદર અને બહારના દબાણ અનુક્રમે P_i અને P_0 છે. અહીં $P_i > P_0$ છે. પરપોટાની દીવાલ રચતા પ્રવાહી (દ્રાવણ)નું પૃષ્ઠતાણ ધારો કે T છે.

હવે, ધારો કે પરપોટાને ફુલાવતાં તેની ત્રિજ્યા Rથી વધીને (R + *d*R) થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 5.26*b*) અને આમ કરવાથી તેની મુક્ત સપાટીનું ક્ષેત્રફળ ધારો કે S થી વધીને S + *d*S થાય છે. આ માટેનું કાર્ય બે રીતે ગણી શકાય.

(1) પરપોટાની ફૂલવાની પ્રક્રિયામાં તેની $4\pi R^2$ ક્ષેત્રફળની સપાટી પર દબાણના તફાવત $(P_i - P_0)$ના લીધે $(P_i - P_0)\ 4\pi R^2$ બળ લાગે છે અને આ બળની અસર હેઠળ સપાટી *d*R અંતર ખસે છે. આથી સપાટી પર થતું કાર્ય,

$$W = \text{બળ} \times \text{સ્થાનાંતર}$$
$$= (P_i - P_0)\ 4\pi R^2 \cdot dR \qquad (5.13.1)$$

(2) પરપોટાની ત્રિજ્યા R હોય ત્યારે સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $S = 4\pi R^2$.

હવે, પરપોટાની ત્રિજ્યા (R + *d*R) થાય, ત્યારે ક્ષેત્રફળમાં થતો વધારો.

$$dS = 8\pi R dR$$

પરંતુ હવામાં રહેલા પરપોટાને બે મુક્ત સપાટીઓ હોય છે.

$$\therefore \text{ક્ષેત્રફળમાં થતો કુલ વધારો} = 2 \times 8\pi R dR$$
$$= 16\pi R dR$$

તેથી, આ માટે જરૂરી કાર્ય,

$$W = \text{પૃષ્ઠતાણ} \times \text{ક્ષેત્રફળમાં થતો કુલ વધારો}$$

$$\therefore W = 16\pi T R dR \qquad (5.13.2)$$

(5.13.1) અને (5.13.2) સરખાવતાં,

$$4\pi(P_i - P_0)R^2\ dR = 16\pi\ T\ R\ d\ R$$

$$\therefore P_i - P_0 = \frac{4T}{R} \qquad (5.13.3)$$

જો પરપોટો પ્રવાહીની અંદર રહેલો હોય, તો તેને એક જ મુક્ત સપાટી હોય છે.

$$\therefore P_i - P_0 = \frac{2T}{R} \qquad (5.13.4)$$

નોંધ : પ્રવાહીના બુંદને પણ એક જ મુક્ત સપાટી હોવાથી દબાણનો તફાવત સમીકરણ (5.13.4) ની મદદથી શોધી શકાય.

ઉદાહરણ 12 : પાણીમાં તેની મુક્ત સપાટીથી 5 cm ઊંડાઈએ બનતા 0.2 cm ત્રિજ્યાના પરપોટાની અંદરનું દબાણ શોધો. પાણીનું પૃષ્ઠતાણ 70 dyne cm^{-1} અને ઘનતા 1 g cm^{-3} છે. વાતાવરણનું દબાણ 10^6 dyne cm^{-2} લો. ગુરુત્વપ્રવેગનું મૂલ્ય 980 cm s^{-2} છે.

ઉકેલ :

h = 5 cm

R = 0.2 cm

T = 70 dyne cm^{-1}

ρ = 1 g cm^{-3}

P = વાતાવરણનું દબાણ

= 10^6 dyne cm^{-2}

g = 980 cm s^{-2}

પાણીમાં બનતા હવાના પરપોટાનું અંદરનું અને બહારનું દબાણ અનુક્રમે P_i અને P_0 હોય, તો

$$P_i - P_0 = \frac{2T}{R}$$ (પરપોટો પાણીમાં બનતો હોવાથી તેને એક જ મુક્ત સપાટી છે.)

$$\therefore\ P_i = P_0 + \frac{2T}{R} \qquad (1)$$

પરંતુ P_0 = વાતાવરણનું દબાણ + h ઊંડાઈના પાણીના સ્તંભનું દબાણ

$$\therefore\ P_0 = P + h\rho g \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) પરથી,

$$P_i = P + h\rho g + \frac{2T}{R}$$

$$= 10^6 + (5 \times 1 \times 980) + \frac{2 \times 70}{0.2}$$

$$= 10^6 + 4900 + 700$$

$$P_i = 1.0056 \times 10^6 \text{ dyne cm}^{-2}$$

ઉદાહરણ 13 : એક છિદ્રવાળો પોલો ગોળો જ્યારે પાણીની સપાટીની નીચે 40 cm ઊંડાઈએ લઈ જવામાં આવે છે, ત્યારે જ છિદ્રમાંથી પાણી દાખલ થવા લાગે છે. જો પાણીનું પૃષ્ઠતાણ 70 dyne cm^{-1} હોય, તો છિદ્રની ત્રિજ્યા શોધો. $g = 10\ ms^{-2}$.

ઉકેલ : ધારો કે કાણાની ત્રિજ્યા r છે. અહીં ગોળાની ઊંડાઈ $h = 40$ cm છે. આ ઊંડાઈએ પાણીનું દબાણ = $hdg = 40 \times 1 \times 1000 = 40000$ dyne cm^{-2}.

જ્યારે પાણી ગોળામાં પ્રવેશશે, ત્યારે ગોળાના છિદ્રમાંથી છિદ્રની ત્રિજ્યા જેટલી જ ત્રિજ્યા ધરાવતો હવાનો પરપોટો ગોળામાંથી બહાર આવશે. આ પરપોટાની અંદરનું વધારાનું દબાણ = $\frac{2T}{r} = \frac{2 \times 70}{r}$.

$$\therefore \text{ સમતોલન સ્થિતિમાં } hdg = \frac{2T}{r}$$

$$\therefore\ 40000 = \frac{2 \times 70}{r}$$

$$\therefore\ r = 3.5 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

ઉદાહરણ 14 : r ત્રિજ્યાવાળાં એકસરખાં n ટીપાં એકત્ર થઈ R ત્રિજ્યાનું એક મોટું ટીપું રચે છે. જો પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ T હોય, તો વિમુક્ત થતી ઊર્જા શોધો.

ઉકેલ : r ત્રિજ્યાવાળાં n ટીપાંનું કુલ કદ = R ત્રિજ્યાનાં ટીપાંનું કદ

$$\therefore\ \left(n\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\therefore\ nr^3 = R^3 \qquad (1)$$

n ટીપાની સપાટીનું ક્ષેત્રફળ $A_1 = n(4\pi r^2)$

અને એક મોટા ટીપાનું ક્ષેત્રફળ $A_2 = 4\pi R^2$

$\therefore$ ક્ષેત્રફળમાં ઘટાડો = ΔA

$$= A_1 - A_2 = n \cdot 4\pi r^2 - 4\pi R^2$$

$$= 4\pi(nr^2 - R^2)$$

$\therefore$ વિમુક્ત થતી ઊર્જા $W = T\Delta A = 4\pi T (nr^2 - R^2)$ (2)

(પરિણામ (2) મેળવવા માટે પરિણામ (1) મેળવવાની જરૂર નથી, પરંતુ પરિણામ (2) ને નીચે જણાવેલ વિશિષ્ટ સ્વરૂપમાં દર્શાવવા માટે પરિણામ (1) જરૂરી છે.)

$$W = T\Delta A = 4\pi TR^3\left(\frac{nr^2 - R^2}{R^3}\right)$$

$$= 4\pi TR^3\left(\frac{nr^2}{nr^3} - \frac{R^2}{R^3}\right)$$

$$= 4\pi TR^3\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \qquad ...(3)$$

ઉદાહરણ 15 : R_1 અને R_2 ત્રિજ્યાવાળા સાબુના બે પરપોટા એકત્રિત થઈને R ત્રિજ્યાવાળો એક પરપોટો રચે છે. જો વાતાવરણનું દબાણ P અને સાબુના દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ T હોય, તો સાબિત કરો કે,

$$P(R_1^3 + R_2^3 - R^3) = 4T(R^2 - R_1^2 - R_2^2)$$

આ ક્રિયા દરમિયાન તાપમાન અચળ રહે છે, તેમ ધારો.

ઉકેલ :

પહેલા પરપોટાની અંદરનું દબાણ $= P_1 = P + \frac{4T}{R_1}$

બીજા પરપોટાની અંદરનું દબાણ $= P_2 = P + \frac{4T}{R_2}$

અને સંયુક્ત પરપોટાની અંદરનું દબાણ $= P_3 = P + \frac{4T}{R}$.

અત્રે P = દરેક માટે બહારનું દબાણ = વાતાવરણનું દબાણ જે સમાન છે.

જો આ ત્રણ પરપોટાનાં કદ અનુક્રમે V_1, V_2 અને V_3 હોય તો,

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^{\ 3};\ V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^{\ 3};\ V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

અત્રે તાપમાન અચળ છે. બૉઇલના નિયમ મુજબ,

$$P_1V_1 + P_2V_2 = P_3V_3$$

$$\therefore \left(P + \frac{4T}{R_1}\right)\left(\frac{4}{3}\pi R_1^{\ 3}\right) + \left(P + \frac{4T}{R_2}\right)\left(\frac{4}{3}\pi R_2^{\ 3}\right)$$

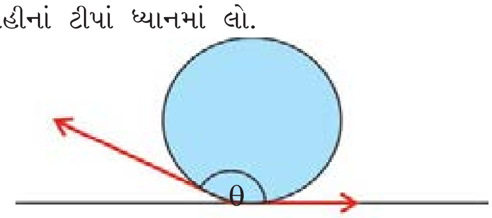
$$= \left(P + \frac{4T}{R}\right)\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

$$\therefore \frac{4}{3}\pi P(R_1^{\ 3} + R_2^{\ 3} - R^3) = \frac{4}{3}\pi \times 4T (R^2 - R_1^{\ 2} - R_2^{\ 2})$$

$$P (R_1^{\ 3} + R_2^{\ 3} - R^3) = 4T(R^2 - R_1^{\ 2} - R_2^{\ 2})$$

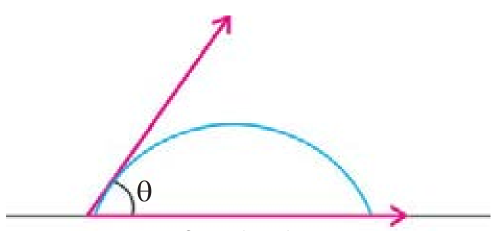
5.14 સંપર્કકોણ (Angle of Contact)

આપ સૌએ ઝાકળનાં બિંદુઓ જોયાં હશે. તેઓ ગોળાકાર હોય છે. જ્યારે પ્રવાહી ઘન પદાર્થના સંપર્કમાં આવે ત્યારે તેની સપાટી વક્ર બને છે. આ બાબત વધુ સારી રીતે સમજવા આકૃતિ 5.27(*a*) અને 5.27(*b*)માં દર્શાવેલા પ્રવાહીનાં ટીપાં ધ્યાનમાં લો.



θ ગુરુકોણ છે.

(*a*)



θ લઘુકોણ છે.

(*b*)

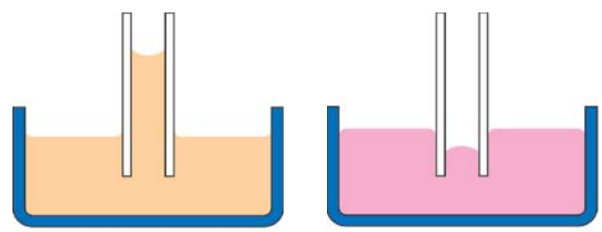
સંપર્કકોણ

આકૃતિ 5.27

પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થના સંપર્કબિંદુએ પ્રવાહીની સપાટીને દોરેલો સ્પર્શક અને પ્રવાહીમાં રહેલા ઘન સપાટી વચ્ચેનો ખૂણો સંપર્કકોણ કહેવાય છે. સંપર્કકોણ સંપર્કમાં રહેલ પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થ પર આધાર રાખે છે. જો સંપર્કકોણ 90^oથી ઓછો હોય, તો પ્રવાહી ઘન પદાર્થને ભીંજવે છે, ઘન પદાર્થ સાથે ચોંટી જાય છે, અને આપેલ ઘન પદાર્થની બનલી કેશનળીમાં ઉપર ચઢે છે. જો સંપર્ક કોણ 90^oથી વધુ હોય તો પ્રવાહી ઘન પદાર્થને ભીંજવતું નથી, ઘન પદાર્થ સાથે ચોંટી જતું નથી અને પદાર્થની બનેલી કેશનળીમાં નીચે ઉતરે છે. ઉદાહરણ તરીકે જો પાણીનું ટીપું કમળના પાન પર હોય તો (આકૃતિ 5.27*a*) સંપર્કકોણ ગુરુકોણ છે. પણ જો પાણીનું ટીપું કાચના સંપર્કમાં હોય તો (આકૃતિ 5.27*b*) સંપર્કકોણ લઘુકોણ છે.

5.15 કેશાકર્ષણ (Capillarity)

પ્રવાહીમાં ઊભી રાખવામાં આવેલી કેશનળીમાં પ્રવાહીની ઊંચે ચડવાની કે નીચે ઊતરવાની ઘટનાને કેશાકર્ષણ કહે છે. આ ઘટનામાં પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ મુખ્ય ભાગ ભજવે છે.

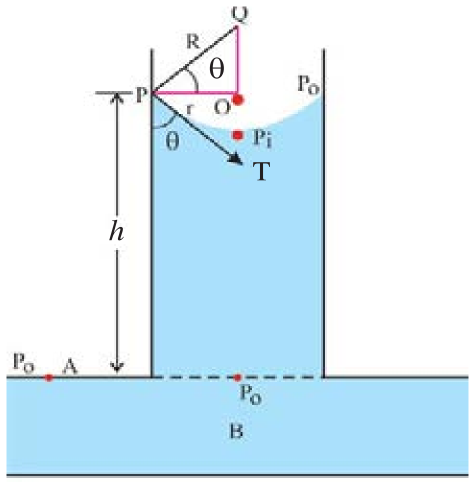


પાણી (*a*) પારો (*b*)

કાચની કેશનળીમાં કેશાકર્ષણની ઘટના

આકૃતિ 5.28

આકૃતિ 5.28(*a*)માં દર્શાવ્યા મુજબ પાણીમાં કાચની કેશનળી (નાના વેહવાળી નળી) ઊભી રાખતાં કેશનળીમાં પાણી ઊંચે ચઢે છે. જ્યારે આકૃતિ 5.28(*b*)માં દર્શાવ્યા મુજબ પારામાં કાચની કેશનળી ઊભી રાખતાં કેશનળીમાં પારો નીચે ઊતરે છે. વળી, એ પણ અહીં નોંધો કે પાણી કાચને ભીંજવે છે, જ્યારે પારો કાચને ભીંજવતો નથી. અહીં તમે ધ્યાનથી જોશો તો ખ્યાલ આવશે કે કેશનળીમાં ઉપર ચડેલા પાણીની મુક્ત સપાટી (મેનિસ્કસ - meniscus) અંતર્ગોળ હોય છે, જ્યારે કેશનળીમાં નીચે ઊતરેલા પારાની મુક્ત સપાટી બહિર્ગોળ હોય છે.



કેશનળીમાં પ્રવાહીનો સ્તંભ
આકૃતિ 5.29

આકૃતિ 5.29માં દર્શાવ્યા મુજબ ધારો કે r ત્રિજ્યાની એક કેશનળીને પ્રવાહીમાં ઊભી ગોઠવતાં પ્રવાહી કેશનળીમાં h ઊંચાઈ સુધી ઉપર ચડે છે. આ સ્થિતિમાં કેશનળીમાં પ્રવાહીના અંતર્ગોળ મેનિસ્કસની વક્રતા ત્રિજ્યા ધારો કે R છે.

મેનિસ્કસની ત્રિજ્યા R અને કેશનળીની ત્રિજ્યા r વચ્ચેનો સંબંધ નીચે મુજબ મેળવી શકાય :

આકૃતિ 5.29 ની ભૂમિતિ પરથી $\angle OPQ = \theta$માં ΔOPQ,

$$\therefore \cos\theta = \frac{OP}{PQ}$$

$$= \frac{\text{કેશનળીની ત્રિજ્યા } (r)}{\text{મેનિસ્કસની ત્રિજ્યા } (R)}$$

$$\therefore R = \frac{r}{\cos\theta} \qquad (5.15.1)$$

હવે, આકૃતિમાં દર્શાવેલ સ્થિતિમાં પ્રવાહી સમતોલનમાં છે. અહીં મેનિસ્કસની અંતર્ગોળ બાજુ પર દબાણ ધારો કે P_o અને બહિર્ગોળ બાજુ પર દબાણ ધારો કે P_i છે. આ કિસ્સામાં ,$P_o > P_i$ તેમજ $P_o - P_i = \frac{2T}{R}$ ($\because$ અહીં પ્રવાહીની એક જ મુક્ત સપાટી છે.) (5.15.2)

નોંધો કે P_o એ વાતાવરણનું દબાણ છે. આટલું જ દબાણ પ્રવાહીની સમતલ સપાટી પર A બિંદુએ અને સમક્ષિતિજ એવા B બિંદુએ પણ લાગે છે.

B બિંદુ આગળનું દબાણ $P_o = P_i + h\rho g$

અહીં, ρ એ પ્રવાહીની ઘનતા અને g ગુરુત્વપ્રવેગ છે.

$$\therefore P_o - P_i = h\rho g \qquad (5.15.3)$$

સમીકરણો (5.15.2) અને (5.15.3)

$$\frac{2T}{R} = h\rho g$$

$$\therefore T = \frac{Rh\rho g}{2}$$

(5.15.1) માંથી Rનું મૂલ્ય કરતાં,

$$T = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g} \qquad (5.15.4)$$

ઉપરોક્ત સમીકરણ પરથી પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ શોધી શકાય છે. આ સમીકરણ પરથી,

$$h = \frac{rh\rho g}{2\cos\theta}$$

(*i*) જો $\theta < 90^o$ હશે, તો $\cos\theta$ ધન થશે અને આ સમીકરણ પરથી h ધન મળશે. આથી, પ્રવાહી કેશનળીમાં ઊંચે ચઢે છે. (દા.ત., કાચ-પાણી).

(*ii*) જો $\theta > 90^o$ હશે તો $\cos\theta$ ઋણ થશે અને આ સમીકરણ પરથી h ઋણ મળશે. આથી, પ્રવાહી કેશનળીમાં નીચે ઊતરે છે. (દા.ત., કાચ-પારો).

આ કિસ્સામાં મેનિસ્કસ બહિર્ગોળ હોય છે. વળી, $P_i > P_o$. હોય છે, તેથી (5.15.2)માં $P_i - P_o = \frac{2T}{R}$ લેવું જોઈએ. વળી, $P_i - P_o = h\rho g$ મળશે. તેથી અંતિમ પરિણામ (5.15.4) માં કશો ફેર પડતો નથી.

ડિટરજન્ટ કે સાબુ પાણીમાં ઓગાળતાં દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ પાણીના પૃષ્ઠતાણથી ઓછું થાય છે. પરિણામે પ્રક્ષાલન ક્ષમતામાં વધારો થાય છે.

ઉદાહરણ 16 : કાચની એક કેશનળીની ત્રિજ્યા 0.5 mm છે. તેને પાણીમાં ઊભી ગોઠવતાં કેશનળીમાં પાણીના સ્તંભની ઊંચાઈ શોધો. પાણીની ઘનતા 10^3 kg m^{-3} તથા પાણીનો કાચ સાથેનો સંપર્કકોણ 0^o છે. ગુરુત્વપ્રવેગ $g = 9.8$ ms^{-2} લો. પાણીનું પૃષ્ઠતાણ T = 0.0727 Nm^{-1}.

ઉકેલ :

$r = 0.5$ mm $= 5 \times 10^{-4}$ m

$\rho = 103$ kg m^{-3}

$\theta = 0^o \therefore \cos 0^o = 1$

$g = 9.8$ ms^{-2}

T = 0.0727 Nm^{-1}

$$T = \frac{rh\rho g}{2cos\theta}$$

$$\therefore h = \frac{2Tcos\theta}{r\rho g}$$

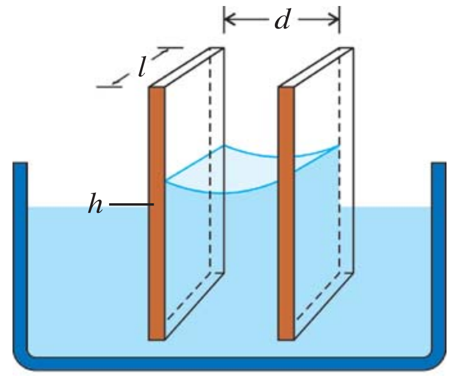
$$= \frac{2 \times 0.0727 \times 1}{5 \times 10^{-4} \times 10^{3} \times 9.8}$$

$$\therefore h = 0.0296 \text{ m} = 2.96 \text{ cm}$$

ઉદાહરણ 17 : બે લંબચોરસ કાચની તકતીઓને એકબીજાથી 1 mm દૂર રાખેલી છે. આકૃતિ 5.30માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે તેમને પાણીમાં અંશતઃ ડુબાડી છે કે જેથી તેમની વચ્ચેનો હવા (તથા પાણી)નો સ્તંભ ઊર્ધ્વ રહે, તો તેમની વચ્ચેની જગ્યામાં પાણી કેટલું ઊંચે ચડશે ?

$T = 70$ dyn cm^{-1}.

ઉકેલ : ધારો કે પ્લેટની પહોળાઈ l છે. આ સ્થિતિમાં બંને પ્લેટની મળીને $2l$ જેટલી લંબાઈ પર પાણી અને કાચ એકબીજાના સંપર્કમાં હશે. પાણીનો કાચના સંદર્ભમાં સંપર્કકોણ શૂન્ય છે. ધારો કે પાણી h cm ઊંચે ચઢે છે.



આકૃતિ 5.30

$\therefore$ પાણીના ઉપર ચઢેલા સ્તંભનું કદ $= ldh$.

જ્યાં d = બે પ્લેટ વચ્ચેનું અંતર

પાણીની ઘનતા ρ હોય અને ગુરુત્વપ્રવેગ g હોય, તો પાણીના આ સ્તંભનું નીચે તરફ લાગતું વજનબળ $= (ldh)\rho g$. આ બળ $2l$ લંબાઈ પર લાગતા પૃષ્ઠતાણના બળ જેટલું હોવું જોઈએ.

$$\therefore 2Tl = (ldg)h\rho$$

$$h = \frac{2T}{dg\rho} = 1.43 \text{ cm}$$

સારાંશ

1. વહી શકે તેવા પદાર્થને તરલ કહે છે.
2. પદાર્થની એકમક્ષેત્રફળવાળી સપાટીને લંબ રૂપે લાગતા બળના મૂલ્યને દબાણ કહે છે. દબાણ અદિશ રાશિ છે. તેનો એકમ Nm^{-2} અથવા P_a છે.
3. જો બળ સપાટીને દોરેલા લંબ સાથે θ ખૂણો બનાવે તેમ લાગતું હોય, તો બળના $Fcos\theta$ ઘટકને કારણે દબાણ પેદા થાય છે અને તેથી દબાણ

   $$P = \frac{Fcos\theta}{A}$$
4. પદાર્થ દળ અને કદના ગુણોત્તરને ઘનતા કહે છે. ઘનતાને એકમ kg m^{-3} છે.
5. પદાર્થની ઘનતા અને 277K તાપમાને પાણીની ઘનતાના ગુણોત્તરને વિશિષ્ટ ઘનતા કહે છે. વિશિષ્ટ ઘનતા પરિમાણ રહિત છે.
6. **પાસ્કલનો નિયમ :** જો ગુરુત્વાકર્ષણની અસરો અવગણવામાં આવે, તો તરલમાં સર્વત્ર દબાણ સમાન હોય છે.
7. **પાસ્કલનો દબાણ-પ્રસરણનો નિયમ :** બંધ પાત્રમાં ભરેલા અદબનીય તરલ પરના દબાણમાં કરેલો ફેરફાર, તરલના પ્રત્યેક ભાગમાં અને પાત્રની દીવાલ પર એકસરખી રીતે પ્રસરે છે. આ દબાણ પાત્રની દીવાલને લંબ હોય છે.
8. હાઈડ્રોલિક લિફ્ટ, હાઈડ્રોલિક બ્રેક, ડોર-ક્લોઝર અને વાહનોના શૉક એબ્સોર્બર પાસ્કલના નિયમ પર કાર્ય કરે છે.
9. તરલમાં ઊંડાઈ સાથે દબાણમાં થતો ફેરફારનો દર ρg જેટલો છે.

10. અદબનીય તરલ સ્તંભને કારણે તળિયે ઉદ્ભવતું $h\rho g$ જેટલું હોય છે.

11. તરલ સ્તંભને કારણે ઉદ્ભવતું દબાણ પાત્રના આકાર કે ક્ષેત્રફળ પર આધારિત નથી.

12. **આર્કિમિડિઝનો સિદ્ધાંત :** જ્યારે કોઈ પદાર્થને પ્રવાહીમાં આંશિક કે સંપૂર્ણપણે ડુબાડવામાં આવે ત્યારે તેના પર લાગતું ઉત્લાવક બળ તેણે વિસ્થાપિત કરેલા પ્રવાહીના વજન જેટલું હોય છે અને વિસ્થાપિત પ્રવાહીના દ્રવ્યમાન કેન્દ્ર પર ઊર્ધ્વ દિશામાં લાગે છે.

13. **ફ્લોટેશનનો નિયમ :** જ્યારે પદાર્થનું વજન એ તરતા પદાર્થના ડૂબેલા ભાગ દ્વારા વિસ્થાપિત કરાયેલા પ્રવાહીના વજન જેટલું હોય ત્યારે તે પદાર્થ પ્રવાહીમાં તરે છે.

14. **સ્થાયી વહન :** જે તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલનો વેગ સમય સાથે અચળ રહેતો હોય તેવા વહનને સ્થાયી વહન કહે છે.

15. **પ્રક્ષુબ્ધ વહન :** જો તરલ વહનમાં દરેક બિન્દુ પાસે તરલના વેગમાં સમય સાથે અનિયમિત તેમજ ઝડપી ફેરફાર થાય, તો તેવા વહનને પ્રક્ષુબ્ધ વહન કહે છે.

16. **અચક્રીય વહન :** જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલના અંશને તે બિંદુને અનુલક્ષીને કોઈ પરિણામી કોણીય વેગ ન હોય, તો તરલનું વહન અચક્રીય વહન કહેવાય.

17. **અદબનીય વહન :** જો તરલ વહનમાં દરેક બિંદુ પાસે તરલની ઘનતા અચળ રહેતી હોય, તો તેવા વહનને અદબનીય વહન કહે છે.

18. **અશ્યાન વહન :** જે તરલ માટે શ્યાનતા-ગુણાંક મૂલ્ય ઓછું હોય તેવા તરલના વહનને અશ્યાન વહન કહે છે.

19. આદર્શ તરલનું વહન સ્થાયી, અચક્રિય, અદબનીય અને અશ્યાન પ્રકારનું હોય છે.

20. **પ્રવાહરેખા :** વહેતા તરલમાં તરલકણના ગતિમાર્ગને પ્રવાહરેખા કહે છે.

21. **ધારારેખા :** જે વક્ર પરના દરેક બિંદુ પાસેનો સ્પર્શક તે બિંદુ પાસેથી પસાર થતા કણના વેગની દિશામાં હોય, તેવા વક્રને ધારારેખા કહે છે.

22. ધારારેખાના સમૂહથી બનતી કાલ્પનિક નળીને વહનનળી કહે છે.

23. **કદ ફ્લક્સ :** કોઈ પણ આડછેદમાંથી એકમસમયમાં પસાર થતા તરલના કદને કદ ફ્લક્સ કહે છે. તેનું મૂલ્ય આડછેદના ક્ષેત્રફળ અને વેગના ગુણાકાર જેટલું હોય છે.

24. **ડાયનેમિક લિફ્ટ :** જ્યારે કોઈ વસ્તુ તરલને સાપેક્ષ ગતિ કરે ત્યારે એક બીજું બળ ઉદ્ભવે છે. જે વસ્તુને તેના મૂળ માર્ગ પરથી વિચલિત કરે છે. આ ઘટનાને ડાયનેમિક લિફ્ટ કહે છે.

25. **ઍરોફોઇલ :** જે ઘન પદાર્થ હવામાં સમક્ષિતિજ દિશામાં ગતિ કરતો, ત્યારે તેના પર તેના આકારને કારણે ઊર્ધ્વ દિશામાં બળ લાગે તેવા પદાર્થને ઍરોફોઇલ કહે છે.

26. **સ્તરીય વહન :** સ્થાયી પ્રવાહમાં તરલના જુદા-જુદા સ્તર એકબીજામાં ભળી ગયા વિના એકબીજા પર સરકે છે. આવા વહનને સ્તરીય વહન કહે છે.

27. **શ્યાનતાબળ :** સ્તરીય વહનમાં તરલના કોઈ પણ બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચે સાપેક્ષ ગતિ હોય છે. પરિણામે તેમની સંપર્કસપાટી પર સ્પર્શીય અવરોધક બળ ઉત્પન્ન થાય છે. આવા અવરોધક બળને શ્યાનતાબળ કહે છે.

28. વેગ-પ્રચલન : તરલમાં સ્તરીય વહન દરમિયાન વહનને લંબ દિશામાં એકબીજાથી એકમઅંતરે રહેલા બે સ્તરોના વેગના તફાવતને વેગ-પ્રચલન કહે છે. તેનો એકમ s^{-1} છે.

29. શ્યાનતા-ગુણાંક : તરલના સ્તરીય વહનમાં કોઈ પણ બે ક્રમિક સ્તરો વચ્ચે એકમ વેગ-પ્રચલન અને એકમ ક્ષેત્રફળ દીઠ ઉદ્‌ભવતા શ્યાનતાબળને તરલનો શ્યાનતા-ગુણાંક કહે છે.

30. સ્ટોક્સનો નિયમ : મોટા વિસ્તારવાળા અને η જેટલો શ્યાનતા-ગુણાંક ધરાવતા શ્યાન માધ્યમમાં v જેટલા વેગથી ગતિ કરતા r ત્રિજ્યાવાળા ગોળાકાર પદાર્થ પર લાગતું શ્યાનતાબળ $6\pi\eta rv$ જેટલું હોય છે.

31. જ્યારે નળીમાંથી તરલનું વહન થતું હોય ત્યારે વહનનો પ્રકાર તરલની ઘનતા ρ, વેગ v, નળીના વ્યાસ D અને તરલની શ્યાનતા η પર આધારિત છે. જે રેનોલ્ડ્ઝ-અંકથી નક્કી કરી શકાય છે.

રેનોલ્ડ્ઝ-અંક $N_R = \dfrac{\rho D v}{\eta}$

જો $N_R < 2000$ તો પ્રવાહ, ધારારેખી $N_R > 3000$ તે પ્રક્ષુબ્ધ પ્રવાહ અને $2000 < N_R < 3000$ તો પ્રવાહ અનિશ્ચિત હોય છે.

32. વેગના જે મહત્તમ મૂલ્ય સુધી પ્રવાહ ધારારેખી રહે છે તે વેગને ક્રાંતિ વેગ કહે છે.

33. આસક્તિ બળ : જુદા-જુદા પ્રવાહના અણુઓ વચ્ચે લાગતાં આકર્ષણબળોને આસક્તિ બળ કહે છે.

34. સંસક્તિ બળ : એક જ દ્રવ્યના અણુઓ વચ્ચે લાગતા આકર્ષણબળને સંસક્તિ બળ કહે છે.

35. અણુ જે મહત્તમ અંતર સુધી રહેલા બીજા અણુ પર બળ લગાડી શકે તે અંતરને અણુક્રિયા અવધિ કહે છે. અણુક્રિયા અવધિ જેટલી ત્રિજ્યાવાળો ગોળા કે જેના કેન્દ્ર પર અણુ હોય તેવા ગોળાને અણુનો અણુક્રિયા-ગોળા કહે છે.

36. અચળ તાપમાને પ્રવાહીની સપાટીના ક્ષેત્રફળમાં એક એકમ જેટલો વધારો કરવા માટે કરવા પડતા કાર્યને પૃષ્ઠતાણ કહે છે. વળી, પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પર એકમલંબાઈની કાલ્પનિક રેખાની એક બાજુ રહેલા પ્રવાહીના અણુઓ રેખાની બીજી બાજુ પર રહેલા અણુઓ પર રેખાને લંબ અને સપાટીને સમાંતર જે બળ લગાડે છે, તેને પ્રવાહીનું પૃષ્ઠતાણ કહે છે. પૃષ્ઠતાણનો એકમ N/m અથવા J/m^2 છે.

37. પ્રવાહીની મુક્ત સપાટીનો આકાર તેની બે બાજુ લાગતાં દબાણ પર આધારિત છે. જો ઉપરની દિશામાં દબાણ વધુ હોય તો સપાટી અંતર્ગોળ હોય છે અને જો નીચેની દિશાનું દબાણ વધુ હોય તો સપાટી બહિર્ગોળ હોય છે.

38. પરપોટાની અંદરનું દબાણ P_i અને બહારનું દબાણ P_o હોય, તો હવામાં રહેલા પરપોટા માટે $P_i - P_o = \dfrac{4T}{R}$.

જ્યાં T પૃષ્ઠતાણ અને R પરપોટાની ત્રિજ્યા છે.

પ્રવાહીના બુંદ કે પ્રવાહીમાં રહેલા પરપોટા માટે $P_i - P_o = \dfrac{2T}{R}$

39. પ્રવાહી અને ઘન પદાર્થ એકબીજાના સંપર્કમાં આવતા પ્રવાહીની સપાટી વક્ર બને છે. પ્રવાહી ઘન પદાર્થને જ્યાં સ્પર્શે ત્યાં પ્રવાહીની સપાટીને દોરેલો સ્પર્શક અને પ્રવાહીમાં રહેલી ઘનસપાટી વચ્ચેનો ખૂણો સંપર્કકોણ કહેવાય છે.

40. પ્રવાહીમાં ઊભી રાખવામાં આવેલી કેશનળીમાં પ્રવાહીની ઊંચે ચઢવાની કે નીચે ઊતરવાની ઘટનાને કેશાકર્ષણ કહે છે.

41. પાણીમાં સાબુ કે ડિટરજન્ટ ઓગાળતાં પ્રવાહીની પૃષ્ઠતાણ ઘટે છે અને પ્રક્ષાલન-ક્ષમતા વધે છે.

સ્વાધ્યાય

નીચેનાં વિધાનો માટે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરો :

1. ઍરોપ્લેનની સમક્ષિતિજ સમતલમાં રહેલી પાંખ ઉપર હવાની ઝડપ 120 ms^{-1} અને નીચે તે 90 ms^{-1} છે. જો હવાની ઘનતા 1.3 kgm^{-3} હોય તો પાંખ ઉપર અને નીચે દબાણનો તફાવત .... છે. (પાંખની જાડાઈ અવગણો.)

(A) 156 Pa (B) 39 Pa (C) 4095 Pa (D) 6300 Pa

2. m દળ અને r ત્રિજ્યાવાળી એક ગોળી શ્યાન માધ્યમમાં પતન કરે છે, તો તેનો અંતિમ વેગ (ટર્મિનલ વેગ) ....ના સમપ્રમાણમાં છે.

(A) માત્ર $\frac{1}{r}$ (B) માત્ર m (C) $\sqrt{\frac{m}{r}}$ (D) $\frac{m}{r}$

3. 10 cm^2 ક્ષેત્રફળ ધરાવતી એક પ્લેટ બીજી મોટી પ્લેટ પર મૂકેલ છે. બે પ્લેટ વચ્ચે 1 mm જાડું ગ્લિસરિનનું પાતળું સ્તર છે. ઉપરની પ્લેટને 10 ms^{-1} જેટલા વેગથી ગતિ કરાવવા માટે જરૂરી બાહ્ય બળ .... છે. (η ગ્લિસરીનનો શ્યાનતા-ગુણાંક = 20 poise)

(A) 80 dyne (B) 200×10^3 dyne

(C) 800 dyne (D) 2000×10^3 dyne

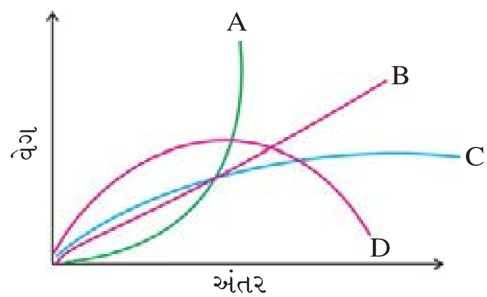
4. શ્યાન માધ્યમમાં એક નાની ગોળી પતન કરે છે, તો આકૃતિ 5.31માંનો .... વક્ર તેની ગતિનું નિરૂપણ કરે છે.

(A) A

(B) B

(C) C

(D) D



આકૃતિ 5.31

5. રેનોલ્ડ્ઝ-અંકનું મૂલ્ય .... ધરાવતા તરલ માટે ઓછું છે.

(A) ઓછા વેગ (B) ઓછી ઘનતા (C) વધુ શ્યાનતા (D) આપેલા ત્રણે વિકલ્પ

6. રેનોલ્ડ્ઝ અંકના સંદર્ભમાં નીચેનામાંથી કયા માટે ધારારેખી વહનની શક્યતા સૌથી વધુ છે ?

(A) ઓછી ρ (B) ઊંચી ρ, ઊંચી η

(C) ઊંચી ρ, ઓછી η (D) ઓછી ρ, ઊંચી η

7. સાબુના દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ 1.9×10^{-2} Nm^{-1} છે, તો 2.0 cm વ્યાસનો પરપોટો ફુલાવવા માટે કરવું પડતું કાર્ય .... છે.

(A) $17.6 \times 10^{-6} \pi$ J (B) $15.2 \times 10^{-6} \pi$ J

(C) $19 \times 16^{-6} \pi$ J (D) $10^{-4} \pi$ J

8. બે પરપોટા માટે અંદરના વધારાના દબાણના મૂલ્ય 1.01 atm અને 1.02 atm છે, તો તેમની સપાટીનાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર .... છે.

(A) 4 : 1 (B) 1 : 26 (C) 8 : 1 (D) 1 : 8

9. એક કેશનળીમાં h ઊંચાઈ સુધી પ્રવાહી ઉપર ચઢે છે. નીચેના પૈકી કયા કિસ્સામાં પ્રવાહીની ઊંચાઈ h થી વધુ હશે ?

(A) અધોદિશામાં પ્રવેગિત લિફ્ટમાં

(B) ઊર્ધ્વ-દિશામાં પ્રવેગિત લિફ્ટમાં

(C) ધ્રુવો પર

(D) અચળ રહેશે

10. 0.5 cm ત્રિજ્યાની નળીમાંથી 10 cm s^{-1}ના સરેરાશ વેગથી ગતિ કરતા પાણીનું વહન .... પ્રકારનું હશે. (η_{water} = 0.1 poise, ρ_{water} = 1g cm^{-3})

(A) ધારારેખી (B) અસ્થિર

(C) પ્રક્ષુબ્ધ (D) આપેલ વિકલ્પ પૈકી એક પણ નથી.

11. 4 cm ત્રિજ્યાની એક રિંગને (T = 63 dyne cm^{-1}) પૃષ્ઠતાણ ધરાવતા ગ્લિસરીનમાં બોળીને સપાટી પર સમક્ષિતિજ રહે તે રીતે ગ્લિસરીનમાંથી બહાર કાઢવામાં આવે, તો ગ્લિસરીનની સપાટીથી છૂટી પડતી વખતે તેના પર તેના વજન ઉપરાંત .... dyne બળ લગાડવું પડે.

(A) 63 π (B) 504 π (C) 1008 π (D) 1512 π

12. 10 cm લાંબી અને 4 cm પહોળી એક લંબચોરસ ફ્રેમમાં સાબુના દ્રાવણની ફિલ્મ રચાયેલ છે, તો ફ્રેમની નાની ધાર પર પૃષ્ઠતાણનું બળ .... લાગે. (સાબુના દ્રાવણનું પૃષ્ઠતાણ = 30 dyne cm^{-1} છે.)

(A) 60 (B) 120 (C) 300 (D) 240

13. ઉપરના પ્રશ્નમાં વર્ણવેલ ફિલ્મ રચવા માટે પૃષ્ઠતાણનાં બળો વિરુદ્ધ .... erg યાંત્રિક કાર્ય થાય.

(A) 1200 (B) 2400 (C) 2600 (D) 4800

14. જ્યારે હવા ધરાવતો પરપોટા તળાવના તળિયેથી તળાવની સપાટી પર આવે ત્યારે તે ત્રિજ્યા બમણી થાય છે. જો 10 *m* પાણીનો સ્તંભ વાતાવરણનું દબાણ ઉત્પન્ન કરી શકે, તો તળાવની ઊંડાઈ .... *m* હશે. (g = 10 m s^{-2} લો)

(A) 10 (B) 20 (C) 70 (D) 80

15. અદબનીય પ્રવાહી એક સમક્ષિતિજ નળીમાં વહે છે. બિંદુ A પાસે નળીની ત્રિજ્યા x અને B પાસે તેની ત્રિજ્યા $\frac{x}{2}$ છે. તો બિંદુ A અને બિંદુ B પાસે તરલના વેગનો ગુણોત્તર .... છે.

(A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 1 : 4 (D) 4 :1

16. એક ટાંકીમાં રહેલા છિદ્રમાંથી તરલના વહનદર જો છિદ્ર .... હોય, તો વધુ હશે.

(A) ટોચ પાસે (B) તળિયા પાસે

(C) મધ્યમાં (D) આપેલ વિકલ્પમાંથી એક પણ નહીં.

17. પ્રવાહીના અણુઓ P, Q અને R અનુક્રમે પ્રવાહીની મુક્ત સપાટી પર, પૃષ્ઠમાં અને પૃષ્ઠ નીચે આવેલ છે. જો તેમની સ્થિતિ-ઊર્જા U_P, U_Q અને U_R હોય તો,

(A) $U_P < U_Q < U_R$ (B) $U_P < U_R < U_Q$

(C) $U_R < U_P < U_Q$ (D) $U_R < U_Q < U_P$

18. શ્યાન પ્રવાહીમાં એક નાની ગોળી મુક્ત કરવામાં આવે છે, તો તેનો વેગ ....

(A) વધ્યા કરે. (B) ઘટ્યા કરે.

(C) અચળ રહે. (D) પહેલા વધે પછી અચળ રહે.

જવાબો

1. (C)	**2.** (D)	**3.** (D)	**4.** (C)	**5.** (D)	**6.** (D)
7. (B)	**8.** (A)	**9.** (A)	**10.** (A)	**11.** (C)	**12.** (D)
13. (B)	**14.** (C)	**15.** (C)	**16.** (B)	**17.** (D)	**18.** (D)

નીચે આપેલ પ્રશ્નોનો જવાબ ટૂંકમાં આપો :

1. પાસ્કલના દબાણ પ્રસરણનો નિયમ લખો.
2. કોને કારણે વધુ દબાણ ઉત્પન્ન થાય ? 75 cm ઊંચાઈવાળા પારાના સ્તંભથી કે 10 m ઊંચાઈવાળા પાણીના સ્તંભથી ? (પારાની વિશિષ્ટ ઘનતા = 13.6)
3. પાણીના છંટકાવ માટે વપરાતા 'સ્પ્રિંકલર'ના સિદ્ધાંત જણાવો.
4. 'તરલના વહન માટે બર્નુલીનું સમીકરણ ઊર્જા-સંરક્ષણના નિયમનું એક સ્વરૂપ છે.' વિધાન સાચું છે કે ખોટું ?
5. પ્રેસરહેડ, વેલોસિટી હેડ અને એલિવેશન હેડના એકમો જણાવો.
6. રેલ્વે-પ્લેટફૉર્મ પર પાટાની નજીક ઊભા હોઈએ ત્યારે ઝડપથી પસાર થતી ટ્રેન તરફ ખેંચાણ કેમ અનુભવાય છે ?
7. ઍરોફોઇલ શું છે ?
8. તરલની શ્યાનતામાં તાપમાન સાથે શું ફેરફાર થાય છે ?
9. પહોળી નળીમાંથી વહેતું તરલ સાંકડી નળીમાં પ્રવેશતાં રેનોલ્ડ્ઝ-અંકના મૂલ્યમાં શું ફેરફાર થશે ? (નળી સમક્ષિતિજ છે.)
10. અમુક કિટકો પાણી પર ચાલી શકે છે. કારણ આપો.
11. પાણીનાં ટીપાં અને રેઈનકોટના મટીરિયલ વચ્ચે સંપર્કકોણ લઘુકોણ હશે કે ગુરુકોણ ?
12. પૃષ્ઠતાણની વ્યાખ્યા આપો અને તેનાં એકમો અને પરિમાણ જણાવો.
13. એક પાતળી નળીના બે છેડાઓ પર એક નાનો અને એક મોટો એમ બે પરપોટા છે. આ સ્થિતિમાં પરપોટાઓનું શું થશે ?

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. પાસ્કલનો નિયમ લખો અને સાબિત કરો.
2. h ઊંચાઈવાળા અને ρ ઘનતાવાળા તરલ સ્તંભને કારણે ઉદ્ભવતા દબાણનું સૂત્ર મેળવો.
3. ધારારેખી પ્રવાહ એટલે શું ? સ્થાયી અદબનીય પ્રવાહ માટે સાતત્ય-સમીકરણ મેળવો.
4. સ્થાયી, અદબનીય, અચક્રીય, અશ્યાન તરલ પ્રવાહ માટે બર્નુલીનું સમીકરણ મેળવો.
5. યોગ્ય આકૃતિ અને સમીકરણની મદદથી વેન્ચુરીમીટરનું કાર્ય સમજાવો.
6. સ્તરીય પ્રવાહ એટલે શું ? આવા પ્રવાહ માટે શ્યાનતાબળની સમજૂતી આપો.
7. સ્ટોક્સનો નિયમ લખો અને તેનો ઉપયોગ કરીને શ્યાન પ્રવાહીમાં પતન કરતાં નાના લીસા ગોળાનો પ્રારંભિક પ્રવેગનું સૂત્ર મેળવો.
8. રેનોલ્ડ્ઝ-અંક પર ટૂંક નોંધ લખો.
9. હવામાં રહેલા પરપોટા માટે પરપોટાની અંદરના વધારાના દબાણનું સૂત્ર મેળવો.
10. કેશાકર્ષણ એટલે શું ? કેશનળીને પ્રવાહીમાં ઊભી રાખતાં કેશનળીમાં ઉપર ચઢતા પ્રવાહીની ઊંચાઈ માટે સમીકરણ મેળવો.

નીચેના દાખલા ગણો :

1. સમક્ષિતિજ દિશામાં રાખેલ એક સિરિંજના પિસ્ટન અને નોઝલના વ્યાસ અનુક્રમે 5 mm અને 1 mm છે. પિસ્ટનને 0.2 m s^{-2}ના અચળ વેગથી અંદર તરફ ધકેલવામાં આવે છે. નોઝલમાંથી બહાર આવતા પાણી દ્વારા જમીનને સ્પર્શે તે પહેલાં કપાતું સમક્ષિતિજ અંતર ગણો. (g = 10 m s^{-1}) સિરિંજ જમીનથી 1 m ઊંચાઈએ છે. [જવાબ : $\sqrt{5}$ m]